

INFORMATION REPORT INFORMATION REPORT

CENTRAL INTELLIGENCE AGENCY

This material contains information affecting the National Defense of the United States within the meaning of the Espionage Laws, Title 18, U.S.C. Secs. 793 and 794, the transmission or revelation of which in any manner to an unauthorized person is prohibited by law.

PROCESSING COPY

50X1-HUM

C-O-N-F-I-D-E-N-T-I-A-L

| | | | |
|-------------------|---|-----------------|--------------|
| COUNTRY | USSR | REPORT | |
| SUBJECT | Publications of the USSR Academy of Science | DATE DISTR. | 16 July 1957 |
| | re: 1. <i>Bulletin of the Institute of Theoretical Astronomy.</i> | NO. PAGES | 1 |
| | 2. <i>"Stratigraphic Significance of pollen of Gymnospermaeic Cenozoic deposits in the Pavlodarsk, Irtysh, and Aral regions."</i> | REQUIREMENT NO. | RD |
| DATE OF INFO. | | REFERENCES | |
| PLACE & DATE ACQ. | | | 50X1-HUM |

Rec # 190

SOURCE EVALUATIONS ARE DEFINITIVE. APPRAISAL OF CONTENT IS TENTATIVE.

unclassified Russian language 50X1-HUM

Soviet publications published in 1957 by the USSR Academy of Science :

1. Byulleten Instituta Teoreticheskoy Astronomii (Bulletin of the Institute of Theoretical Astronomy) Volume 6, Number 7, and Volume 6, Number 8.
2. Stratigraficheskoye Znachenie Pyl'tsy Golosemennykh Kaynozoysskikh Otlozheniy Pavlodarskogo Priirtyshya i Severnogo Priaralya (Stratigraphic Significance of Pollen of Gymnospermaeic Cenozoic Deposits in the Pavlodarsk Irtysh and the northern Aral regions) by E.D. Zaklinskaya.

50X1-HUM

| | | | | | | | | | |
|-------|--|--|---|---|-----|--|--|--|--|
| STATE | <input checked="" type="checkbox"/> ARMY | <input checked="" type="checkbox"/> NAVY | <input checked="" type="checkbox"/> AIR | <input checked="" type="checkbox"/> FBI | AEC | | | | |
|-------|--|--|---|---|-----|--|--|--|--|

(Note: Washington distribution indicated by "X"; Field distribution by "#")

INFORMATION REPORT INFORMATION REPORT

АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА СОВЕТСКИХ СОЦИАЛИСТИЧЕСКИХ
РЕСПУБЛИК

БЮЛЛЕТЕНЬ ИНСТИТУТА
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ АСТРОНОМИИ

Том VI, № 7 (80)

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА 1957 ЛЕНИНГРАД

Директор Института теоретической астрономии чл.-корр. АН СССР *М. Ф. Субботин*
Ответственный редактор проф. *Г. А. Чеботарев*

Бюллетень Института Теоретической Астрономии

Т. VI

1957

№ 7 (80)

Малые планеты

(1955)

Н. С. Самойлова-Яхонтова

Результаты наблюдательной и эфемеридной работы по малым планетам и краткий обзор литературы за 1955 г.
MINOR PLANETS 1955, by N. S. Samoilova-Yakhontova. — Summary on Minor Planets work during 1955.

В августе 1955 г. вышел из печати сборник эфемерид малых планет на 1956 г. (десятый год издания), составленный по образцу прошлых лет. В соответствии с пожеланиями, высказанными членами Комиссии № 20 на съезде Международного астрономического союза в Риме, и с решением комиссии Астросовета по терминологии названия малых планет в „Эфемеридах“ даны и впредь будут даваться в латинской транскрипции.

Планетным центром в Цинциннати выпущено в 1955 г. 159 планетных циркуляров от 1167 до 1326 номера (Minor Planet Circulars, 1955). В них опубликованы предварительные обозначения 27 планет, открытых в 1953 г.: 1953 CN, EM, FN₁, JN, KB, OM, ON, TE₃—TG₃, VG₃—VQ₃, XB₁, YD—YJ; обозначения 203 планет, открытых в 1954 г.: 1954 AK—AM, ET—EV, GK, HH, JP—JT, KK—KM, NQ—NS, OE, PE—PN, QK—QT, RO, RP, SB—SZ, SA₁—SL₁, TA—TQ, UA—UZ, UA₁—UZ₁, UA₂—UY₂, WA—WP, XB—XO, YA—YE и 257 планет, открытых до ноября 1955 г.: 1955 AA₁, BA—BM, CA—CB, DA—DQ, EA—EP, GA—GB, HA—HO, KA—KC, MA—MP, NA, OA—OE, QA—QZ, QA₁—QN₁, RA—RZ, RA₁—RF₁, SA—SZ, SA₁—SY₁, TA—TQ, UA—UZ, UA₁—UQ. В общей сложности в 1953 г. было открыто 503 планеты, а в 1954 г. — 379 планет.

Попрежнему очень мало планет, наблюдавшихся несколько раз. Так, в 1954 г. наблюдались:

311 планет один раз (82 %),

52 планеты два раза (14 %),

16 планет не меньше трех раз (4 %).

Только для четырех планет, открытых в 1954 г. (1954 AC, DE, ER, HC), и для трех, открытых в 1955 г. (1955 BG, FC, FG), удалось определить эллиптические элементы. Кроме того, определены 44 системы элементов, открытых ранее (в 1904—1953 гг.); из них 32 системы сотрудниками Астрономического вычислительного института в Гейдельберге (Nachrichtenblatt der Astronomischen Zentralstelle, 1955).

10 планет, список которых приведен в таблице, получили окончательные номера. Большой части этих планет оказалось возможным присвоить постоянные номера в результате отождествления различных объектов, наблюдавшихся в разные оппозиции, отделенные часто большими промежутками времени. Благодаря такому отождествлению удалось получить элементы, улучшенные по наблюдениям в нескольких оппозициях. Так, например, планета (1615) 1950 BW оказалась планетой, открытой еще в 1926 г. С. И. Белявским и получившей тогда обозначение 1926 TO; она была вторично открыта в 1948 г. и получила номер 1948 TG, и наконец, третий раз

в 1951 г., когда удалось определить ее эллиптические элементы, а затем отождествить с открытыми ранее планетами и произвести уточнение элементов. Планета (1610) 1928 RT была открыта П. Ф. Шайн. Ее удалось отождествить с планетой 1938 WN и определить элементы по двум оппозициям.

Список планет, получивших постоянные номера в 1955 г.

| № планеты | Предварительные обозначения | Кто открыл | Место наблюдения | Кто вычислял элементы | Где опубликованы элементы |
|-----------|-----------------------------|-------------|-----------------------|-----------------------|---------------------------|
| 1606 | 1950 RH | L. Boyer | Alger | S. Böhme | MPC 1186 87. |
| 1607 | 1950 RA | E. Johnson | Johannesburg | P. Scouzo | MPC 1210. |
| 1608 | 1951 KZ | C. Rogati | La Plata | P. Scouzo | MPC 1211. |
| 1609 | 1951 NL | E. Johnson | Johannesburg | H. Hirose и T. Takase | MPC 1227. |
| 1610 | 1928 RT | П. Ф. Шайн | Симеиз | S. Böhme | MPC 1244. |
| 1611 | 1950 DJ | K. Reinmuth | Heidelberg | S. Böhme | MPC 1247 48. |
| 1612 | 1950 BJ | K. Reinmuth | Heidelberg | S. Böhme | MPC 1281. |
| 1613 | 1950 SD | S. Arend | Uccle | S. Böhme | MPC 1281 82. |
| 1614 | 1952 HA | A. Schmitt | Uccle | S. Böhme | MPC 1282. |
| 1615 | 1950 BW | — | G. Link (Indiana Un.) | S. Böhme | MPC 1325. |

(1606) 1950 RH — 1928 RL — 1937 TS — 1937 VO; (1609) 1951 NL — 1934 JB — 1947 WB впервые открыта в 1934 г. в Симеизе Г. Н. Неуйминым; (1610) 1928 RT — 1938 WN; (1612) 1950 BJ — 1939 CD; (1613) 1950 SD — 1929 CL — 1941 SK; (1614) 1952 HA — 1928 SA — 1931 EA; (1615) 1950 BW — 1926 TO — 1948 TG впервые открыта С. И. Белявским в Симеизе.

Продолжалась и даже несколько оживилась работа по уточнению элементов нумерованных планет. В 1955 г. опубликовано 49 систем новых элементов, из них 25 систем определены в СССР (Бартенева, 1955а, 1955б; Кавулина, Сипола и Дирикис, 1955; Ханнина и Бартенева, 1955; Шмакова, 1955). Часть этих элементов помещена в «Эфемериды на 1956 г.», часть войдет уже в «Эфемериды на 1957 г.».

В 1955 г. вновь наблюдалась планета 515 Athalia, которая была вторично открыта в 1953 г. после того, как в течение 50 лет она считалась утерянной. Ее элементы теперь уточнены П. Муеном по наблюдениям в трех оппозициях и могут считаться вполне надежными (MPC, № 1283).

На старых пластинках, полученных на обсерватории Макдональда в 1951 г. по плану Г. Кайпера обозрения астероидов, были обнаружены два новых троянца, получивших предварительные обозначения 1951XJ и 1951XK. Однако каждый из них наблюдался только по два раза, и потому могли быть определены только круговые орбиты.

Восьмь планет получили в истекшем году названия. Из них планеты 1379 Лополонья, 1403 Idelsonia и 1484 Postrema были открыты Г. Н. Неуйминым, давно получили постоянные номера, но до сих пор не имели названий (MPC, № 1252).

В 1955 г. начались систематические наблюдения ярких планет, набранных для определения постоянных каталога слабых звезд (Самойлова-Яковлева, 1955а). Наблюдения ведутся на обсерваториях Пулковской, Киевской (АН УССР), Ташкентской, Московской и на ряде зарубежных обсерваторий: обсерватории в Бухаресте, Копенгагене, Ла-Плате, Лейдене, Сант-Иго де Чая, Сиднее. Весной интенсивно ведется наблюдение планеты 51 Nemausa. Долгосрочные точные эфемериды этой планеты регулярно публикуют П. Наур (Naup, 1955).

На Иельской обсерватории проводится окончательная дискуссия наблюдений первых четырех планет. Производятся измерения пластинок и определение точных положений остальных 12-ти планет программы А. Брауера (Yale Observatory, 1955). Продолжается также обработка 2400 пластинок, полученных на обсерватории Макдональда по программе Г. Кайпера обозрения астероидов. Положения планет по этим снимкам определял при помощи сконструированной им машины Г. Ванисброок, получивший 871 положение (Yerkes and McDonald Observatories, 1955).

В Ежегоднике Британской астрономической ассоциации на каждый год приводятся данные относительно покрытия звезд яркими малыми планетами (Taylor, 1955a). Была сделана попытка наблюдать покрытие (Nicholson а. Cragg, 1955): 22 декабря 1954 г. на обсерватории Паломар были сделаны с помощью 100-дюймового рефлектора два снимка Весты около предсказанного момента покрытия. Однако покрытие не произошло: Веста прошла на 1,8 севернее звезд BD + 19° 945. Покрытие могло быть видимо в юго-западной Канаде. На 1956 г. предсказано только одно покрытие звезд Вестой, видимое в Антарктике, 28 июня 1955 г. Паллада пройдет перед туманностью M15 в Персее (Taylor, 1955a).

Г. Тайлор, занимающийся предвычислениями покрытий звезд малыми планетами, опубликовал описание применяемого им полуграфического метода предвычисления покрытий (Taylor, 1955b).

Теоретических работ по малым планетам в истекшем году вышло очень мало. Г. М. Баженов (1955) исследовал разложение в тригонометрические ряды выражений вида $(1 - 2\epsilon \cos z + \epsilon^2)^{-1/2}$, в которых z — вчетное число, и установил достаточно тесные границы для коэффициентов этих разложений, вывел приближенные выражения для коэффициентов Лапласа b'_n , причем для оценки абсолютной погрешности коэффициентов, вычисленных по этим формулам, даны простые графики. Ему удалось установить границы для максимальных значений остаточных членов разложений. Для оценки остаточного члена разложения при различных n также предложены графики, с помощью которых можно решить и обратный вопрос: сколькими членами нужно ограничиться, чтобы максимальная величина остаточного члена не превосходила допустимой ошибки. Полученные результаты применены для разложения в ряд величины, обратной кубу расстояния между планетами, и иллюстрируются на примере малой планеты 244 Сита.

Г. А. Чеботарев и А. И. Божкова с помощью методики, разработанной одним из авторов (Чеботарев Г. А. Бюлл. ИТА, 4, 10, 1951), построили приближенную теорию движения малых планет троянской группы (Чеботарев, Божкова, 1955). Численным методом построено периодическое решение Лагранжа в ограниченной эллиптической задаче трех тел и составлены аналитические выражения для возмущений элементов в окрестности этого периодического решения. Методика применена к планете 588 Ахиллес.

В самом конце 1954 г. появилась работа Е. Рабе (Rabe, 1954), посвященная вопросу происхождения троянцев. Несколько лет тому назад Г. Кайпер (G. Kuiper) высказал гипотезу, что троянцы — бывшие спутники Юпитера, выброшенные из системы Юпитера вследствие уменьшения его первоначальной массы. Для проверки этой гипотезы и приближенной оценки возможной массы протопланеты Е. Рабе рассматривает плоскую круговую ограниченную задачу трех тел, считая массу Юпитера переменной. С уменьшением массы Юпитера постоянная Якоби $C_{(4)}$ непрерывно уменьшается, так же как и скорость тела малой массы V . Если тело малой массы вначале двигалось на небольшом расстоянии от Юпитера, то уменьшение V вызывает расширение его орбиты, т. е. удаление от Юпитера, а одновременное уменьшение C вызывает стремление тела к одному из центров либрации L_4 или L_5 — точкам абсолютного минимума C , т. е. происходит превращение спутника в троянца. Не исключена возможность возникновения при некоторых специальных начальных условиях также орбит, подобных орбите Гиледа. Воспользовавшись даже численными результатами Тюринга, полученными в его приближенной теории троянцев, Е. Рабе подсчитал, что масса протопланеты должна была быть приблизительно в 20 раз больше современной массы Юпитера, чтобы при ее уменьшении до нынешнего состояния спутник мог превратиться в троянца.

Ш. Кайат (Cailliatte, 1955a, 1955b, 1955c) продолжал работать над построением приближенной аналитической теории планеты 335 Roberta, суточное движение которой близко к соизмеримости 1:3. Сравнение с наблюдениями в 4 оппозициях 1947—1953 гг. показало, что наблюдения представляются с ошибками до 1° 1' по прямому восхождению. Автор выдвинул гипотезу, что причиной таких расхождений может быть слаб-

жение двух астероидов (Caillotte, 1955d) и исследовал обстоятельства сближения астероидов, принимая, что массы их порядка 10^{12} г. Показано, что под тесным сближением следует понимать приближение астероидов на расстояние $r \leq 10^4$ а. е. Получено выражение для возмущений координат и скоростей астероида, испытывающего тесное сближение. Однако влияние сближения оказалось совершенно ничтожным, и во всяком случае объяснить наблюдаемые расхождения теории с наблюдениями этим невозможно. Добавление в разложениях пертурбационной функции долгопериодических членов порядка 4-ой степени эксцентриситета несколько уменьшило невязки.

Фотометрические наблюдения малых планет продолжались на 82-дюймовом рефлекторе обсерватории Макдональда. На Морской обсерватории в Вашингтоне производились исследования поляризации Цереры, Паллады и Ириды (Provin, 1955).

На обсерватории Киевского университета закончена работа по определению показателей цвета 56 астероидов (Сандакова, 1955). Фотографирование производилось одновременно двумя камерами с объективами $f = 17$ (D=10 см, $F=50$ см) без фильтров и с желтым фильтром, установленным перед объективом. Звездные величины приводились к международной системе. Всего произведено 172 наблюдения. Показатели цвета, определенные в среднем с ошибкой ± 0.05 имеют большую дисперсию: они лежат в пределах от 0.36 до 1.54 , среднее значение равно 0.80 . Короткопериодические колебания блеска планет не связаны с изменениями цвета. Это говорит в пользу того, что колебания блеска обуславливаются неправильностями формы астероидов, а не их пятнистостью. Для 11 малых планет определены коэффициенты фаз в фотографических и визуальных лучах. Для трех планет — 9, 27 и 115 — коэффициенты фаз в фотографических лучах значительно больше, чем в визуальных; для остальных — различие в пределах ошибок наблюдений. Присоединение к киевским наблюдениям приведенных в ту же систему наблюдений других авторов — Финера, Рехта, Райнса позволяло сделать несколько общих выводов: 1) показатели цвета не обнаруживают явной зависимости от элементов орбиты a , i и q ; 2) существует связь между показателями цвета и размерами планеты — чем меньше планета, тем она краснее.

ЛИТЕРАТУРА

- Баженов Г. М. 1955. Исследование разложений в тригонометрические ряды выражений вида $(1 - 2\cos\alpha + \cos^2\alpha)^{1/2}$, в которых α — целое число. Бюлл. ИТА, 6, 173.
- Бартенева О. Н. 1955а. Новые элементы планеты 7 Ириды. Астр. ц. АН СССР, 163.
- Бартенева О. Н. 1955б. Новые элементы малой планеты 260 Губерта. Бюлл. ИТА, 6, 275.
- Боган Н. А. 1955. Иттерирование уравнений движения малых планет на счетно-электронных машинах. Бюлл. ИТА, 6, 376.
- Бугославская Е. Я., Т. П. Перекогина. 1955а. Фотографические наблюдения ярких малых планет. Астр. ц. АН СССР, 159.
- Бугославская Е. Я., Т. П. Перекогина. 1955б. Фотографические наблюдения малых планет на 380 мм асфериате Московской обсерватории. Астр. ц. АН СССР, 159.
- Буагюта Ф. Ф. 1955. Точные положения малых планет по фотографическим наблюдениям в Пулково. Изв. ГАО, 23, 1.
- Гаврилов И. В., И. Г. Жданова, А. Б. Овсина, А. П. Сантоха. 1955. Точные положения малых планет Цереры, Губа, Астения, Немусу. Астр. ц. АН СССР, 158.
- Гамалей Н. В. 1955. Точные положения малых планет Цереры, Юноны и Астении по фотографическим наблюдениям. Изв. ГАО, 24, 1.
- Дубюга А. Е. 1955. О вычислении зависимости при обработке астрофотографий. Астр. ц. АН СССР, 162.
- Кузнецов З. В., С. П. Спирова, М. Диринкс. 1955. Элементы орбит и эфемерид малых планет. Астр. ц. АН СССР, 156.
- Корниенко Э. В. 1955. Наблюдения малых планет на Горной обсерватории Астрофизического инст. АН Казахской ССР. Астр. ц. АН СССР, 164.
- Кохин Е. К., Ю. С. Подрабинчук. 1955. Наблюдения малых планет на Вильямсской астрономической обсерватории В. Г. У. Астр. ц. АН СССР, 156.
- Раудсвард К. К. Наблюдения малых планет на Тартуской астрономической обсерватории Академии наук Эст. ССР. Астр. ц. АН СССР, 163.
- Самойлова-Яхонтова Н. С. 1955а. Наблюдения малых планет для определения постоянных каталогта слабых звезд. Тр. 11-й астр. конф. СССР, А., 1955, 78.
- Самойлова-Яхонтова Н. С. 1955б. Обзор работ по малым планетам за 1953 г. Бюлл. ИТА, 6, 174.
- Сандакова Е. В. 1955. О показателях цвета малых планет. Астр. ц. АН СССР, 163.
- Скляр Ю. А. 1955. Наблюдения малых планет на астрономической обсерватории СГУ им. Н. Г. Чернышевского в 1954 г. Астр. ц. АН СССР, 160.
- Хавина Ф. Б. 1955. Формулы и таблицы для интерполирования осевых координат и вычисления компонент скорости. Бюлл. ИТА, 6, 275.
- Хавина Ф. Б. и О. Н. Бартенева. 1955. Исправление орбит 16 малых планет. Бюлл. ИТА, 6, 275.
- Хо Тьен-киен и Лю Пiao-лин. 1955. Новые элементы планеты 497 Ива. Астр. ц. АН СССР, 157.
- Чепотурин Т. А. и А. И. Божкова. 1955. Теория движения малых планет троянской группы. Бюлл. ИТА, 6, 177.
- Чжан Юн-чжэ. 1955а. Улучшенная орбита планеты 415 Палатта. Астр. ц. АН СССР, 157.
- Чжан Юн-чжэ. 1955б. Новая малая планета P01. Астр. ц. АН СССР, 163.
- Шмаков М. Я. 1955. Абсолютные возмущения и новые элементы планет 386, 417, 430 и 735. Бюлл. ИТА, 6, 174.
- Эфемериды малых планет на 1956 г. 1955. Изд. АН СССР, А.
- Caillotte Ch. 1955a. Histoire des astéroïdes caractéristiques (II). Application à une comète variable d'ordre deux. Etude de (335) Roberta. J. O., 38, 4.
- Caillotte Ch. 1955b. Ephéméride de l'astéroïde (377) Campanula. J. O., 38, 4.
- Caillotte Ch. 1955c. Complément à l'étude de (335) Roberta. J. O., 38, 11.
- Caillotte Ch. 1955d. Sur la possibilité de perturbations mutuelles entre deux astéroïdes. J. O., 38, 11.
- Chang Y. C. and others. 1955. Photographic observations of the Positions of Minor Planets at the Purple Mountain Observatory (1954). Acta Astr. Sinica, 3, 1.
- Chang Y. C. and Chang Chia-hsiang. 1955a. A new asteroid observed at the Purple Mountain Observatory. Acta Astr. Sinica, 3, 1.
- Chang Y. C. and Chang Chia-hsiang. 1955b. The improved orbit and the opposition ephemeris for 1956 of the new asteroid 1011. Acta Astr. Sinica, 3, 2.
- Gonzalez-Abrón J. M. 1955. Nueva orbita del asteroide 1572 Horemann. Rev. geofis., 14, 54.
- Hirose H. and K. Tomita. 1955. Photographic Observations made with the Broadstar Astrophot. (31). Tokyo Astr. Bull. Ser., N 75.
- Ho Tien-chen and Lui Pao-lin. 1955. The improved Orbit of the Minor Planet (497) Iva. Acta Astr. Sinica, 3, 1.
- Kühse E. E. 1955. Verleserte Bahnelemente für den kleinen Planeten (1221) Amor. A. N., 282, 2.
- Linde H. von. 1955. Über einen speziellen Fall des Dreikörperproblems. A. N., 282, 1.
- Malisch W. 1955. Beobachtungen von Planetoiden und Kometen 1954. A. N., 282, 5.
- Minor Planet Circulars. 1955. NN 1167—1320.
- Nachrichtenh. d. Astr. Zentralstelle 1955. Jahrg. 9. NN 1—11.
- Nakano S., H. Yasuda and H. Hara. 1955. Meridian Observations of the Right Ascension of Minor Planets during the Year 1954. Tokyo Astr. Bull. Ser. N 73.
- Nam P. 1955. Asteroid 51 Nemausa. U. A. I. Circulars, 1522.
- Nicholson, S. B. and T. A. Crage. 1955. Position of Vesta. Publ. A. S. P., 67, N 395.
- Pelt G. 1955. Photographic Positions of Minor Planets and of comet 1955a observed in 1952 and 1953. Bull. Astr. Inst. Netherlands, 12, 460.
- Provin S. S. 1955. Preliminary Observations of the Polarization of Asteroids (abstract). Publ. A. S. P., 67, N 395.
- Purgathofer A. 1955. 165 Positionen des Kleinen Planeten 51 Nemausa. Mitteilungen d. Universitäts-Sternw. Wien, 7, 17.
- Ruhé E. 1954. The Trojan and Escaped Satellites of Jupiter. A. J., 59, N 11.
- Schubert J. 1955. Verbesserung der Bahn des kleinen Planeten 1453 Fennia. A. N., 282, 5.
- Taylor G. E. 1955a. Occultations of stars by Minor Planets. Handbook B. Astr. Ass. 1956.
- Taylor G. E. 1955b. The Prediction of Occultations of Stars by Minor Planets. Jour. B. Astr. Ass., 65, 2.
- Wan Lai, Chow Tsou-Gui and Chang Hsiao-Shun. 1955a. Photographic observations of the Positions of Minor Planets at the Zo-Su Observatory (1954). Acta Astr. Sinica, 3, 1.
- Wan Lai, Chow Tsou-Gui and Chang Hsiao-Shun. 1955b. Photographic observations of the Positions of Minor Planets at the Zo-Su Observatory. Acta Astr. Sinica, 3, 2.
- Wilson R. Jr. 1955. Convenient procedure for computing preliminary planetary ephemerides. Publ. A. S. P., 67, N 395.
- Yale Observatory Report 1955. A. J., 60, 1231.
- Verkes and McDonald Observatories Report 1955. A. J., 60, 2.

Получено в Редакцию
24 апреля 1956 г.

Разложение пертурбационной функции в ряд Фурье относительно наклонности

Часть III. Разложение пертурбационной функции в ряд по степеням приращения эксцентриситета

Н. Б. Еленевская

В настоящей III части работы получены разложения пертурбационной функции в ограниченной круговой задаче трех тел, приращение e в тех случаях, когда обычные разложения по степеням эксцентриситетов не могут сходиться. Для получения этих разложений использован обычный метод аналитического продолжения. Разложения ведутся по степеням разности $e - e_0$, где e_0 — некоторое начальное значение эксцентриситета.

ENTWICKLUNG DER STÖRUNGSFUNKTION IN EINE FOURIER-REIHE BEZÜGLICH DER NEIGUNG. III TEIL. ENTWICKLUNG DER STÖRUNGSFUNKTION IN EINE REIHE NACH DEN POTENZEN DES EXZENTRIZITÄTSZUNACHSES, von N. B. Jelenewskaja. — Im gegenwärtigen III Teil der vorliegenden Abhandlung werden die Entwicklungen der Störungsfunktion im kreisförmigen eingeschränkten Dreikörperproblem erhalten, die auch in Fällen, wo gewöhnliche Entwicklungen nach den Potenzen der Exzentrizitäten nicht konvergieren, brauchbar sind. Bei der Ausführung dieser Entwicklungen wurde die übliche Methode der analytischen Fortsetzung benutzt. Die Entwicklungen sind nach den Potenzen der Differenz $(e - e_0)$ dargestellt, wo e_0 einen Anfangswert der Exzentrizität bedeutet.

Введение

Во II части данной работы нами были получены некоторые разложения пертурбационной функции в кратные ряды. Основным отличием этих разложений от всех опубликованных до сих пор разложений пертурбационной функции является то, что по всем угловым элементам, в частности и по наклонности, пертурбационная функция разлагается нами в тригонометрический ряд. Коэффициентами этого ряда являются некоторые функции эксцентриситета e .

Для фактического пользования этими рядами, например при интегрировании уравнений Лагранжа, упомянутые функции эксцентриситета в свою очередь должны быть разложены в ряд по степеням e . Такие разложения также были выполнены во II части настоящей работы.

После перегруппировки членов наших рядов преобразуются в степенные ряды по эксцентриситету e и отношению полуосей a , коэффициентами при которых в нашем случае будут тригонометрические полиномы по кратным всех угловых элементов; взаимной наклонности орбит i , разности долготы возмущающей точки и долготы узла возмущаемой точки $\Omega = I_1 - \Omega_2$, расстояния перигелия оскулирующей орбиты от узла u и эксцентрисической или средней аномалии возмущаемой точки.

Такая перегруппировка членов является возможной, разумеется, только в области абсолютной сходимости упомянутых разложений по степеням эксцентриситета, т. е. при e меньшем предела Адамса ($e < 0.6627 \dots$). Для больших значений эксцентриситета, равно как и для значений эксцентриситета больших единицы, разложение в степенной ряд по эксцентриситету является невозможным.

В этой части работы мы попытаемся дать более общие разложения, годные для любых e (как больших, так и меньших единицы). Для этого мы будем пользоваться

не рядами Маклорена по степеням e , а более общими рядами Тейлора по степеням приращения эксцентриситета $(e - e_0)$, где e_0 некоторое фиксированное значение эксцентриситета, которое мы будем считать в окончательном разложении вещественным и положительным, а в промежуточных преобразованиях, вообще говоря, комплексным аргументом.

О геометрическом значении e_0 будет подробнее сказано в § 4. Полученные таким образом ряды для любого e , отличного от единицы, будут иметь конечный, отличный от нуля радиус сходимости. Этот радиус будет убывать от 0.6627... до нуля, когда e_0 изменится от нуля до единицы, и возрастет от нуля до бесконечности, когда e_0 изменится от единицы до бесконечности.

§ 1. Предварительный анализ. Разложение обратной величины радиуса-вектора в ряд Лорана по степеням $z = z'$ для случая e больше единицы

Во II части работы мы рассмотрим разложение функции

$$\frac{1}{(1 - \epsilon \cos g)^2} \quad (3.1)$$

в ряд Фурье. Коэффициенты этого разложения мы определим как некоторые специальные функции:

$$J_n^*(z, \lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos n y}{1 - \epsilon \cos y} dy, \quad (3.2)$$

В предварительном анализе, во II части, мы рассматривали эти функции при целых λ и n для параметра ϵ по модулю меньшего единицы. В этой части мы рассмотрим разложение функции (3.1) для случая $\epsilon > 1$.^{*} Величину y мы будем рассматривать, как и прежде, комплексной, а затем подробнее остановимся на случае, когда y чисто мнимая величина. Этот последний случай имеет для нас практическую важность, так как он имеет место при движении точки по гиперболе. Если $\epsilon > 1$, то мы не можем пользоваться разложением функции (3.1) в ряд Фурье, так как при y действительном эта функция обращается в бесконечность при $\cos y = \frac{1}{\epsilon}$, а при y чисто мнимой функция (3.1) не является периодической.

Попытаемся разложить эту функцию в ряд Лорана по степеням величины $z = z'e$, где $z' = \sqrt{\epsilon - 1}$, а e — основание натуральных логарифмов.

Пусть $y = E$, где E — эксцентрисическая аномалия, а $x = e$, e — эксцентриситет кеплерова движения. Будем считать E и e комплексными:

$$E = x + iy, \quad e = \xi + i\eta. \quad (3.3)$$

Введем угол эксцентриситета φ и его вещественную и мнимую части φ_1 и φ_2 формулой:

$$e = \sin \varphi = \sin(\varphi_1 + i\varphi_2) = \sin \varphi_1 \operatorname{ch} \varphi_2 + i \cos \varphi_1 \operatorname{sh} \varphi_2. \quad (3.4)$$

Отсюда видно, что при $\varphi_2 = 0$ $e = \sin \varphi_1$, $e < 1$, при $\varphi_2 \neq 0$:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 = 0, \quad e = i \operatorname{sh} \varphi_2, \\ \varphi_1 = \pi, \quad e = -i \operatorname{sh} \varphi_2, \\ \varphi_1 = \frac{\pi}{2}, \quad e = \operatorname{ch} \varphi_2, \\ \varphi_1 = \frac{3\pi}{2}, \quad e = -\operatorname{ch} \varphi_2 \end{aligned} \right\} e < 1. \quad (3.5)$$

* Более общий случай, когда $-\infty < \epsilon < +\infty$, разобран в работе (Еленевская, 1949).

Заменим в формуле (3.1) тригонометрические функции через показательные и сделаем замену переменного, положив $z = e^{i\varphi}$. Тогда будет:

$$\frac{1}{(1 - e \cos E)^2} = \frac{(-1)^2 2^2 z^2}{e^2 [z^2 - \frac{2}{e} z + 1]^2}. \quad (3.6)$$

Положим

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \operatorname{tg} \left(\frac{\varphi_1}{2} + i \frac{\varphi_2}{2} \right) = \varphi. \quad (3.7)$$

После элементарных преобразований находим:

$$\varphi = \frac{\sin \varphi_1 + i \operatorname{sh} \varphi_2}{\cos \varphi_1 + \operatorname{ch} \varphi_2}, \quad \frac{1}{\varphi} = \frac{\sin \varphi_1 - i \operatorname{sh} \varphi_2}{\cos \varphi_1 - \operatorname{ch} \varphi_2}. \quad (3.8)$$

Тогда равенство (3.6) можно будет переписать в виде:

$$\frac{1}{(1 - e \cos E)^2} = \frac{(-1)^2 2^2 z^2}{e^2 [z^2 - \frac{2}{e} z + 1]^2}. \quad (3.9)$$

Найдем особые точки этой функции. Приравняв нулю знаменатель, находим его корни:

$$z_1 = \frac{1}{e}, \quad z_2 = \frac{1}{e}.$$

Перепишем формулу (3.9) в виде:

$$\frac{1}{(1 - e \cos E)^2} = \frac{(-1)^2 2^2 z^2}{e^2 (z - \frac{1}{e})^2}. \quad (3.10)$$

Преобразование $z^{1/2} = e^{i\varphi/2} z^{-1/2} = z$, как известно, переводит отрезок действительной оси $0 \leq x \leq 2\pi$ в окружность с центром в точке $z=0$ и радиусом $r=1$.

Пологая $z_1 = \varphi$ и $z_2 = \frac{1}{\varphi}$, получим:

$$z = e^{i\varphi} z^{-1/2} = e^{i\varphi} (\cos \varphi_1 + i \operatorname{sh} \varphi_2) = \frac{\sin \varphi_1 + i \operatorname{sh} \varphi_2}{\cos \varphi_1 + \operatorname{ch} \varphi_2}. \quad (3.11)$$

или, разделив действительную и мнимую части,

$$e^{i\varphi} \cos \varphi_1 = \frac{\sin \varphi_1}{\cos \varphi_1 + \operatorname{ch} \varphi_2}, \quad e^{-i\varphi} \sin \varphi_1 = \frac{\operatorname{sh} \varphi_2}{\cos \varphi_1 + \operatorname{ch} \varphi_2}. \quad (3.12)$$

Аналогично, полагая $z_2 = \frac{1}{\varphi}$, получим

$$e^{-i\varphi} \cos \varphi_2 = \frac{\sin \varphi_2}{\cos \varphi_2 - \operatorname{ch} \varphi_1}, \quad e^{i\varphi} \sin \varphi_2 = \frac{\operatorname{sh} \varphi_1}{\cos \varphi_2 - \operatorname{ch} \varphi_1}. \quad (3.13)$$

Отсюда получаем координаты особых точек:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\operatorname{sh} \varphi_2}{\sin \varphi_1}, \quad e^{-i\varphi} = \frac{\sqrt{\sin^2 \varphi_1 + \operatorname{sh}^2 \varphi_2}}{\operatorname{ch} \varphi_2 + \cos \varphi_1}, \quad (3.14)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = -\frac{\operatorname{sh} \varphi_1}{\sin \varphi_2}, \quad e^{i\varphi} = \frac{\sqrt{\sin^2 \varphi_2 + \operatorname{sh}^2 \varphi_1}}{\operatorname{ch} \varphi_1 - \cos \varphi_2}.$$

Пологая теперь эксцентриситет e действительным, будем иметь:

а) для $|e| < 1$ особые точки (рис. 1) определяются по (3.15), поскольку $x_1 = x_2 = 0$:

$$\left. \begin{aligned} e^{-i\varphi} &= \frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{e}, \quad e^{i\varphi} = \frac{1 + \sqrt{1 - e^2}}{e}, \\ y_1 &= -y_2 = \ln \frac{e}{1 - \sqrt{1 - e^2}}; \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

б) для $|e| > 1$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_1 &= \operatorname{sh} \varphi_2 = \sqrt{e^2 - 1}, \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = -\operatorname{sh} \varphi_1 = -\sqrt{e^2 - 1}, \\ e^{-i\varphi} &= e^{i\varphi} = \frac{\operatorname{ch} \varphi_2}{\operatorname{ch} \varphi_1} = 1, \quad y_1 = y_2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

(как указывалось, в этом случае $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ или $\varphi_1 = \frac{3\pi}{2}$)

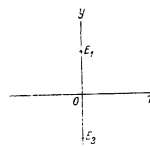


Рис. 1.

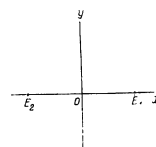


Рис. 2.

или

$$\left. \begin{aligned} z &= e^{i\varphi} = \frac{1 + \operatorname{arctg} \sqrt{e^2 - 1}}{1 + i\sqrt{e^2 - 1}}, \\ z &= e^{i\varphi} = \frac{1 - \operatorname{arctg} \sqrt{e^2 - 1}}{1 - i\sqrt{e^2 - 1}}. \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

Особые точки будут расположены на оси x симметрично относительно начала координат (рис. 2).

Если рассматривать расположение особых точек в плоскости $z = u + iv$, то будем иметь следующие:

а) для $|e| < 1$

$$\left. \begin{aligned} z &= re^{i\varphi} = 1 - e^{i\varphi} = u + iv, \\ v_1 &= v_2 = 0, \quad x = \varphi = \operatorname{arctg} \frac{v}{u}, \\ r_1 &= 1 - \sqrt{1 - e^2}, \quad r_2 = 1 + \sqrt{1 - e^2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

При $e \rightarrow 0$, $r_1 \rightarrow 0$, $r_2 \rightarrow 2$;

при $e \rightarrow 1$, $r_1 \rightarrow r_2 \rightarrow 1$.

В плоскости z получим следующую картину (рис. 3), т. е. для $|e| < 1$ и $\frac{1}{e}$ всегда действительным и расположены на оси u на расстоянии $\frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{e}$ и $\frac{1 + \sqrt{1 - e^2}}{e}$.

В кольце $\frac{1}{e} < r < \frac{1}{e}$ функция $\frac{1}{(1 - e \cos E)^2}$ аналитическая и может быть разложена в ряд Лорана по степеням z . При $e=0$ внутренняя окружность $z=\varphi$ стягивается

в точку, а внешняя $z = \frac{1}{e}$ уходит в бесконечность и ряд сходится по всей плоскости.

При $e=1$ обе особые точки попадают на окружность единичного радиуса.

б) Посмотрим, как будут расположены особые точки в случае $|e| > 1$.

В этом случае

$$\begin{aligned} z_1 = e^{i\psi} = \frac{1 + i\sqrt{e^2 - 1}}{e}, \quad z_2 = e^{-i\psi} = \frac{1 - i\sqrt{e^2 - 1}}{e}, \\ z_1 = x_1 + i y_1 = \operatorname{arctg} \sqrt{e^2 - 1}, \quad z_2 = x_2 + i y_2 = -\operatorname{arctg} \sqrt{e^2 - 1}, \\ r_1 = r_2 = 1. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Дорановское кольцо стягивается в линию, как показано на рис. 4. Разложение в ряд Лорана оказывается невозможным: в этом случае мы будем иметь два различных разложения. Внутри окружности единичного радиуса функция

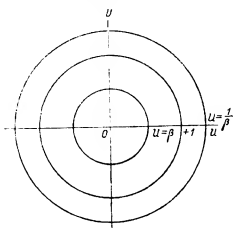


Рис. 3.

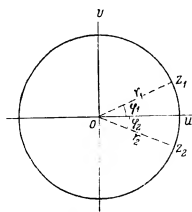


Рис. 4.

$$\frac{1}{(1 - e \cos E)^2} = \frac{(-1)^{2n}}{e^{2n}} \cdot \left(z^2 - \frac{2}{e} z + 1 \right)^{-n} \quad (3.20)$$

может быть разложена в сходящийся ряд Маделорна по положительным степеням z , а вне этой окружности эта же функция разлагается в сходящийся ряд по отрицательным степеням z . В этом случае, т. е. когда e действительно и по модулю больше единицы, функция $\frac{1}{z^2} = \frac{1}{(1 - e \cos E)^2}$ будет непрерывной для любого $x, y \neq 0$ ($z = u + iv = e^{i\psi} = e^{i\psi} e^{i\psi}$), причем $r = \frac{1}{e}$, где r — радиус-вектор, и a — большая полуось орбиты возмущенного тела. Для E действительного функция $\frac{1}{z^2}$ имеет разрыв непрерывности в точке $E = \arccos \frac{1}{e}$.

Рассмотрим случай, когда $\frac{1}{z^2}$ действительно. В этом случае (при действительном $e > 1$) $\frac{1}{z^2}$ будет непрерывной функцией, когда $\cos E$ действителен и больше единицы. Пусть E комплексное: $E = x + iy$; тогда

$$\cos E = \cos(x + iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y.$$

Следовательно, $\sin x \operatorname{sh} y = 0$.
Когда $\operatorname{sh} y = 0$, $\cos E = \cos x \leq 1$. Этот случай мы сейчас не рассматриваем.
Когда $\sin x = 0$, $\cos E = \operatorname{ch} y \geq 1$. В этом случае $x = k\pi$, $E = k\pi + iy$, $k = 0, 1, 2, \dots$

т. е. E будет бесконечнозначной функцией x .

Однако в функцию $\frac{1}{z^2}$ она входит только под знаком косинуса, поэтому $\frac{1}{z^2}$ определяется однозначно. Следовательно, мы, не нарушая общности, можем положить $E = iu$, считая u действительным. В этом случае формула (3.6) примет вид:

$$f(u) = \frac{1}{(1 - e \operatorname{ch} u)^2} = \frac{(-1)^{2n}}{e^{2n}} \cdot \left(z^2 - \frac{2}{e} z + 1 \right)^{-n}, \quad z = z^*, \quad (3.21)$$

Внутри окружности единичного радиуса, т. е. для $z < 1$, искомое разложение будет иметь вид:

$$f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} P_n (\operatorname{ch} nu + \operatorname{sh} nu). \quad (3.22)$$

Вне окружности, т. е. для $z > 1$, получим разложение

$$f(u) = \frac{1}{(1 - e \operatorname{ch} u)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n (\operatorname{ch} nu - \operatorname{sh} nu). \quad (3.23)$$

Однако оба эти ряда можно объединить в один, если заметить, что когда z меняется от нуля до единицы, то u пробегает все значения от минус бесконечности до нуля; когда же z растет от единицы до бесконечности, u меняется от нуля до плюс бесконечности. Замечая также, что $f(u)$ четная функция аргумента u , получим:

$$f(-u) = f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n (\operatorname{ch} nu - \operatorname{sh} nu). \quad (3.24)$$

При этом в формуле (3.24) всегда берется положительное значение u . Ряд (3.24) будет сходиться для всех положительных значений u , кроме $u=0$. Однако для случая $u=0$, $f(u)$ обращается в $\frac{1}{(1-e)^2}$. Таким образом, $f(u)$ будет определено для любого u в интервале $0 \leq u \leq \infty$.

§ 2. Предварительный анализ. Коэффициенты разложения

Как показано в предыдущем параграфе, коэффициенты разложения (3.22) будут тождественны соответствующим коэффициентам разложения (3.23) $P_n = Q_n = f_n(z, e)$. Следовательно, мы можем вычислить либо коэффициенты P_n , как коэффициенты ряда Маделорна по формуле:

$$P_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{(z - b)^2 \left(z - \frac{1}{z} \right)^{2n-1}}, \quad (3.25)$$

либо коэффициенты Q_n как коэффициенты ряда Лорана:

$$Q_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{z^{n+1} dz}{(z - b)^2 \left(z - \frac{1}{z} \right)^{2n-1}}. \quad (3.26)$$

В первом случае коэффициент P_n будет равен вычету подынтегральной функции относительно точки $z=0$ (полюс порядка $n-z+1$), интегрирование ведется по замкнутому контуру, заключенному внутри окружности единичного радиуса. Во втором случае Q_n равняется сумме вычетов относительно особых точек $z=\frac{1}{2}$ и $z=\frac{1}{2}$ (полюса порядка 2). За контур интегрирования может быть принят любой замкнутый контур, заключающий внутри себя точки $z=\frac{1}{2}$ и $z=\frac{1}{2}$. Первый способ, естественно, будет проще, однако второй способ представляет интерес как распространение теории функций $J_n(z, e)$ на случай e большего единицы. Поэтому рассмотрим его отдельно.

Положим

$$J_n(z, e) = \frac{(-1)^{n-1}}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{z^{n-1}}{(z-\frac{1}{2})^2(z-\frac{1}{2})^2} dz = \frac{(-1)^{n-1}}{e^2} (c_{n-1} + c_{n-1}) \quad (3.27)$$

где c_{n-1} и c_{n-1} соответствующие вычеты подынтегральной функции относительно точек $z=\frac{1}{2}$ и $z=\frac{1}{2}$.

Коэффициенты разложения функции

$$\frac{1}{(1-e \cos E)^2} = \frac{(-1)^{n-1}}{e^2} \left(\frac{z^n}{(z-\frac{1}{2})^2} + \frac{z^n}{(z-\frac{1}{2})^2} \right)$$

по степеням z будут иметь различные аналитические выражения для $e < 1$ и $e > 1$. Это обычное явление в случае, когда лорановское кольцо стягивается в линию.

В общем случае, т. е. когда e комплексное, коэффициенты этого разложения будут даваться формулой:

$$J_n(z, e) = \frac{(-1)^{n-1}}{e^2} \int_{\gamma} \frac{z^{n-1}}{(z-\frac{1}{2})^2(z-\frac{1}{2})^2} dz = J_n(z, e) + J_n(z, e) \quad (3.28)$$

где

$$J_n(z, e) = \frac{(-1)^{n-1}}{e^2} C_{n-1} \quad \text{и} \quad J_n(z, e) = \frac{(-1)^{n-1}}{e^2} C_{n-1}$$

Очевидно, для $e < 1$, $J_n = J_n^*$ (см. Еленевская, 1953, где подробно развита теория функций $J_n^*(z, e)$). В этом случае внутри контура интегрирования попадает только точка $z=\frac{1}{2}$ и $J_n(z, e)=0$.

Найдем конечные выражения для $J_n^*(z, e)$ и $J_n^*(z, e)$.

Согласно теории вычетов

$$\begin{aligned} C_{n-1} &= \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[\frac{z^{n-1}}{(z-\frac{1}{2})^2} \right] = \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-k)}{k!} (n-1)(n-2)\dots \\ &\quad \dots (n-1-z-\gamma)(2z-\gamma-2)! \frac{z^{n-k-1}}{(1-\gamma)^{n-k-1}}; \\ C_{n-1} &= \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[\frac{z^{n-1}}{(z-\frac{1}{2})^2} \right] = \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1} (n-1)(n-2)\dots(n-k)}{k!} (n-1)(n-2)\dots \\ \dots (n-1-z-\gamma)(2z-\gamma-2)! \frac{z^{n-k-1}}{(1-\gamma)^{n-k-1}}; \quad (3.30)$$

$$J_n^*(z, e) = \frac{2^n}{e^2 (1-\gamma)^2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-k)}{k!} (n-1)(n-2)\dots \\ \dots (n-1-z-\gamma)(2z-\gamma-2)! \frac{z^{n-k-1}}{(1-\gamma)^{n-k-1}}; \quad (3.31)$$

$$J_n^*(z, e) = \frac{2^n}{e^2 (1-\gamma)^2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1} (n-1)(n-2)\dots(n-k)}{k!} (n-1)(n-2)\dots \\ \dots (n-1-z-\gamma)(2z-\gamma-2)! \frac{z^{n-k-1}}{(1-\gamma)^{n-k-1}}. \quad (3.32)$$

Таким образом, выражение для функции $J_n^*(z, e)$, рассматриваемой как функция z , будет тем же самым, как в случае $e < 1$. Различие будет только в том, что в случае $|e| > 1$, z будет комплексным и, следовательно, такими же будут функции $J_n^*(z, e)$.

Из самого построения этих функций и из того, что в случае $e > 1$ и $E=iu$, z и $\frac{1}{z}$ являются величинами комплексными сопряженными следует, что функции $J_n^*(z, e)$ и $J_n^*(z, e)$ также будут комплексными сопряженными функциями e .

Функция $J_n(z, e) = J_n^*(z, e) + J_n^*(z, e)$ как сумма двух комплексных сопряженных будет вещественной действительной.

Непосредственно из формулы (3.21) видно, что

$$f(u) = \frac{(-1)^{n-1}}{e^2} \left(\frac{z^n}{(z-\frac{1}{2})^2} + \frac{z^n}{(z-\frac{1}{2})^2} \right)$$

имеет в точке $z=0$ нуль порядка n . Следовательно, ее разложение будет начинаться с члена z^n . Поэтому $J_n(z, e)$ обращается в нуль для всех $n < z$, хотя каждая из функций $J_n^*(z, e)$ и $J_n^*(z, e)$ в отдельности этим свойством не обладает.

В заключение дадим определение функций $J_n^*(z, e)$ и $J_n^*(z, e)$ для $0 \leq |e| < \infty$.

Мы определяли раньше функцию $J_n^*(z, e)$ в форме определенного интеграла

$$J_n^*(z, e) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos nE}{(1-e \cos E)^2} dE. \quad (3.33)$$

Это определение будет справедливо для $|e| < 1$ (е может быть, вообще говоря, комплексным). Для $|e| > 1$ это определение уже не будет годиться, так как для $|e| > 1$ определенный интеграл (3.33) будет иметь, как функция e , совершенно другое аналитическое выражение, определяемое формулами (3.26), (3.28) и (3.32). Мы можем дать теперь другое определение функций $J_n^*(z, e)$ как функций эксцентриситета e или, что то же, как функций β , где $\beta = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ ($e = \sin \varphi$), которое будет справедливым для любого e или β .

Определим $J_n^*(z, e)$ как вычет функции

$$\frac{(-1)^{n-1} z^{n-1}}{e^2 (z - \frac{1}{2})^2 (z - \frac{1}{2})^n}$$

относительно особой точки $z = \frac{1}{2}$:

$$J_n^*(z, e) = \frac{(-1)^{n-1}}{2\pi i e^2} \int_{\gamma} \frac{z^{n-1}}{(z - \frac{1}{2})^2 (z - \frac{1}{2})^n} dz. \quad (3.34)$$

Контур интегрирования C_1 выбирается так, чтобы внутри его заключалась единственная особая точка $z = \frac{1}{2}$. Это всегда можно сделать, так как особые точки нашей функции $z = \frac{1}{2}$ и $z = \frac{1}{2}$ суть изолированные особые точки (полюса порядка 2) и могут совпадать для единственного значения e , именно для $e = 1$. В точке $e = 1$ функция $\frac{1}{(1 - e \cosh E)^2}$ имеет точку разветвления и будет однозначной.

Определив функцию $J_n^*(z, e)$ выражением (3.34), мы получим аналогично для функции $J_n^*(z, e)$, которая будет комплексной, сопряженной с $J_n^*(z, e)$, выражение:

$$J_n^*(z, e) = \frac{(-1)^{n-1}}{2\pi i e^2} \int_{\gamma} \frac{z^{n-1}}{(z - \frac{1}{2})^2 (z - \frac{1}{2})^n} dz. \quad (3.35)$$

Контур C_2 выбирается так, чтобы внутри его попадала только особая точка $z = \frac{1}{2}$.

Можно легко вывести для функций $J_n^*(z, e)$ те же рекуррентные соотношения, что и для функций $J_n^*(z, e)$. Выведем некоторые из них. Напишем $J_n^*(z, e)$ в виде:

$$J_n^*(z, e) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi i}^{\pi i} \frac{\cos \pi E}{(1 - e \cosh E)^2} dE, \quad (3.36)$$

и $\pm \frac{1}{2}$ сколь угодно малым.

Продифференцировав под знаком интеграла по параметру e , получим

$$\frac{d}{de} J_n^*(z, e) = \frac{1}{2} [J_{n-1}^*(z+1, e) + J_{n+1}^*(z+1, e)]. \quad (3.37)$$

Умножим правую и левую части выражения (3.36) на e и снова продифференцируем обе части по e . Мы получим

$$\frac{d}{de} J_n^*(z, e) = \frac{1}{e} [J_n^*(z+1, e) - J_n^*(z, e)]. \quad (3.38)$$

Исключая из (3.37) и (3.38) $\frac{d}{de} J_n^*(z, e)$, получим

$$J_n^*(z, e) = J_n^*(z+1, e) - \frac{1}{e} [J_{n-1}^*(z+1, e) + J_{n+1}^*(z+1, e)]. \quad (3.39)$$

Написав конечные выражения $J_n^*(z, e)$ для индексов $n-1$, n , $n+1$ с помощью формулы (3.31), находим еще одно рекуррентное соотношение:

$$n J_n^*(z, e) = \frac{3e}{2} [J_{n-1}^*(z+1, e) - J_{n+1}^*(z+1, e)]. \quad (3.40)$$

И, наконец, исключая $J_n^*(z, e)$ из уравнений (3.39) и (3.40), получим

$$n J_n^*(z+1, e) = \frac{e}{2} [(n+1) J_{n-1}^*(z+1, e) - (n-2) J_{n+1}^*(z+1, e)]. \quad (3.41)$$

Исходя из этих формул, легко показать, аналогично тому, как это делалось во второй части, что функции $J_n^*(z, e)$ удовлетворяют тому же дифференциальному уравнению типа Фукса, что и функции $J_n^*(z, e)$. Это уравнение имеет вид:

$$e^2 \frac{d^2}{dz^2} J_n^*(z, e) + e \frac{2(z+1)e^2-1}{e^2-1} \frac{d}{dz} J_n^*(z, e) + \frac{z(z+1)e^2+e^2}{e^2-1} J_n^*(z, e) = 0. \quad (3.42)$$

Напишем это уравнение в виде:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x P(x) \frac{dy}{dx} + Q(x) y = 0, \quad (3.43)$$

где

$$P(x) = \frac{2(z+1)e^2-1}{e^2-1},$$

$$Q(x) = \frac{z(z+1)e^2+e^2}{e^2-1}. \quad (3.44)$$

Как указывалось во второй части, функция $J_n^*(z, e)$ будет одним из правильных интегралов этого уравнения. Очевидно, что функция $J_n^*(z, e)$ также будет правильным интегралом того же уравнения. А так как $J_n^*(z, e)$ и $J_n^*(z, e)$ независимы, то мы можем написать общий интеграл этого уравнения в виде:

$$J = C_1 J_n^*(z, e) + C_2 J_n^*(z, e), \quad (3.45)$$

где C_1 и C_2 суть произвольные постоянные. Очевидно, что функция

$$J_n(z, e) = J_n^*(z, e) + J_n^*(z, e)$$

будет также интегралом этого уравнения и будет удовлетворять тем же рекуррентным соотношениям.

Дадим в заключение выражение для $J_n(z, e)$ наиболее удобное для практического употребления. Определяя $J_n(z, e)$ по формуле (3.25) как вычет подынтегральной функции относительно точки $z = 0$, будем иметь

$$J_n(z, e) = \frac{(-1)^{n-1} 2^n}{e^2 (n-2)!} \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k \frac{(n-k)(n-k-1) \dots (k+1)}{(n-2-2k)!} z(z+1) \dots (n-k-1) \frac{e^2}{2^k}, \quad (3.46)$$

где $\lambda_1 = \frac{n-1}{2}$ или $\lambda_1 = \frac{n-2-1}{2}$, в зависимости от того, какое из этих двух чисел целое.

Как видно из формулы (3.46) для случая $e > 1$, $J_n(z, e)$ будет не только алгебраической, но и рациональной функцией экцентриситета, и представляет собой многочлен, расположенный по отрицательным степеням e .

§ 3. Разложение функции $\Psi_*(e)$ по степеням приращения эксцентриситета для случая эллиптического движения

Для того, чтобы получить разложение главной части пертурбационной функции $\frac{1}{r_j}$ по степеням приращения эксцентриситета $(e - e_0)$ в случае эллиптического движения, нам нужно разложить по этим приращениям функции $\Psi_*(e) = F_*(e) + \Phi_*(e)$ и $\cos nE$. Разложение для функции $\Psi_*(e)$ получается чрезвычайно просто. Из формулы (2.58) и (2.68) второй части мы имеем:

$$F_*(e) = \sum_{s=0}^p \sum_{r=0}^s G_{sr}^{(1)} e^{2s-2r} J_r^*(k+p-\lambda-1, e),$$

$$\Phi_*(e) = n \sqrt{1-e^2} \sum_{s=0}^{p-1} \sum_{r=0}^s \tilde{G}_{sr}^{(1)} \frac{e^{2s-2r}}{(x+p-\lambda-1)} J_r^*(k+p-\lambda-1, e), \quad (3.47)$$

где $G_{sr}^{(1)}$ есть числовой коэффициент, определяемый формулой (2.57) и (2.69) II части. Суммирование по λ ведется до δ , где δ принимает значения:

$$\delta = \frac{3p-2r}{2} \text{ или } \delta = \frac{3p-2r-1}{2}, \text{ если } r > \frac{p}{2} \text{ или } r > \frac{p-1}{2}$$

и $\delta = p$, если $r \leq \frac{p}{2}$ или $r \leq \frac{p-1}{2}$, $p = -k, (-k+2), \dots, k$.

к как и прежде обозначает

$$k+2l+1, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots, l=0, 1, 2, \dots$$

Разложим функцию $\Psi_*(e)$ в ряд Тейлора:

$$\Psi_*(e) = \Psi_*(e_0) + (e - e_0) \Psi'_*(e_0) + \frac{(e - e_0)^2}{2!} \Psi''_*(e_0) + \dots + \frac{(e - e_0)^k}{k!} \Psi^{(k)}_*(e_0) + \dots \quad (3.48)$$

Коэффициент общего члена в формуле (3.48) равен s_1 -той производной от функции $\Psi_*(e)$ при $e = e_0$.

$$\Psi^{(s_1)}_*(e_0) = \frac{d^{s_1}}{de^{s_1}} \left[\sum_{s=0}^p \sum_{r=0}^s G_{sr}^{(1)} e_0^{2s-2r} J_r^*(k+p-\lambda, e_0) + \right. \\ \left. + n \sqrt{1-e_0^2} \sum_{s=0}^{p-1} \sum_{r=0}^s \tilde{G}_{sr}^{(1)} \frac{e_0^{2s-2r}}{(x+p-\lambda-1)} J_r^*(k+p-\lambda-1, e_0) \right] = \\ = \sum_{s=0}^p \sum_{r=0}^s G_{sr}^{(s_1)} \frac{d^{s_1}}{de^{s_1}} [e_0^{2s-2r} J_r^*(k+p-\lambda, e_0)] + \\ + n \sum_{s=0}^{p-1} \sum_{r=0}^s \tilde{G}_{sr}^{(s_1)} \frac{1}{x+p-\lambda-1} \cdot \frac{d^{s_1}}{de^{s_1}} [V \sqrt{1-e_0^2} J_r^*(k+p-\lambda-1, e_0)]. \quad (3.49)$$

Производная от функции $e_0^{2s-2r} J_r^*(k+p-\lambda, e_0)$ может быть получена либо при помощи ряда

$$\frac{d^{s_1}}{de^{s_1}} \sum_{r=0}^s \frac{(p+x-\lambda)(p+x-\lambda+1) \dots (p+x-\lambda+n+2v-1)}{(n+v)! v! 2^{n+2v}} \cdot e_0^{2s+2v-2r} = \\ = \sum_{r=0}^s \frac{(p+x-\lambda)(p+x-\lambda+1) \dots (p+x-\lambda+n+2v-1)}{(n+v)! v! 2^{n+2v}} (n+2s+2v-p)(n+2s+ \\ + 2v-p-1) \dots (n+2s+2v-p-s_1+1) e_0^{2s+2v-2r-s_1}, \quad (3.50)$$

либо в конечном виде

$$\frac{d^{s_1}}{de^{s_1}} [e_0^{2s-2r} J_r^*(k+p-\lambda, e_0)] = \\ = \frac{e_0^{2s-2r-p}}{[(p+x-\lambda-1)]^p} \sum_{\gamma=0}^{p+s-1-\lambda} \frac{(p+x-\lambda-1)(p+x-\lambda-2) \dots (p+x-\lambda-\gamma)}{\gamma!} \times \\ \times (n+p+x-\lambda-1)(n+p+x-\lambda-2) \dots (n+p+x-\lambda-\gamma) \cdot 2^{s+1} \times \\ \times (2p+2x-2\lambda-\gamma-2)! \frac{[1-V \sqrt{1-e_0^2}]^{n+p+s-1-\lambda-1}}{[V \sqrt{1-e_0^2}]^{2p+2x-2\lambda-\gamma-1}}. \quad (3.51)$$

Подставим теперь выражение $\Psi_*(e)$, даваемое формулой (3.48) в разложение главной части пертурбационной функции. Мы получим искомое разложение $\frac{1}{r_j}$ в виде ряда по степеням $(e - e_0)$ и кратным эксцентрисической аномалии E в виде:

$$\frac{1}{r_j} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} b_{kl}^{(1)} \sum_{r=-k}^k A_{r,r}^{(1)} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{s_1=0}^{\infty} \Psi^{(s_1)}_*(e_0) \frac{(e - e_0)^{s_1}}{s_1!} \cos nE \cdot \cos(p\alpha + q\zeta l + ri). \quad (3.52)$$

Здесь $b_{kl}^{(1)}$ есть l -тый член коэффициента Лапласа $b_{kl}^{(1)}$, a — большая полуось оскулирующей орбиты, $A_{r,r}^{(1)}$ те же коэффициенты, которые фигурировали в I и II частях настоящей работы, т. е. коэффициенты Фурье в разложении $\cos k\theta$ по кратным углам элементов ν, ω, Ω, i .

Во II части нами было получено разложение главной части пертурбационной функции по степеням эксцентриситета и косинусам углов кратных эксцентрисической аномалии. Там было указано, что оно может иметь самостоятельное значение, т. е. может применяться в тех же задачах небесной механики, в которых применяется разложение по кратным средней аномалии, например, при вычислении возмущений. Разложение по эксцентрисической аномалии может иметь даже некоторое преимущество, потому что, хотя затем и придется определять E как функцию средней аномалии M при помощи рядов, но зато структура разложения $\frac{1}{r_j}$ по эксцентрисической аномалии значительно проще, чем структура аналогичных разложений по средней аномалии. В данном случае при разложении величин $\frac{1}{r_j}$ по степеням приращения эксцентриситета $(e - e_0)$, это преимущество в значительной мере уменьшится за счет того, что мы получаем уже не многочлен по $\cos nE$, а бесконечный ряд. Для практических приложений неудобно использовать разложение $\frac{1}{r_j}$ в виде (3.52), в котором имеется двойная

зависимость от эксцентриситета как через посредство $\cos nE$, так и прямо через посредство $(e - e_0)$. Поэтому в следующем параграфе мы займемся разложением $\cos nE$ по степеням $(e - e_0)$.

§ 4. Разложение $\cos nE$ по степеням приращения эксцентриситета $(e - e_0)$

Чтобы получить разложение $\cos nE$ по степеням $(e - e_0)$,¹ воспользуемся рядом Лагранжа. Как известно, ряд Лагранжа для уравнения

$$y = x + \varepsilon \varphi(y) \quad (3.53)$$

даст разложение по степеням малого параметра ε того корня уравнения (3.53), который обращается в x при $\varepsilon = 0$.

Связь между эксцентрисической и средней аномалиями дается, как известно, уравнением Кеплера:

$$E = M + e \sin E. \quad (3.54)$$

При помощи уравнения Кеплера получаются разложения в ряд Лагранжа по степеням e эксцентрисической аномалии E и ее функций.

Чтобы получить разложение эксцентрисической аномалии E и ее функций по степеням приращения эксцентриситета $(e - e_0)$, рассмотрим два эллиптических движения. Одно из этих движений будет движением по эллипсу, имеющему эксцентриситет e , большую полуось a и момент прохождения через перигелий τ , а другое — движением по эллипсу, имеющему ту же полуось a и тот же момент прохождения через перигелий τ , а эксцентриситет e_0 . Назовем первое движение, соответствующее элементам (a, e, τ) , основным, а движение, определяемое элементами (a, e_0, τ) , — смежным движением. У этих двух движений, очевидно, одновременные значения средних аномалий будут одинаковы, а одновременные значения эксцентрисических аномалий будут различны.

Напишем два уравнения Кеплера для обоих движений:

$$\begin{aligned} E &= M + e \sin E, \\ E_0 &= M + e_0 \sin E_0. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Образум разность

$$E - E_0 = e \sin E - e_0 \sin E_0. \quad (3.56)$$

Прибавляя и вычитая в правой части величину $e_0 \sin E$ и вводя обозначения

$$\begin{aligned} \psi(E) &= \frac{\sin E - \sin E_0}{E - E_0}, \\ \Phi(E) &= \frac{\sin E}{1 - e_0 \psi(E)}, \end{aligned} \quad (3.57)$$

приведем уравнение (3.56) к виду:

$$E = E_0 + (e - e_0) \Phi(E). \quad (3.58)$$

Пользуясь рядом Лагранжа, мы получим разложение по степеням малого параметра $(e - e_0)$ того корня уравнения (3.58), который обращается в E_0 при $e = e_0$.

Ряд Лагранжа для уравнения (3.53) имеет вид:

$$\begin{aligned} f(y) &= f(x) + \varepsilon \varphi(x) f'(x) + \frac{\varepsilon^2}{2!} \frac{d}{dx} [\varphi^2(x) f'(x)] + \dots + \\ &+ \frac{\varepsilon^k}{k!} \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} [\varphi^k(x) f'(x)] + \dots \end{aligned} \quad (3.59)$$

¹ В этом параграфе при получении уравнения, связывающего величинами E и $(e - e_0)$, мы используем метод Н. А. Мосеева (1936), при помощи которого мы получим первые члены разложения в ряд Лагранжа величин E , $\sin E$, $\cos E$.

Чтобы получить разложение по степеням $(e - e_0)$ корня уравнения (3.58), положим

$$y = E, \quad x = E_0, \quad \varepsilon = (e - e_0),$$

$$f(y) = \cos nE, \quad f(x) = \cos nE_0, \quad \varphi(x) = \Phi(E) = \frac{\sin E}{1 - e_0 \cos E_0}.$$

Ряд Лагранжа в этом случае будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \cos nE &= \cos nE_0 - n(e - e_0) \frac{\sin E_0}{(1 - e_0 \cos E_0)} \sin nE_0 - n \frac{(e - e_0)^2}{2!} \frac{d}{dE_0} \left[\frac{\sin^2 E_0 \sin nE}{(1 - e_0 \cos E_0)^2} \right] - \\ &- \dots - n \frac{(e - e_0)^{k-1}}{(k-1)!} \frac{d^{k-2}}{dE_0^{k-2}} \left[\frac{\sin^k E_0 \sin nE}{(1 - e_0 \cos E_0)^k} \right] - \dots \end{aligned} \quad (3.60)$$

Мы хотим получить разложение для $\cos nE$ по степеням $(e - e_0)$ и в ряд Фурье по кратным E_0 . Для этого разложим предварительно величину, стоящую в квадратных скобках, в правой части формулы (3.60), в ряд Фурье по синусам и косинусам углов кратных E_0 .

Рассмотрим величину

$$\frac{\sin^k E_0 \sin nE_0}{(1 - e_0 \cos E_0)^k}. \quad (3.61)$$

Это периодическая функция E_0 , удовлетворяющая условиям Дирихле. Она будет четной функцией E_0 , в случае если k нечетное, для k четного она будет нечетной функцией E_0 . Следовательно, выражение (3.61) может быть разложено в ряд Фурье, в первом случае по косинусам, а во втором — по синусам E_0 . Коэффициенты этих разложений, как ясно из самого вида функции (3.61), будут некоторыми комбинациями функций $J_n^*(x, e)$.

Для k нечетного мы получим разложение:

$$\frac{\sin^k E_0 \sin nE_0}{(1 - e_0 \cos E_0)^k} = (-1)^{\frac{k-1}{2}} \sum_{s=0}^{\infty} I_{n,s}^*(\tau, e_0) \cdot \cos \mu E_0. \quad (3.62)$$

Для k четного будем иметь:

$$\frac{\sin^k E_0 \sin nE_0}{(1 - e_0 \cos E_0)^k} = (-1)^{\frac{k}{2}} \sum_{s=0}^{\infty} I_{n,s}^*(\tau, e_0) \cdot \sin \mu E_0. \quad (3.63)$$

Величинами $I_{n,s}^*(\tau, e_0)$ и $\tilde{I}_{n,s}^*(\tau, e_0)$ как коэффициенты ряда Фурье определяются формулами:

$$\begin{aligned} I_{n,s}^*(\tau, e_0) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^k E_0 \sin nE_0 \sin \mu E_0}{(1 - e_0 \cos E_0)^k} dE_0 = \\ &= \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{2^{k-1}} \sum_{\lambda=0}^{\frac{k-1}{2}} (-1)^{\frac{\sigma(\sigma-1)}{2}} \dots \frac{(\sigma-\lambda+1)}{\lambda!} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\sigma-2\lambda) E_0 \sin nE_0 \sin \mu E_0}{(1 - e_0 \cos E_0)^{\sigma}} dE_0 = \\ &= \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{2^{k-1}} \sum_{\lambda=0}^{\frac{k-1}{2}} (-1)^{\frac{\sigma(\sigma-1)}{2}} \dots \frac{(\sigma-\lambda+1)}{\lambda!} \int_0^{2\pi} \frac{[\sin(n+\sigma-2\lambda) E_0 + \sin(n-\sigma+2\lambda) E_0]}{(1 - e_0 \cos E_0)^{\sigma}} \sin \mu E_0 dE_0 = \\ &= \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{2^{k-1}} \sum_{\lambda=0}^{\frac{k-1}{2}} (-1)^{\frac{\sigma(\sigma-1)}{2}} \dots \frac{(\sigma-\lambda+1)}{\lambda!} \int_0^{2\pi} [\cos(\mu - n - \sigma + 2\lambda) E_0 - \end{aligned}$$

$$-\cos(\mu+n+\sigma-2\lambda)E_0+\cos(\mu-n+\sigma-2\lambda)E_0-\cos(\mu+n-\sigma+2\lambda)E_0\frac{dE_0}{(1-e_0\cos E_0)^2}= \\ =\frac{(-1)^{\frac{\sigma}{2}}}{2^{\frac{\sigma}{2}}}\sum_{\lambda=0}^{\frac{\sigma}{2}}(-1)^{\frac{\sigma}{2}-\lambda}\frac{\sigma(\sigma-1)\dots(\sigma-\lambda+1)}{\lambda!}[J_{\mu-n+\sigma+2\lambda}(\sigma, e_0)-J_{\mu+n+\sigma+2\lambda}(\sigma, e_0)+ \\ +J_{\mu-n+\sigma-2\lambda}(\sigma, e_0)-J_{\mu+n+\sigma-2\lambda}(\sigma, e_0)]. \quad (3.64)$$

Если обозначить

$$J_{\mu}^{(\sigma)}(\sigma, e_0) = \frac{1}{2^{\frac{\sigma}{2}}} \sum_{\lambda=0}^{\frac{\sigma}{2}} \frac{\sigma(\sigma-1)\dots(\sigma-\lambda+1)}{\lambda!} J_{\mu+2\lambda}(\sigma, e_0)$$

и

$$J_{\mu}^{(-\sigma)}(\sigma, e_0) = \frac{1}{2^{\frac{\sigma}{2}}} \sum_{\lambda=0}^{\frac{\sigma}{2}} \frac{\sigma(\sigma-1)\dots(\sigma-\lambda+1)}{\lambda!} J_{\mu-2\lambda}(\sigma, e_0), \quad (3.65)$$

то

$$I_{\mu, \sigma}(\sigma, e_0) = (-1)^{\frac{\sigma}{2}} [J_{\mu}^{(+\sigma)}(\sigma, e_0) - J_{\mu}^{(-\sigma)}(\sigma, e_0) + J_{\mu}^{(-\sigma)}(\sigma, e_0) - J_{\mu}^{(+\sigma)}(\sigma, e_0)]. \quad (3.66)$$

Каждая из величин, стоящих в квадратных скобках, зависит от трех индексов: $\mu+n$, σ , e_0 или $\mu-n$, σ , e_0 , поэтому для них могут быть составлены таблицы с тремя входами.

Совершенно аналогично получаем:

$$I_{\mu, \sigma}(\sigma, e_0) = (-1)^{\frac{\sigma-1}{2}} [J_{\mu}^{(+\sigma-1)}(\sigma, e_0) + J_{\mu}^{(-\sigma+1)}(\sigma, e_0) - J_{\mu}^{(-\sigma-1)}(\sigma, e_0) - J_{\mu}^{(+\sigma-1)}(\sigma, e_0)]. \quad (3.67)$$

Взяв теперь $(\sigma-1)$ -ую производную от функции (3.61) по E_0 , получим для σ четного:

$$\frac{d^{(\sigma-1)}}{dE_0^{(\sigma-1)}} \left[\frac{\sin^2 E_0 \sin n E_0}{(1-e_0 \cos E_0)^2} \right] = \sum_{\lambda=0}^{\frac{\sigma-2}{2}} (-1)^{\frac{\sigma-2}{2}-\lambda} I_{\mu, \sigma}(\sigma, e_0) \gamma^{\lambda-1} \cos \gamma E_0, \quad (3.68, a)$$

и для σ нечетного:

$$\frac{d^{(\sigma-1)}}{dE_0^{(\sigma-1)}} \left[\frac{\sin^2 E_0 \sin n E_0}{(1-e_0 \cos E_0)^2} \right] = \sum_{\lambda=0}^{\frac{\sigma-1}{2}} (-1)^{\frac{\sigma-1}{2}-\lambda} I_{\mu, \sigma}(\sigma, e_0) \gamma^{\lambda-1} \cos \gamma E_0. \quad (3.68, b)$$

Подставляя разложения (3.68, a) и (3.68, b) в формулу (3.60), получим разложение $\cos nE$ в виде:

$$\cos nE = \cos nE_0 + \sum_{\sigma=0}^{\infty} (-1)^{\frac{\sigma}{2}} \frac{(e-e_0)^{\frac{\sigma}{2}}}{\sigma!} \sum_{\mu=0}^{\infty} \mu^{\sigma-1} I_{\mu, \sigma}(\sigma, e_0) \cos \gamma E_0. \quad (3.69)$$

$I_{\mu, \sigma}(\sigma, e_0)$ для σ четного определяется формулой (3.68, a), а для σ нечетного — формулой (3.68, b).

§ 5. Разложение главной части пертурбационной функции по степеням $(e-e_0)$ в случае эллиптического движения

Подставим теперь разложение $\cos nE$ по степеням $(e-e_0)$ в формулу (3.52) для разложения $\frac{1}{r_j}$. Это даст нам

$$\frac{1}{r_j} = \frac{2}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} b_{k,l}^{(j)} \sum_{p,q,r=-k}^k A_{pqr}^{(j)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{d_s^{(j)}}{de_0^s} \Psi_s(e_0) \frac{(e-e_0)^s}{s!} \times \\ \times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(e-e_0)^m}{m!} \sum_{\mu=0}^{\infty} \mu^{s+m-1} I_{\mu, s}(\sigma, e_0) \cos \gamma E_0 \cos(p\omega + q\Omega + r\tau). \quad (3.70)$$

Введем обозначение

$$\frac{\mu^{s+m-1}}{s!m!} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{d_s^{(j)}}{de_0^s} \Psi_s(e_0) I_{\mu, s}(\sigma, e_0) = \gamma_{\mu, s, m}^{(j)}(e_0). \quad (3.71)$$

Развернем суммы по s и m и перегруппируем члены. Мы получим:

$$\sum_{s=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (e-e_0)^{s+m+1} \gamma_{\mu, s, m}^{(j)}(e_0) = \\ = \sum_{r=0}^{\infty} (e-e_0)^r [\gamma_{\mu, 0, r}^{(j)}(e_0) + (e-e_0) \gamma_{\mu, 1, r-1}^{(j)}(e_0) + (e-e_0)^2 \gamma_{\mu, 2, r-2}^{(j)}(e_0) + \dots] = \\ = [\gamma_{\mu, 0, 0}^{(j)}(e_0) + (e-e_0) \gamma_{\mu, 1, 0}^{(j)}(e_0) + (e-e_0)^2 \gamma_{\mu, 2, 0}^{(j)}(e_0) + \dots] + \\ + [(e-e_0) \gamma_{\mu, 0, 1}^{(j)}(e_0) + (e-e_0)^2 \gamma_{\mu, 1, 1}^{(j)}(e_0) + (e-e_0)^3 \gamma_{\mu, 2, 1}^{(j)}(e_0) + \dots] + \\ + [(e-e_0)^2 \gamma_{\mu, 0, 2}^{(j)}(e_0) + (e-e_0)^3 \gamma_{\mu, 1, 2}^{(j)}(e_0) + (e-e_0)^4 \gamma_{\mu, 2, 2}^{(j)}(e_0) + \dots] + \\ + \dots = \\ = \gamma_{\mu, 0, 0}^{(j)}(e_0) + (e-e_0) [\gamma_{\mu, 1, 0}^{(j)}(e_0) + \gamma_{\mu, 0, 1}^{(j)}(e_0)] + (e-e_0)^2 [\gamma_{\mu, 2, 0}^{(j)}(e_0) + \gamma_{\mu, 1, 1}^{(j)}(e_0) + \\ + \gamma_{\mu, 0, 2}^{(j)}(e_0)] + \dots = \sum_{s=0}^{\infty} (e-e_0)^s \sum_{\mu=0}^{\infty} \gamma_{\mu, s, s}^{(j)}(e_0). \quad (3.72)$$

Подставляя теперь выражение (3.72) в формулу (3.70), получим окончательно

$$\frac{1}{r_j} = \frac{2}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} b_{k,l}^{(j)} \sum_{p,q,r=-k}^k A_{pqr}^{(j)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{d_s^{(j)}}{de_0^s} \Omega_{\mu, s}(e_0) (e-e_0)^s \cos(\mu E_0 + p\omega + q\Omega + r\tau), \quad (3.73)$$

где положено

$$\Omega_{\mu, s}(e_0) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \gamma_{\mu, s, s}^{(j)}(e_0). \quad (3.74)$$

§ 6. Разложение главной части пертурбационной функции в ряд Фурье по аргументам $(\sigma+\omega)$, Ω , i в случае гиперболического движения

Рассмотрим теперь задачу разложения пертурбационной функции в случае гиперболического движения.

Пертурбационная функция определяется формулой:

$$R = k^2 m \left(\frac{1}{r_j} - \frac{r \cos \theta}{a_j^2} \right), \quad (3.75)$$

Ее главная часть имеет вид

$$\frac{1}{r_j} = (a_j^2 + r^2 - 2a_j r \cos \theta)^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.76)$$

где a_j — расстояние от Солнца до Юпитера, r — радиус-вектор возмущаемой точки, θ — угол, образованный направлением из Солнца на Юпитер и астероид, m_j — масса Юпитера.

Разлагая $\frac{1}{r_j}$ в ряд Фурье по $\cos k\theta$, получим

$$\frac{1}{r_j} = \frac{1}{2r} \sum_{k=0}^{\infty} B_k^{(j)} \cos k\theta, \quad r > a_j, \quad (3.77)$$

$$\frac{1}{r_j} = \frac{1}{2a_j} \sum_{k=0}^{\infty} B_k^{(j)} \cos k\theta, \quad r < a_j,$$

где $B_k^{(j)}$, так же как и Π части, представляют собой однородные функции относительно a_j и r , образующиеся в соответствующие коэффициенты Лапласа, если положить $r = a$. Они определяются формулой:

$$\frac{1}{2} B_k^{(j)} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k+2l+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2k+2l)} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2l-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2l} (a)^{k+l}, \quad (3.78)$$

$$a = \frac{a_j}{r}, \quad a_j < r \quad \text{или} \quad a = \frac{r}{a_j}, \quad a_j > r.$$

$\cos \theta$, являющийся стороной сферического треугольника $\triangle P J F$, определяется формулой:

$$\cos \theta = \cos(v + \omega) \cos(l_j - \Omega) + \sin(v + \omega) \sin(l_j - \Omega) \cos i,$$

см. рис. 5.

Разлагая $\cos k\theta$ в трехкратный ряд Фурье по аргументам $v + \omega$, $\Omega = l_j - \Omega$, i , будем иметь

$$\cos k\theta = \sum_{p,q,r=-k}^k A_{pqr}^{(k)} \cos[p(v + \omega) + q\Omega + ri] \quad (3.79)$$

или

$$\cos k\theta = \sum_{p,q,r=-k}^k A_{pqr}^{(k)} [\cos p v \cos(p\omega + q\Omega + ri) - \sin p v \sin(p\omega + q\Omega + ri)]. \quad (3.80)$$

Разложения, полученные до сих пор и определяемые формулами (3.77) и (3.80), тождественны аналогичным разложениям эллиптического движения. Чтобы получить далее выражения для $\cos k\theta$ и $\frac{1}{r_j}$ через величину u , являющуюся для гиперболического движения аналогом эксцентрической аномалии, нужно получить разложения для величин $\frac{\sin p v}{p+1}$ и $\frac{\cos p v}{p+1}$ по кратным u . $r = \frac{r}{a}$, a — большая полуось орбиты возмущаемого тела, r — радиус вектор возмущаемой точки.

450

§ 7. Разложение произведения степени радиуса вектора на косинус угла кратного истинной аномалии в случае гиперболического движения

Если мы заменим в уравнении эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ y на iy , то получим уравнение гиперболы. Мы можем формально удовлетворить этому уравнению таким же способом, как в случае движения эллиптического, т. е. положив:

$$x = -a(\cos E - e), \quad y = -a\sqrt{1-e^2} \sin E \quad (3.81)$$

или

$$x = -a(-\cos E - e), \quad y = a\sqrt{1-e^2} \sin E.$$

Так как в этом случае $e > 1$, то $\sin E$ будет чисто мнимой величиной, а $\cos E$ останется действительным (x и y мы считаем действительными). E в этом случае



Рис. 5.

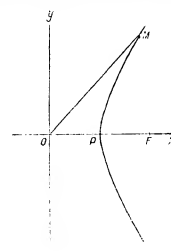


Рис. 6.

может быть комплексным: $E = k\pi + iu$. Давая k все возможные целочисленные значения, $k = 0, 1, 2, \dots$ мы будем получать наложенные друг на друга гиперболы. А так как в уравнение (3.81) E входит только под знаком тригонометрических функций, то x и y определяются однозначно. Мы можем поэтому положить $k=0$ и считать $E=iu$, где i действительно.

Геометрически u представляет собой площадь гиперболического сектора OMP равнобочной гиперболы с центром в начале координат (рис. 6). В этом случае по величине $u = \ln(x-y)$, x и y здесь прямоугольные координаты точки M .

Формулы для координат гиперболического движения мы могли бы получить, не прибегая к указанной выше замене переменного $E=iu$. Но, говоря уже о том, что геометрический путь сложнее, мы везде в этой работе предпочитаем аналитический метод как более строгий.

Подставляя $E=iu$ в уравнение (3.81), получим:

а) для ветви гиперболы вогнутой к Солнцу

$$\cos v = \frac{\cosh u - e}{1 - e \cosh u}, \quad \sin v = -\sqrt{e^2 - 1} \frac{\sinh u}{1 - e \cosh u}, \quad (3.82)$$

$$\frac{r}{a} = -1 + e \cosh u;$$

451

6) для ветви гиперболы выпуклой к Солнцу

$$\cos v = \frac{ch u + 1}{1 + e ch u}, \quad \sin v = \sqrt{e^2 - 1} \frac{sh u}{1 + e ch u}, \quad (3.83)$$

$$\frac{r}{a} = 1 + e ch u.$$

Рассмотрим сначала случай вогнутой к Солнцу ветви гиперболы. Подставив выражение для радиус-вектора r в формулу (3.78), получим

$$\frac{1}{2} B_1^{(k)} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k + 2l + 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2k + 2l)} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2l - 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2l} \left(\frac{a}{u} \right)^{k+2l} \frac{(-1)^k}{(1 - e ch u)^{k+2l}}. \quad (3.84)$$

Тогда

$$\frac{1}{r^2} = \frac{2}{a} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{p,l} A_{p,l}^{(k)} \frac{\cos pv \cos (p\omega + q_2^2 + r) - \sin pv \sin (p\omega + q_2^2 + r)}{(1 - e ch u)^{k+2l+1}}. \quad (3.85, a)$$

Итак, нам надо получить разложение для величин

$$\frac{\cos pv}{(1 - e ch u)^x} \cdot \frac{\sin pv}{(1 - e ch u)^y}, \quad x = k + 2l + 1. \quad (3.85, b)$$

По формулам Эйлера имеем для величин $\cos pv$ и $\sin pv$

$$\cos pv = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{2^{p-2m-1} p(p-m-1)(p-m-2) \dots (p-2m+1)}{m!} \cos^{p-2m} v,$$

$$x_1 = \frac{p}{2} \text{ или } x_1 = \frac{p-1}{2}.$$

$$\sin pv = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{2^{p-2m-1} (p-m-1)(p-m-2) \dots (p-2m)}{m!} \cos^{p-2m-1} v \cdot \sin v. \quad (3.86)$$

$$x_2 = \frac{p-1}{2} \text{ или } x_2 = \frac{p-2}{2}.$$

Подставляя в формулу (3.86) значения $\cos^{p-2m} v$ и $\sin v$ из формулы (3.82), получим

$$\frac{\cos pv}{(1 - e ch u)^x} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{2^{p-2m-1} p(p-m-1)(p-m-2) \dots (p-2m+1)}{m!} \cdot \frac{(ch u - e)^{p-2m-1}}{(1 - e ch u)^{x+p-2m}} sh u. \quad (3.87)$$

и

$$\frac{\sin pv}{(1 - e ch u)^y} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{2^{p-2m-1} (p-m-1)(p-m-2) \dots (p-2m)}{m!} \cdot \frac{(ch u - e)^{p-2m-1}}{(1 - e ch u)^{y+p-2m}} sh u. \quad (3.88)$$

Разлагая величину $\frac{(ch u - e)^{p-2m-1}}{(1 - e ch u)^{x+p-2m}}$ на элементарные дроби, получим

$$\begin{aligned} \frac{\cos pv}{(1 - e ch u)^x} &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{2^{p-2m-1} p(p-m-1)(p-m-2) \dots (p-2m+1)}{m!} \times \\ &\times \sum_{j=0}^{p-2m-1} (-1)^j \frac{(p-2m)(p-2m-1) \dots (p-2m-j+1)(1 - e^2)^{p-2m-j}}{j! e^{p-2m} (1 - e ch u)^{x+p-2m-j}} \end{aligned} \quad (3.89)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\sin pv}{(1 - e ch u)^y} &= -\sqrt{e^2 - 1} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{2^{p-2m-1} (p-m-1)(p-m-2) \dots (p-2m)}{m!} \times \\ &\times \sum_{j=0}^{p-2m-1} (-1)^j \frac{(p-2m-1)(p-2m-2) \dots (p-2m-j)(1 - e^2)^{p-2m-j-1}}{j! e^{p-2m} (1 - e ch u)^{y+p-2m-j}} \cdot sh u. \end{aligned} \quad (3.90)$$

Величина $\frac{1}{(1 - e ch u)^{x+p-2m-j}}$, как было рассмотрено в § 1, может быть разложена в ряд по степеням z , где $z = e^{-u}$. Это разложение будет иметь вид:

$$\frac{1}{(1 - e ch u)^{x+p-2m-j}} = \sum_{n=0}^{\infty} J_n(x+p-2m-j, e) (ch nu - sh nu). \quad (3.91)$$

Следовательно,

$$\frac{\cos pv}{(1 - e ch u)^x} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{F}_n(e) (ch nu - sh nu), \quad (3.92)$$

где $n_i = x + p - 2m - j$, а $\bar{F}_n(e)$ определяется формулой:

$$\bar{F}_n(e) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{2^{p-2m-1} p(p-m-1)(p-m-2) \dots (p-2m+1)}{m!} \times$$

$$\times \sum_{j=0}^{p-2m-1} (-1)^j \frac{(p-2m)(p-2m-1) \dots (p-2m-j+1)(1 - e^2)^{p-2m-j}}{j! e^{p-2m}} J_n(p-2m+x-j, e). \quad (3.93)$$

Что касается величин $\frac{sh u}{(1 - e ch u)^x}$, то очевидно, что она также может быть разложена в ряд по степеням z . Этот ряд может быть получен либо при помощи методов, аналогичных методам второй части, либо непосредственным умножением ряда (3.92) на $sh u$. Этот ряд будет сходиться в той же области $|z| < 1$ или $0 \leq u < \infty$. В области $z > 1$ получим разложение по отрицательным степеням z . Оба эти разложения так же, как разложение для $\frac{1}{(1 - e ch u)^x}$, можно объединить в одно:

$$\frac{sh u}{(1 - e ch u)^x} = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(e) (ch nu - sh nu), \quad (3.94)$$

где $n_2 = x - 1$, а вместо u берется его абсолютное значение.

Коэффициенты $Q_n(n)$ ряда (3.94) проще всего можно получить, заметив, что

$$\frac{sh u}{(1 - e ch u)^x} = \frac{1}{e} \cdot \frac{d}{du} \left[\frac{1}{(1 - e ch u)^{x-1}} \right] \frac{1}{(x-1)}. \quad (3.95)$$

Получив разложение для величин $\frac{1}{(1 - e ch u)^{x-1}}$

$$\frac{1}{(1 - e ch u)^{x-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} J_n(x-1, e) (ch nu - sh nu) \quad (3.96, a)$$

и проинтегрировав его почленно, получим¹

$$\frac{\sin pu}{(1-e \operatorname{ch} u)^2} = -\frac{n}{e(e-1)} \sum_{m=0}^{\infty} \bar{f}_m(x-1, e) (\operatorname{ch} nu - \operatorname{sh} nu). \quad (3.96, 6)$$

Пологая $x = x + p - 2m - j$ и подставляя разложение (3.96, 6) в формулу (3.90), получим разложение для $\frac{\sin pu}{(1-e \operatorname{ch} u)^2}$:

$$\frac{\sin pu}{(1-e \operatorname{ch} u)^2} = \sum_{m=0}^{\infty} \bar{\Phi}_m(e) (\operatorname{ch} nu - \operatorname{sh} nu), \quad (3.97)$$

где $\bar{\Phi}_m(e)$ определяется формулой:

$$\bar{\Phi}_m(e) = n \sqrt{e^2 - 1} \sum_{j=0}^{p-2m-1} (-1)^j \frac{2^{p-2m-1} (p-m-1)(p-m-2) \dots (p-2m)}{m!} \times \\ \times \sum_{j=0}^{p-2m-1} (-1)^j \frac{(p-2m-1)(p-2m-2) \dots (p-2m-j)}{j! (p-2m+x-j-1) e^{p-2m}} \bar{f}_m(x+p-2m-j-1, e). \quad (3.98)$$

Таким образом, разложение (3.97) для $\frac{\sin pu}{(1-e \operatorname{ch} u)^2}$ будет отличаться от разложения (3.92) для $\frac{\cos pu}{(1-e \operatorname{ch} u)^2}$ в случае гиперболического движения только коэффициентом при соответствующей степени $z^m = (\operatorname{ch} nu - \operatorname{sh} nu)$, который является функцией эксцентриситета.

§ 8. Разложение главной части пертурбационной функции по степеням приращения эксцентриситета для случая движения по вогнутой к Солнцу ветви гиперболы

Мы имеем

$$\frac{\cos k\theta}{(1-e \operatorname{ch} u)^2} = \sum_{p, q, r=-\infty}^{\infty} A_{pqr}^{(k)} [\cos pu \cos(p\omega + q\bar{\omega} + r\tau) - \sin pu \sin(p\omega + q\bar{\omega} + r\tau)] \frac{1}{(1-e \operatorname{ch} u)^2}. \quad (3.99)$$

Подставляя теперь вместо $\frac{\cos pu}{(1-e \operatorname{ch} u)^2}$ и $\frac{\sin pu}{(1-e \operatorname{ch} u)^2}$ их разложения, получим

$$\frac{\cos k\theta}{(1-e \operatorname{ch} u)^2} = \sum_{p, q, r=-\infty}^{\infty} A_{pqr}^{(k)} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \bar{F}_m(e) (\operatorname{ch} nu - \operatorname{sh} nu) \cos(p\omega + q\bar{\omega} + r\tau) - \right. \\ \left. - \bar{\Phi}_m(e) (\operatorname{ch} nu - \operatorname{sh} nu) \sin(p\omega + q\bar{\omega} + r\tau) \right]. \quad (3.100)$$

Подставив разложение для $\frac{\cos k\theta}{(1-e \operatorname{ch} u)^2}$ в формулу для $\frac{1}{r^2}$ пертурбационной функции, будем иметь

$$\frac{1}{r^2} = \frac{2}{a} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \sum_{l=0}^{\infty} b_{kl}^{(2)} \sum_{p, q, r=-\infty}^{\infty} A_{pqr}^{(k)} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \bar{F}_m(e) \cos(p\omega + q\bar{\omega} + r\tau) - \right. \\ \left. - \bar{\Phi}_m(e) \sin(p\omega + q\bar{\omega} + r\tau) \right] \cdot (\operatorname{ch} nu - \operatorname{sh} nu). \quad (3.101)$$

¹ Операция дифференцирования ряда (3.96, 6) не является законной, так как $\frac{d}{du} = e \frac{d}{de}$, а отсюда ряд (3.96, 6) является степенным, который, как известно, можно почленно дифференцировать только в области его сходимости.

Теперь нам остается, так же как в случае эллиптического движения, разложить функции $\bar{F}_m(e)$ и $\bar{\Phi}_m(e)$, $\operatorname{sh} nu$ и $\operatorname{ch} nu$ по степеням разности эксцентриситета. Разложение для функций $\bar{F}_m(e)$ и $\bar{\Phi}_m(e)$ получается так же, как и для эллипса. Именно:

$$\bar{F}_m(e) = \bar{F}_m(e_0) + (e - e_0) \bar{F}_m'(e_0) + \frac{(e - e_0)^2}{2!} \bar{F}_m''(e_0) + \dots, \quad (3.102)$$

где

$$\bar{F}_m^{(k)}(e_0) = \frac{d^k}{de^k} \sum_{j=0}^{p-2m-1} (-1)^j \frac{2^{p-2m-1} p(p-m-1)(p-m-2) \dots (p-2m+1)}{j! e_0^{p-2m}} \times \\ \times \sum_{j=0}^{p-2m-1} (-1)^j \frac{(p-2m)(p-2m-1) \dots (p-2m-j+1)}{j! e_0^{p-2m}} (1 - e_0)^{p-2m-j} \bar{f}_m(p-2m+x-j, e_0), \quad (3.103)$$

$$x_1 = \frac{p}{2} \text{ или } x_1 = \frac{p-1}{2}.$$

Разложение для $\bar{\Phi}_m(e)$ будет иметь вид:

$$\bar{\Phi}_m(e) = \bar{\Phi}_m(e_0) + (e - e_0) \bar{\Phi}_m'(e_0) + \frac{(e - e_0)^2}{2!} \bar{\Phi}_m''(e_0) + \dots, \quad (3.104)$$

$$\bar{\Phi}_m^{(k)}(e_0) = \frac{d^k}{de^k} n \sqrt{e_0^2 - 1} \sum_{j=0}^{p-2m-1} (-1)^j \frac{2^{p-2m-1} (p-m-1)(p-m-2) \dots (p-2m)}{j! e_0^{p-2m}} \times \\ \times \sum_{j=0}^{p-2m-1} (-1)^j \frac{(p-2m-1)(p-2m-2) \dots (p-2m-j)}{j! (p-2m+x-j-1)} (1 - e_0)^{p-2m-j-1} \bar{f}_m(x+p-2m-j-1, e_0),$$

$$x_2 = \frac{p-1}{2} \text{ или } x_2 = \frac{p-2}{2}.$$

Разложения для $\operatorname{ch} nu$ и $\operatorname{sh} nu$ получаются также аналогично разложениям $\cos nE$ и $\sin nE$ в эллиптическом движении. Именно, напомним два аналога уравнения Кеплера в гиперболическом движении, для основного и смежного движений.

$$u = -M + e \operatorname{sh} u, \quad u_0 = -M + e_0 \operatorname{sh} u_0, \quad M = ka^{-1/2} (t - t_0).$$

Обозначая разность и вводя обозначения

$$\Psi(u) = \frac{\operatorname{sh} u - \operatorname{sh} u_0}{u - u_0}, \quad (3.105)$$

$$\Phi(u) = \frac{\operatorname{ch} u}{1 - e_0 \Psi(u)}, \quad (3.106)$$

получим

$$u = u_0 + (e - e_0) \Phi(u). \quad (3.107)$$

Ряд Лагранжа для разложения $\operatorname{ch} nu$ по степеням $(e - e_0)$ в этом случае будет иметь вид:

$$\operatorname{ch} nu = \operatorname{ch} nu_0 + n \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(e - e_0)^m}{m!} \frac{d^{m-1}}{de^{m-1}} \left[\frac{\operatorname{sh}' u_0 \operatorname{sh} nu_0}{(1 - e_0 \operatorname{ch} u_0)^2} \right]. \quad (3.108)$$

Для разложения $\text{sh} \mu u$ ряд Лагранжа будет:

$$\text{sh} \mu u = \text{sh} \mu u_0 + n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(e - e_0)^k}{e!} \frac{d^{k-1}}{du_0^{k-1}} \left[\frac{\text{sh}^* u_0 \text{ch} \mu u_0}{(1 - e_0 \text{ch} u_0)^2} \right]. \quad (3.109)$$

Чтобы получить разложение главной части пертурбационной функции по степеням $(e - e_0)$, коэффициентами которых будут ряды синусов и косинусов углов кратных u , мы разложим сначала величины

$$\frac{\text{sh}^* u_0 \cdot \text{sh} \mu u_0}{(1 - e_0 \text{ch} u_0)^2} \quad \text{и} \quad \frac{\text{sh}^* u_0 \cdot \text{ch} \mu u_0}{(1 - e_0 \text{ch} u_0)^2}$$

в ряды по степеням $z = e^{-u}$, а затем возьмем от этих рядов соответствующие производимые. Эти ряды будут такого же типа, как и ряды, полученные в § 7 и будут сходиться для всех $0 \leq u < \infty$. Для получения таких разложений выразим сначала $\text{sh}^* u$ через гиперболические синусы и косинусы кратных углов. Эти выражения могут быть написаны в виде:

$$\text{sh}^* u_0 = \frac{1}{2^{s-1}} \sum_{\lambda=0}^s \frac{\sigma(\sigma-1) \dots (\sigma-\lambda+1)}{\lambda!} \text{ch}(\sigma-2\lambda) u_0 \quad (3.110)$$

для σ четного, причем последний член суммы в уравнении (3.110) должен быть разделен на два. Для σ нечетного $\text{sh}^* u_0$ может быть выражен через гиперболические синусы углов кратных по формуле:

$$\text{sh}^* u_0 = \frac{1}{2^{s-1}} \sum_{\lambda=0}^{s-1} \frac{\sigma(\sigma-1) \dots (\sigma-\lambda+1)}{\lambda!} \text{sh}(\sigma-2\lambda) u_0. \quad (3.111)$$

Разложение величин $\frac{1}{(1 - e_0 \text{ch} u_0)^2}$, согласно результатам § 7, может быть получено в виде:

$$\frac{1}{(1 - e_0 \text{ch} u_0)^2} = \sum_{\sigma=0}^{\infty} \tilde{f}_s(\sigma, e_0) (\text{ch} \mu u_0 - \text{sh} \mu u_0). \quad (3.112)$$

Тогда, разложение для

$$\frac{\text{sh}^* u_0 \cdot \text{sh} \mu u_0}{(1 - e_0 \text{ch} u_0)^2}$$

будет иметь следующий вид.

а) Для случая, когда σ четное, будет:

$$\begin{aligned} \frac{\text{sh}^* u_0 \text{sh} \mu u_0}{(1 - e_0 \text{ch} u_0)^2} &= \frac{1}{2^{s-2}} \sum_{\lambda=0}^s \frac{\sigma(\sigma-1) \dots (\sigma-\lambda+1)}{\lambda!} \text{ch}(\sigma-2\lambda) u_0 \text{sh} \mu u_0 \times \\ &\times \sum_{\sigma=0}^{\infty} \tilde{f}_s(\sigma, e_0) (\text{ch} \mu u_0 - \text{sh} \mu u_0) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2^{s-1}} \sum_{\lambda=0}^s \frac{\sigma(\sigma-1) \dots (\sigma-\lambda+1)}{\lambda!} \sum_{\sigma=0}^{\infty} \tilde{f}_s(\sigma, e_0) (\text{ch} \mu u_0 - \text{sh} \mu u_0) [\text{sh}(n+\sigma-2\lambda) u_0 + \text{sh}(n-\sigma+2\lambda) u_0] = \\ &= \frac{1}{2^s} \sum_{\lambda=0}^s \frac{\sigma(\sigma-1) \dots (\sigma-\lambda+1)}{\lambda!} \sum_{\sigma=0}^{\infty} \tilde{f}_s(\sigma, e_0) \{ -[\text{ch}(x+n+\sigma-2\lambda) u_0 - \text{sh}(x+n+\sigma-2\lambda) u_0] + \\ &+ [\text{ch}(x-n-\sigma+2\lambda) u_0 - \text{sh}(x-n-\sigma+2\lambda) u_0] - \\ &- [\text{ch}(x+n-\sigma+2\lambda) u_0 - \text{sh}(x+n-\sigma+2\lambda) u_0] + \\ &+ [\text{ch}(x-n+\sigma-2\lambda) u_0 - \text{sh}(x-n+\sigma-2\lambda) u_0] \}. \end{aligned} \quad (3.113)$$

Положим теперь $\alpha + n + \sigma = \mu$ и соберем члены с одинаковыми кратностями u_0 , мы получим:

$$\begin{aligned} \frac{\text{sh}^* u_0 \text{sh} \mu u_0}{(1 - e_0 \text{ch} u_0)^2} &= \frac{1}{2^{s+1}} \sum_{\lambda=0}^s \frac{\sigma(\sigma-1) \dots (\sigma-\lambda+1)}{\lambda!} \times \sum_{\mu=0}^{\infty} [-\tilde{f}_{\mu-s-2\lambda+2}(\sigma, e_0) + \\ &+ \tilde{f}_{\mu+s+2\lambda-2}(\sigma, e_0) - \tilde{f}_{\mu-s+2\lambda-2}(\sigma, e_0) + \tilde{f}_{\mu+s-2\lambda+2}(\sigma, e_0)] \times (\text{ch} \mu u_0 - \text{sh} \mu u_0). \end{aligned} \quad (3.114)$$

Полагая, наконец,

$$\begin{aligned} \tilde{f}_s^{(+)}(\sigma, e_0) &= \frac{1}{2^s} \sum_{\lambda=0}^s \frac{\sigma(\sigma-1) \dots (\sigma-\lambda+1)}{\lambda!} \tilde{f}_{s+2\lambda}(\sigma, e_0), \\ \tilde{f}_s^{(-)}(\sigma, e_0) &= \frac{1}{2^s} \sum_{\lambda=0}^s \frac{\sigma(\sigma-1) \dots (\sigma-\lambda+1)}{\lambda!} \tilde{f}_{s-2\lambda}(\sigma, e_0), \end{aligned} \quad (3.115)$$

мы получим:

$$\begin{aligned} \frac{\text{sh}^* u_0 \text{sh} \mu u_0}{(1 - e_0 \text{ch} u_0)^2} &= \sum_{\mu=0}^{\infty} [\tilde{f}_{\mu+s+2}^{(-)}(\sigma, e_0) - \tilde{f}_{\mu-s+2}^{(+)}(\sigma, e_0) - \tilde{f}_{\mu-s+2}^{(-)}(\sigma, e_0) + \tilde{f}_{\mu+s+2}^{(+)}(\sigma, e_0)] \times \\ &\times \text{ch} \mu u_0 - \text{sh} \mu u_0. \end{aligned} \quad (3.116)$$

б) Для случая, когда σ нечетное.

В этом случае сумма синусов в формуле (3.113) заменится через равенство косинусов, перед суммой будет знак минус, и разложение для

$$\frac{\text{sh}^* u_0 \cdot \text{sh} \mu u_0}{(1 - e_0 \text{ch} u_0)^2}$$

будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{\text{sh}^* u_0 \text{sh} \mu u_0}{(1 - e_0 \text{ch} u_0)^2} &= - \sum_{\mu=0}^{\infty} [\tilde{f}_{\mu+s+2}^{(-)}(\sigma, e_0) + \tilde{f}_{\mu-s+2}^{(+)}(\sigma, e_0) - \tilde{f}_{\mu-s+2}^{(-)}(\sigma, e_0) - \tilde{f}_{\mu+s+2}^{(+)}(\sigma, e_0)] \times \\ &\times (\text{ch} \mu u_0 - \text{sh} \mu u_0). \end{aligned} \quad (3.117)$$

Возьмем теперь производную по u_0 порядка $(\sigma-1)$ от выражений (3.116) и (3.117). Мы будем иметь:

$$\frac{d^{\sigma-1}}{du_0^{\sigma-1}} \left[\frac{\text{sh}^2 u_0 \text{sh} \mu u_0}{(1-e_0 \text{ch} u_0)^2} \right] = - \sum_{\mu=0}^{\infty} \mu^{\sigma-1} [f_{\mu+\sigma-1}^{(-)}(\sigma, e_0) + f_{\mu-\sigma+1}^{(+)}(\sigma, e_0) - f_{\mu-\sigma-1}^{(-)}(\sigma, e_0) - f_{\mu+\sigma+1}^{(+)}(\sigma, e_0)] \times (\text{ch} \mu u_0 - \text{sh} \mu u_0). \quad (3.118)$$

когда σ четное, и

$$\frac{d^{\sigma-1}}{du_0^{\sigma-1}} \left[\frac{\text{sh}^2 u_0 \text{sh} \mu u_0}{(1-e_0 \text{ch} u_0)^2} \right] = - \sum_{\mu=0}^{\infty} \mu^{\sigma-1} [f_{\mu+\sigma-1}^{(-)}(\sigma, e_0) - f_{\mu-\sigma+1}^{(+)}(\sigma, e_0) - f_{\mu-\sigma-1}^{(-)}(\sigma, e_0) + f_{\mu+\sigma+1}^{(+)}(\sigma, e_0)] \times (\text{ch} \mu u_0 - \text{sh} \mu u_0), \quad (3.119)$$

когда σ нечетное.

Аналогичным путем мы можем получить разложение для величин

$$\frac{\text{sh}^2 u_0 \cdot \text{ch} \mu u_0}{(1-e_0 \text{ch} u_0)^2}.$$

Они будут иметь форму:

$$\frac{\text{sh}^2 u_0 \text{ch} \mu u_0}{(1-e_0 \text{ch} u_0)^2} = \sum_{\mu=0}^{\infty} [f_{\mu+\sigma-1}^{(-)}(\sigma, e_0) + f_{\mu-\sigma+1}^{(+)}(\sigma, e_0) - f_{\mu-\sigma-1}^{(-)}(\sigma, e_0) + f_{\mu+\sigma+1}^{(+)}(\sigma, e_0)] \times (\text{ch} \mu u_0 - \text{sh} \mu u_0) \quad (3.120)$$

для σ четного и

$$\frac{\text{sh}^2 u_0 \text{ch} \mu u_0}{(1-e_0 \text{ch} u_0)^2} = - \sum_{\mu=0}^{\infty} [f_{\mu+\sigma-1}^{(-)}(\sigma, e_0) - f_{\mu-\sigma+1}^{(+)}(\sigma, e_0) + f_{\mu-\sigma-1}^{(-)}(\sigma, e_0) - f_{\mu+\sigma+1}^{(+)}(\sigma, e_0)] \times (\text{ch} \mu u_0 - \text{sh} \mu u_0) \quad (3.121)$$

для σ — нечетного.

Дифференцируя ряды (3.120) и (3.121) по u и $(\sigma-1)$ раз, получим:

$$\frac{d^{\sigma-1}}{du_0^{\sigma-1}} \left[\frac{\text{sh}^2 u_0 \text{ch} \mu u_0}{(1-e_0 \text{ch} u_0)^2} \right] = - \sum_{\mu=0}^{\infty} \mu^{\sigma-1} [f_{\mu+\sigma-1}^{(-)}(\sigma, e_0) + f_{\mu-\sigma+1}^{(+)}(\sigma, e_0) + f_{\mu-\sigma-1}^{(-)}(\sigma, e_0) + f_{\mu+\sigma+1}^{(+)}(\sigma, e_0)] \times (\text{ch} \mu u_0 - \text{sh} \mu u_0) \quad (3.122)$$

для σ четного и

$$\frac{d^{\sigma-1}}{du_0^{\sigma-1}} \left[\frac{\text{sh}^2 u_0 \text{ch} \mu u_0}{(1-e_0 \text{ch} u_0)^2} \right] = - \sum_{\mu=0}^{\infty} \mu^{\sigma-1} [f_{\mu+\sigma-1}^{(-)}(\sigma, e_0) - f_{\mu-\sigma+1}^{(+)}(\sigma, e_0) + f_{\mu-\sigma-1}^{(-)}(\sigma, e_0) - f_{\mu+\sigma+1}^{(+)}(\sigma, e_0)] \times (\text{ch} \mu u_0 - \text{sh} \mu u_0) \quad (3.123)$$

для σ нечетного.

Для получения разложения $(\text{ch} \mu u_0 - \text{sh} \mu u_0)$ по степеням $(e - e_0)$ и кратным u_0 нам остается только вычесть выражение (3.122) из (3.123) и (3.118) из (3.119). При вычитании функции $f_{\mu+\sigma-1}^{(-)}(\sigma, e_0)$ и $f_{\mu-\sigma+1}^{(+)}(\sigma, e_0)$ уничтожаются, и мы получим разложение $(\text{ch} \mu u_0 - \text{sh} \mu u_0)$ в виде:

$$(\text{ch} \mu u_0 - \text{sh} \mu u_0) = (\text{ch} \mu u_0 - \text{sh} \mu u_0) + n \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(e - e_0)^s}{s!} \sum_{\mu=0}^{\infty} f_{\mu,n}^{(s)}(\sigma, e_0) (\text{ch} \mu u_0 - \text{sh} \mu u_0), \quad (3.124)$$

где положено:

$$f_{\mu,n}^{(s)}(\sigma, e_0) = \mu^{s-1} [f_{\mu+\sigma-1}^{(-)}(\sigma, e_0) + f_{\mu-\sigma+1}^{(+)}(\sigma, e_0)] \quad (3.125)$$

для σ четного

$$f_{\mu,n}^{(s)}(\sigma, e_0) = \mu^{s-1} [-f_{\mu+\sigma-1}^{(-)}(\sigma, e_0) + f_{\mu-\sigma+1}^{(+)}(\sigma, e_0)]$$

для σ нечетного.

При $\sigma=0$ будет:

$$f_{\mu,n}^{(s)}(\sigma, e_0) = \mu^{-1} [f_{\mu+\sigma-1}^{(-)}(0, e_0) + f_{\mu-\sigma+1}^{(+)}(0, e_0)], \quad \mu^{-1} = 1.$$

Так как по свойству функции $f_s(x, e_0)$

$$f_{\mu+\sigma-1}^{(-)}(0, e_0) = f_{\mu-\sigma+1}^{(+)}(0, e_0) = \frac{1}{2}$$

для $\mu = n = \lambda = 0$ и

$$f_{\mu+\sigma-1}^{(-)}(0, e_0) = f_{\mu-\sigma+1}^{(+)}(0, e_0) = 0$$

для остальных μ, n, λ , то

$$f_{0,0}^{(s)}(0, e_0) = 1,$$

и формула (3.124) может быть написана в виде:

$$(\text{ch} \mu u_0 - \text{sh} \mu u_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e - e_0)^n}{n!} \sum_{\mu=0}^{\infty} f_{\mu,n}^{(n)}(\sigma, e_0) (\text{ch} \mu u_0 - \text{sh} \mu u_0). \quad (3.126)$$

Подставим теперь выражение (3.126) в формулу (3.101) для разложения главной части пертурбационной функции. Мы получим это разложение в следующей формуле:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} = & \frac{2}{a} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^{l+1} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} A_{l,m,n}^{(2)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(e - e_0)^s}{s!} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(e - e_0)^{\mu}}{\mu!} \times \\ & \times \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} f_{\mu,n}^{(n)}(\sigma, e_0) [\text{ch} \mu u_0 - \text{sh} \mu u_0] [\bar{F}_{\mu,n}^{(n)}(\sigma, e_0) \cos(p\omega + q\bar{\omega} + r) - \\ & - \Phi_{\mu,n}^{(n)}(\sigma, e_0) \sin(p\omega + q\bar{\omega} + r)]. \end{aligned} \quad (3.127)$$

Положим

$$\frac{1}{s!} \cdot \frac{1}{\sigma!} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{F}_{\mu,n}^{(n)}(\sigma, e_0) f_{\mu,n}^{(n)}(\sigma, e_0) = \chi_{\mu,n,\sigma}^{(1)}(e_0),$$

и

$$\frac{1}{s!} \cdot \frac{1}{\sigma!} \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_{\mu,n}^{(n)}(\sigma, e_0) f_{\mu,n}^{(n)}(\sigma, e_0) = \chi_{\mu,n,\sigma}^{(2)}(e_0).$$

Преобразуем двойную сумму по s и σ .

$$\sum_{s=0}^{\infty} (e - e_0)^s \sum_{\sigma=0}^{\infty} (e - e_0)^{\sigma} [\chi_{\mu,n,\sigma}^{(1)}(e_0) \cos(p\omega + q\bar{\omega} + r) - \chi_{\mu,n,\sigma}^{(2)}(e_0) \sin(p\omega + q\bar{\omega} + r)].$$

Развертывая обе суммы и собирая члены с одинаковыми степенями $(e - e_0)$, получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (e - e_0)^k (e - e_0)^n [\chi_{n,k}^{(1)}(e_0) \cos(p\omega + q\bar{\omega} + r\bar{t}) - \chi_{n,k}^{(2)}(e_0) \sin(p\omega + q\bar{\omega} + r\bar{t})] = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} (e - e_0)^n \sum_{k=0}^{\infty} [\chi_{n,k}^{(1)}(e_0) \cos(p\omega + q\bar{\omega} + r\bar{t}) - \chi_{n,k}^{(2)}(e_0) \sin(p\omega + q\bar{\omega} + r\bar{t})]. \quad (3.129)$$

Положив

$$\sum_{k=0}^{\infty} \chi_{n,k}^{(1)}(e_0) = Q_{n,1}^{(1)}(e_0), \quad (3.130)$$

и

$$\sum_{k=0}^{\infty} \chi_{n,k}^{(2)}(e_0) = Q_{n,1}^{(2)}(e_0),$$

получим:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (e - e_0)^k (e - e_0)^n [\chi_{n,k}^{(1)}(e_0) \cos(p\omega + q\bar{\omega} + r\bar{t}) - \chi_{n,k}^{(2)}(e_0) \sin(p\omega + q\bar{\omega} + r\bar{t})] = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} (e - e_0)^n [Q_{n,1}^{(1)}(e_0) \cos(p\omega + q\bar{\omega} + r\bar{t}) - Q_{n,1}^{(2)}(e_0) \sin(p\omega + q\bar{\omega} + r\bar{t})]. \quad (3.131)$$

Подставляя выражение (3.130) в формулу (3.127), получим окончательно:

$$\frac{1}{r} = \frac{2}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} b_{k,1}^{(1)} \sum_{p,q,r=-k}^k A_{p,q,r}^{(k)} (e - e_0)^k \times \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} (\operatorname{ch} \nu u_0 - \operatorname{sh} \nu u_0) [Q_{n,1}^{(1)}(e_0) \cos(p\omega + q\bar{\omega} + r\bar{t}) - Q_{n,1}^{(2)}(e_0) \sin(p\omega + q\bar{\omega} + r\bar{t})]. \quad (3.132)$$

Разложения (3.132) получены для случая $r > a_0$. Для случая $a_0 > r$ в уравнении (3.132) вместо $\frac{2}{a}$ будет множитель $\frac{2}{a_0}$, а величина, входящая в формулы (3.85) $\chi = k - 2l$.

§ 9. Разложение главной части пертурбационной функции по степеням $(e - e_0)$ для случая движения по выпуклой к Солнцу ветви гипербол

В случае движения возмущаемой точки по ветви гиперболы, обращенной выпуклостью к Солнцу, т. е. для движения, обусловленного отталкивательной силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния, выражения для косинуса и синуса истинной аномалии делятся формулами (3.83)

$$\cos \vartheta = \frac{\operatorname{ch} u + e}{(1 + e \operatorname{ch} u)}, \quad \sin \vartheta = \sqrt{e^2 - 1} \frac{\operatorname{sh} u}{(1 + e \operatorname{ch} u)}.$$

Рассмотрим разложение величин $\frac{1}{(1 + e \operatorname{ch} u)^2}$ в ряд Лорана. Делая ту же замену переменного, что и для функции $\frac{1}{(1 - e \operatorname{ch} u)^2}$, т. е. полагая $z = e^{-u}$, получим:

$$\frac{1}{(1 + e \operatorname{ch} u)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(e) (\operatorname{ch} nu - \operatorname{sh} nu). \quad (3.133)$$

$P_n(e)$ определяются формулами:

$$P_n(e) = \frac{2i}{2\pi\alpha^2} \int_{\gamma} \frac{z^{n-1}}{(z + \frac{\beta^2+1}{\beta} + 1)^2} dz. \quad (3.134)$$

Особые точки подынтегральной функции будут

$$z = -\frac{\beta}{\alpha}, \quad z = -\frac{1}{\beta}. \quad (3.135)$$

Иначе говоря, коэффициенты этого ряда мы получим, заменив в коэффициентах ряда для вогнутой ветви $\frac{\beta}{\alpha}$ на $-\frac{\beta}{\alpha}$ или, что то же, e на $-e$. Так как

$$J_n(z, -e) = (-1)^n J_n(z, e), \quad (3.136)$$

то

$$P_n(e) = (-1)^n J_n(z, e). \quad (3.137)$$

Следовательно, разложение для выпуклой к Солнцу ветви гиперболы по кратным аналога эксцентрической аномалии u будет отличаться от аналогичного разложения для вогнутой к Солнцу ветви только тем, что в соответствующие члены войдет множитель $(-1)^n$.

Это разложение будет иметь вид:

$$\frac{1}{r} = \frac{2}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{k+1} b_{k,1}^{(1)} \sum_{p,q,r=-k}^k (-1)^n A_{p,q,r}^{(k)} \times \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e - e_0)^k}{n!} [K_n(e_0) \cos(p\omega + q\bar{\omega} + r\bar{t}) - \Phi_n(e_0) \sin(p\omega + q\bar{\omega} + r\bar{t})] (\operatorname{ch} nu - \operatorname{sh} nu). \quad (3.138)$$

Рассмотрим теперь разложение пертурбационной функции для выпуклой к Солнцу ветви по кратным u_0 .

В этом случае аналогом уравнения Кеплера будет уравнение:

$$u = u_0 - (e - e_0) \Phi(u), \quad (3.139)$$

где

$$\Phi(u) = \frac{\operatorname{sh} u}{1 + e_0^2(u)}, \quad \Psi(u) = \frac{\operatorname{sh} u - \operatorname{sh} u_0}{u - u_0}. \quad (3.140)$$

в этом случае ряд Лагранжа для $\operatorname{ch} nu$ будет иметь вид:

$$\operatorname{ch} nu = \operatorname{ch} nu_0 + n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(e - e_0)^k}{k!} \frac{d^{k-1}}{du^{k-1}} \left[\frac{(-1)^k \operatorname{sh}^k u_0 \operatorname{sh} nu_0}{(1 + e_0 \operatorname{ch} u_0)^k} \right]. \quad (3.141, a)$$

Для шлн ряд Лагранжа будет:

$$\text{sh } nu = \text{sh } nu_0 + n \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(e - e_0)^k}{k!} \frac{d^{k-1}}{du_0^{k-1}} \left[\frac{\text{sh}^k u_0 \text{ch } nu_0}{(1 + e_0 \text{ch } u_0)^k} \right]. \quad (3.141, 6)$$

Разложение величин

$$\frac{\text{sh}^2 u_0 \text{sh } nu_0}{(1 + e_0 \text{ch } u_0)^2}, \quad \frac{\text{sh}^2 u_0 \text{ch } nu_0}{(1 + e_0 \text{ch } u_0)^2}$$

будет отличаться от разложений § 8 только множителем $(-1)^{k+1}$, а так как в формулу (3.141, а) и (3.141, б) уже входит $(-1)^k$, а в формулу (3.138) входит $(-1)^k$, то разложение для случая выпуклой к Солнцу ветви будет отличаться от аналогичного разложения для вогнутой ветви только множителем в соответствующих членах $(-1)^k$ и может быть написано в форме:

$$\frac{1}{r_f} = \frac{2}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} b_{kl}^{(1)} \sum_{p, n, m=0}^{\infty} (e - e_0)^p \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^{k+1+p} [\psi_{p, k}^{(1)}(e_0) \cos(pu + q\sqrt{e} + ri) - \psi_{p, k}^{(2)}(e_0) \sin(pu + q\sqrt{e} + ri)] (\text{ch } zu_n - \text{sh } zu_0), \quad (3.142)$$

где $\psi_{p, k}^{(1)}(e_0)$ и $\psi_{p, k}^{(2)}(e_0)$ определяются формулами (3.130).

§ 10. Другая форма разложений $\frac{1}{r_f}$ по степеням $(e - e_0)$

Для очень малых значений u и e близких к единице ряды (3.92) и (3.97) будут сходиться медленно и поэтому практически могут оказаться непригодными. В этом случае мы считаем более удобным или непосредственное разложение величин $\frac{\cos pu}{(1 - e \text{ch } u)^2}$ и $\frac{\sin pu}{(1 - e \text{ch } u)^2}$ в ряды Лагранжа по степеням $(e - e_0)$ или же разложение этих величин по кратным u и e в окрестности точки $z = 0$, а в окрестности точки $z = 1$. Последние ряды будут сходиться не вдоль всей траектории, а только в некоторой окрестности точки $z = 1$ (перигелия). Зависимость радиуса этой окрестности от эксцентриситета исследована нами в одной еще не опубликованной работе.

Ряд Лагранжа для величин $\frac{(ch u - e)^k}{(1 - e \text{ch } u)^{k+2}}$ будет иметь вид:

$$\frac{(ch u - e)^k}{(1 - e \text{ch } u)^{k+2}} = \frac{(ch u_0 - e_0)^k}{(1 - e_0 \text{ch } u_0)^{k+2}} + n \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(e - e_0)^l}{l!} \frac{d^{l-1}}{du_0^{l-1}} \left[(2k + l) \frac{\text{sh}^{k+1} u_0 (\text{ch } u_0 - e_0)^{k-1}}{(1 - e_0 \text{ch } u_0)^{k+2+l}} + \right. \\ \left. + l \frac{\text{sh}^{k+1} u_0 (\text{ch } u_0 - e_0)^{k-2}}{(1 - e_0 \text{ch } u_0)^{k+2+l}} + (k + l) \frac{\text{sh}^{k+1} u_0 (\text{ch } u_0 - e_0)^{k-1}}{(1 - e_0 \text{ch } u_0)^{k+2+l}} \right].$$

Следовательно, подставляя эти разложения в формулу (3.86), для

$$\frac{\cos pu}{(1 - e \text{ch } u)^2}$$

получим

$$\frac{\cos pu}{(1 - e \text{ch } u)^2} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{2^{p-2m-1} (p - m - 1) (p - m - 2) \dots (p - 2m + 1)}{m!} \frac{(ch u - e)^{p-2m}}{(1 - e \text{ch } u)^{p-2m+2}} = \\ = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{2^{p-2m-1} (p - m - 1) (p - m - 2) \dots (p - 2m + 1)}{m!} \left\{ \frac{(ch u_0 - e_0)^{p-2m}}{(1 - e_0 \text{ch } u_0)^{p-2m+2}} + \right.$$

$$+ \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(e - e_0)^l}{l!} \frac{d^{l-1}}{du_0^{l-1}} \left[(2k - 4m + l) \frac{\text{sh}^{k-1} u_0 (\text{ch } u_0 - e_0)^{k-2m-1}}{(1 - e_0 \text{ch } u_0)^{k+2m+l}} + \right. \\ \left. + l \frac{\text{sh}^{k-1} u_0 (\text{ch } u_0 - e_0)^{k-2m-2}}{(1 - e_0 \text{ch } u_0)^{k+2m+l}} + (k + p - 2m) e_0 \frac{\text{sh}^{k+1} u_0 (\text{ch } u_0 - e_0)^{k-2m}}{(1 - e_0 \text{ch } u_0)^{k+2m+l}} \right] \}. \quad (3.143)$$

Для величин $\frac{(ch u - e)^{k-1} \text{sh } u}{(1 - e \text{ch } u)^{k+2}}$ ряд Лагранжа будет:

$$\frac{(ch u - e)^{k-1} \text{sh } u}{(1 - e \text{ch } u)^{k+2}} = \frac{(ch u_0 - e_0)^{k-1} \text{sh } u_0}{(1 - e_0 \text{ch } u_0)^{k+2}} + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(e - e_0)^l}{l!} \frac{d^{l-1}}{du_0^{l-1}} \left[(2 - k) \frac{\text{sh}^k u_0 (\text{ch } u_0 - e_0)^{k-2}}{(1 - e_0 \text{ch } u_0)^{k+2+l}} + \right. \\ \left. + \frac{\text{sh}^k u_0 (\text{ch } u_0 - e_0)^{k-2} [2 \text{sh}^2 u_0 + (k + l) (\text{ch } u_0 - e_0) \text{ch } u_0]}{(1 - e_0 \text{ch } u_0)^{k+2+l}} + (k + l) e_0 \frac{\text{sh}^{k+2} u_0 (\text{ch } u_0 - e_0)^{k-1}}{(1 - e_0 \text{ch } u_0)^{k+2+l}} \right].$$

Следовательно, разложение для $\frac{\sin pu}{(1 - e \text{ch } u)^2}$ будет иметь вид:

$$\frac{\sin pu}{(1 - e \text{ch } u)^2} = -\sqrt{e^2 - 1} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{2^{p-2m-1} (p - m - 1) (p - m - 2) \dots (p - 2m)}{m!} \frac{(ch u - e)^{p-2m-1} \text{sh } u}{(1 - e \text{ch } u)^{p-2m+2}} = \\ = -\sqrt{e^2 - 1} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{2^{p-2m-1} (p - m - 1) (p - m - 2) \dots (p - 2m)}{m!} \left\{ \frac{(ch u_0 - e_0)^{p-2m-1} \text{sh } u_0}{(1 - e_0 \text{ch } u_0)^{p-2m+2}} + \right. \\ \left. + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(e - e_0)^l}{l!} \frac{d^{l-1}}{du_0^{l-1}} \left[(2 - p + 2m) \frac{\text{sh}^2 u_0 (\text{ch } u_0 - e_0)^{p-2m-2}}{(1 - e_0 \text{ch } u_0)^{p-2m+l}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\text{sh}^2 u_0 (\text{ch } u_0 - e_0)^{p-2m-2} [(p - 2m) \text{sh}^2 u_0 + (k + p - 2m) (\text{ch } u_0 - e_0)]}{(1 - e_0 \text{ch } u_0)^{p-2m+l}} + \right. \right. \\ \left. \left. \times (k + p - 2m) e_0 \frac{\text{sh}^{p+2} u_0 (\text{ch } u_0 - e_0)^{p-2m-1}}{(1 - e_0 \text{ch } u_0)^{p-2m+l}} \right] \right\}. \quad (3.144)$$

В тех случаях, когда невыгодно разлагать в ряд по степеням $z = e^{-u}$ величину $\frac{1}{(1 - e \text{ch } u)^2}$, также невыгодно разлагать в ряд по степеням $z_0 = e^{-u_0}$ величин, стоящие в скобках в правых частях уравнений (3.143) и (3.144), так как u и e весьма мало отличаются от u_0 и e_0 . В этом случае придется воспользоваться разложением величин $\frac{\sin pu}{(1 - e \text{ch } u)^2}$ и $\frac{\cos pu}{(1 - e \text{ch } u)^2}$ в формуле (3.143) и (3.144). Нам кажется, что это не может вызвать особых затруднений ввиду того, что мы всегда можем выбрать e_0 достаточно близким к e , чтобы ряды (3.143) сходились достаточно быстро. Повтому в них не придется брать больше трех-четырех производных, чтобы вычислить коэффициенты при соответствующих степенях $(e - e_0)$. Эти коэффициенты при заданном e_0 будут зависеть от времени через посредство u_0 .

Подставляя разложения (3.143) и (3.144) в ряд для $\frac{1}{r_f}$, получим ее разложение в виде:

$$\frac{1}{r_f} = \frac{2}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^{k+1} b_{kl}^{(1)} \sum_{p, n, m=0}^{\infty} (e - e_0)^p \left[f_1(u_0) \cos(pu + q\sqrt{e} + ri) + \right. \\ \left. + \varphi_2(u_0) \sin(pu + q\sqrt{e} + ri) \right], \quad (3.145)$$

где положено

$$f_1(u_0) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{2^{p-2m-1} p(p-m-1)(p-m-2) \dots (p-2m+1)}{m!} \left\{ \frac{(ch u_0 - e_0)^{p-2m}}{(1-e_0 ch u_0)^{p-2m+1}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{d!} \frac{d^{p-1}}{du_0^{p-1}} \left[(2p-4m+\nu) \frac{sh^{p+1} u_0 (ch u_0 - e_0)^{p-2m-1}}{(1-e_0 ch u_0)^{p-2m+1}} + \chi \frac{(ch u_0 - e_0)^{p-2m-1} sh^{p-1} u_0}{(1-e_0 ch u_0)^{p-2m+1}} + \right. \right. \\ \left. \left. + (\chi + p - 2m) e_0 \frac{sh^{p+1} u_0 (ch u_0 - e_0)^{p-2m}}{(1-e_0 ch u_0)^{p-2m+1}} \right] \right\}, \\ \varphi_1(u_0) = \sqrt{e^2 - 1} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{2^{p-2m-1} (p-m-1)(p-m-2) \dots (p-2m)}{m!} \left\{ \frac{(ch u_0 - e_0)^{p-2m-1} sh^p u_0}{(1-e_0 ch u_0)^{p-2m+1}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{d!} \frac{d^{p-1}}{du_0^{p-1}} \left[(2-p+2m) \frac{sh^p u_0 (ch u_0 - e_0)^{p-2m-2}}{(1-e_0 ch u_0)^{p-2m+1}} + \right. \right. \\ \left. \left. + (ch u_0 - e_0)^{p-2m-2} sh^p u_0 [(p-2m) sh^2 u_0 + (p-2m+2)(ch u_0 - e_0) ch u_0] + \right. \right. \\ \left. \left. + (\chi + p - 2m) \frac{sh^{p+2} u_0 (ch u_0 - e_0)^{p-2m-1}}{(1-e_0 ch u_0)^{p-2m+1}} \right] \right\}.$$

§ 11. Разложение дополнительной части пертурбационной функции по степеням $(e - e_0)$

Рассмотрим теперь разложение дополнительной части пертурбационной функции по степеням приращения эксцентриситета $(e - e_0)$.

Для дополнительной части пертурбационной функции в круговой ограниченной задаче трех тел имеет формулу:

$$R_1 = \frac{r \cos \theta}{a_j^2} = \frac{r}{a_j^2} \sum_{p, q, r=0}^{\infty} A_{pqr}^{(1)} \cos[p(\tau + \omega) + q\bar{\Omega} + r\bar{t}].$$

Или а) для эллиптического движения

$$R_1 = \frac{a}{a_j^2} \sum_{p, q, r=0}^{\infty} A_{pqr}^{(1)} \sum_{n=0}^{\infty} [F_n(e) + \Phi_n(e)] \cos n E \cos(p\omega + q\bar{\Omega} + r\bar{t}); \quad (3.146)$$

б) для вогнутой к Солнцу ветви гиперболы

$$R_1 = \frac{a}{a_j^2} \sum_{p, q, r=0}^{\infty} A_{pqr}^{(1)} \sum_{n=0}^{\infty} [(ch u - e) \cos(p\omega + q\bar{\Omega} + r\bar{t}) + \sqrt{e^2 - 1} sh u \sin(p\omega + q\bar{\Omega} + r\bar{t})]. \quad (3.147)$$

Разложив по степеням $(e - e_0)$ величины $\cos nE$, $sh u$ и $ch u$, мы получим ряды Лагранжа в виде:

а) для эллипса

$$R_1 = \frac{a}{a_j^2} \sum_{p, q, r=0}^{\infty} A_{pqr}^{(1)} \sum_{n=0}^{\infty} [F_n(e) + \Phi_n(e)] \cdot \left\{ \cos nE_0 - \right.$$

$$- np \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(e - e_0)^m}{|a|} \cdot \frac{d^{m-1}}{du_0^{m-1}} \left[\frac{sh^p u_0 \sin nE_0}{(1 - e_0 \cos E_0)^p} \right] \times \cos(p\omega + q\bar{\Omega} + r\bar{t}), \quad (3.148)$$

$$p, q = -1, +1, \quad r, n = -1, 0, 1,$$

$$F_{-1}(e) = F_1(e) = \frac{1}{2}, \quad F_0(e) = -e, \quad \Phi_{-1}(e) = -\Phi_1(e) = \sqrt{1 - e^2};$$

б) для вогнутой к Солнцу ветви гиперболы

$$R_1 = \frac{a}{a_j^2} \sum_{p, q, r=0}^{\infty} A_{pqr}^{(1)} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ch nu_0 + n \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(e - e_0)^m}{|a|} \cdot \frac{d^{m-1}}{du_0^{m-1}} \left[\frac{sh^p u_0 sh nu_0}{(1 - e_0 ch u_0)^p} \right] \times \right. \\ \left. \cos(p\omega + q\bar{\Omega} + r\bar{t}) + \sqrt{e^2 - 1} sh nu_0 + np \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(e - e_0)^m}{|a|} \cdot \frac{d^{m-1}}{du_0^{m-1}} \left[\frac{sh^p u_0 ch nu_0}{(1 - e_0 ch u_0)^p} \right] \times \right. \\ \left. \sin(p\omega + q\bar{\Omega} + r\bar{t}) \right]. \quad (3.149)$$

Для выпуклой к Солнцу ветви гиперболы надо везде в разложении (3.147) перед e, e_0 $\sqrt{e^2 - 1}$ заменить знаки.

Мы оставляем здесь разложение величины $\cos nE$, $ch nu$, $sh nu$ в указанной форме. Их разложения по кратным u_0 (в том случае, когда это целесообразно) получаются из формул (3.148) и (3.149), (3.122) и (3.123), если в них положить $n = \pm 1$.

Разлагать $\sqrt{e^2 - 1}$ в ряд по степеням $(e - e_0)$ нецелесообразно.

§ 12. Обзор полученных результатов

Основным результатом, полученным в III части настоящей работы, мы считаем вывод формулы для общих членов не применявшихся ранее теялоровских рядов по степеням приращения эксцентриситета $(e - e_0)$ для главной части пертурбационной функции.

Эти ряды являются более общими, чем обычные мажорановские ряды по степеням эксцентриситета, которые получаются из наших рядов, если положить $e_0 = 0$. Эти обычные разложения пригодны, кроме того, только для $e < 0.6627 \dots$, в то время как применяемые нами ряды Тейлора будут годиться (при надлежащем выборе e_0) для любых e (кроме $e = 1$) в интервале от 0 до ∞ , т. е., в частности, и для гиперболического движения. Кроме того, пользуясь произволом при выборе e_0 , мы можем увеличивать быстроту сходимости наших разложений, выбирая e_0 достаточно близким к e .

Как побочный результат этой части можно отметить рассмотрение свойств функций $J_n^*(z, e)$ в случае, когда $|e| > 1$, и, в частности, тот факт, что для случая $|e| > 1$ и E — чисто мнимого, мы получаем коэффициентами разложения величины $\frac{1}{(1 - e \cos E)^p}$ по степеням $z = e^E$ два вида функций эксцентриситета $J_n^*(z, e)$ и $J_n^*(z, e)$, которые являются комплексными сопряженными функциями. Каждая из этих функций будет иметь ту же структуру, что и функция $J_n^*(z, e)$ для случая $|e| < 1$ и будет иррациональной функцией, а их сумма $J_n^*(z, e)$ будет рациональной функцией эксцентриситета, представляющей собой многочлен, расположенный по степеням $\frac{1}{e}$.

ЛИТЕРАТУРА

- Елесьевский Н. Б. 1949. О коэффициентах разложения координат невозмущенного движения в ряд Фурье по кратным эксцентриситетической аномалии. Уч. зап. Ливнов. Гос. ун-та, 15, 4.
Елесьевский Н. Б. 1952. Разложение пертурбационной функции в ряд Фурье относительно выноса. Ч. I. Бюлл. ИТА, 5, 2 (65).
Елесьевский Н. Б. 1953. Разложение пертурбационной функции в ряд Фурье относительно выноса. Ч. II. Бюлл. ИТА, 5, 5 (66).
Момсесов Н. А. 1936. Алгебра небесной механики. Авторизованное издание МГУ.
Субботин М. Ф. 1937. Курс небесной механики. 2. ОНТИ.
Tisserand F. 1889. Traité de mécanique céleste. I. Paris.

Получено в Редакцию
6 марта 1956 г.

Разложение пертурбационной функции в ряд Фурье относительно наклонности

Часть IV. Разложение пертурбационной функции в пространственной ограниченной аналитической задаче трех точек и в неограниченной задаче n точек

Н. Б. Еленевская

В настоящей IV части получено разложение по степеням эксцентриситета пертурбационной функции в случае так называемой ограниченной аналитической задачи, когда возмущаемое тело движется по невозмущенному эллипсу. Разложение проводится двумя методами: Ньютоном и нашим, с применением специальных функций $J_n^*(x)$. Полученные разложения содержат наклонность под знаками тригонометрических функций.

Указывается путь получения аналогичных разложений в задаче n -тел.
ENTWICKLUNG DER STÖRUNGSFUNKTION IN EINE FOURIER-REIHE BEZÜGLICH DER NEIGUNG. IV Teil. ENTWICKLUNG DER STÖRUNGSFUNKTION IM RÄUMLICHEN EINGESCHRÄNKTEN ELLIPTISCHEN DREIKÖRPERPROBLEM UND IM UNERSTRINGIERTEN n -KÖRPERPROBLEM. — Von N. B. Elenewskaja. — In dem vorliegenden IV. Teil wird die Entwicklung der Störungsfunktion nach den Potenzen der Exzentrizität im räumlichen eingeschränkten, sog. elliptischen Dreikörperproblem für den Fall, wo störender Körper in ungestörter Bahn bewegt, gewonnen. Diese Entwicklung wurde nach zwei Methoden durchgeführt: nach der von Newcomb und der von uns vorgeschlagenen Methode unter Anwendung der Spezialfunktionen $J_n^*(x, \alpha)$. Die Bahnneigung geht in die erhaltenen Entwicklungen mittels der trigonometrischen Funktionen ein. Es wird das Ausführungsverfahren für Erhalten analoger Entwicklungen im n -Körperproblem angedeutet.

Введение

В предыдущих частях настоящей работы нами было получено разложение пертурбационной функции в пространственной ограниченной круговой задаче трех точек. Благодаря тому, что по взаимной наклонности разложение велось в тригонометрический, а не в степенной ряд, были получены ряды, сходящиеся для любых значений наклонности, сравнительно простой структуры, так что мы получили возможность писать общие члены этих рядов, чего в классической небесной механике не делалось. Полученное разложение представляет собой кратный ряд по эксцентриситету и отношению больших полуосей, коэффициентами которого являются тригонометрические полиномы относительно величин: эксцентрисической аномалии E (или средней аномалии M), расстояния перигелия от узла ω , величины $\bar{\Omega} = l_j - \bar{\Omega}$, где l_j — долгота возмущающей точки, а $\bar{\Omega}$ — расстояние перигелия оскулирующей орбиты от узла и взаимной наклонности орбит i .

В этой части работы мы хотим дать обобщение этого способа разложения пертурбационной функции на случай аналитической ограниченной задачи трех точек, а затем — на случай неограниченной задачи n точек.

Для этого можно идти двумя путями. В первом случае, получив разложение в «дважды круговой» задаче, т. е. когда эксцентриситеты возмущаемой и возмущающей точек e и e_j равны нулю, воспользоваться затем методом Ньютона для получения разложений по степеням e и e_j . Во втором случае мы не полагаем предварительно

$e = e_j = 0$, а получаем сразу разложение по некоторым функциям эксцентриситета [функции $J_n^*(x, e)$] и затем преобразовываем полученные ряды в степенные по e и e_j . Последний путь кажется нам более удобным, потому применение метода Ньютона мы осветим очень кратко и остановимся более подробно на методе функции $J_n^*(x, e)$. Насколько это оправдано, будет ясно из последующего изложения.

§ 1. Применение метода Ньютона к разложению пертурбационной функции в аналитической задаче трех точек

Разложения, полученные для «дважды круговой» задачи трех точек, имеют вид:¹

$$\left(\frac{u}{\bar{\Omega}}\right)_{00} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k^{(1)} \sum_{j=0}^{\infty} A_{jkr}^{(k)} \cos p \bar{M} \cos (\bar{\Omega} + r i). \quad (4.1)$$

Здесь положено: Δ — взаимное расстояние возмущаемой и возмущающей точек, $b_k^{(1)}$ — суть коэффициенты Лапласа, нижний индекс которых равен единице, $A_{jkr}^{(k)}$ — суть некоторые численные коэффициенты:

$$M = M + \omega, \quad \bar{\Omega} = l_j - \bar{\Omega}.$$

Применим к разложению (4.1) метод Ньютона в его классической форме, описанной в части I (Еленевская, 1952), а также в работах (Субботин, 1937) и (Newcomb, 1895), где r — радиус-вектор возмущаемой точки, r' — радиус-вектор возмущающей точки, v и v_j — истинные аномалии.

Если выбрать оси координат так, чтобы ось x была направлена к перигелию орбиты возмущающей точки (будем в дальнейшем называть ее для простоты Юпитером), то $v_j = l_j$. Тогда

$$a_j = F(\ln a + i, \ln a + i, M + f, M_j + f_j), \quad (4.2)$$

где

$$f = v - M, \quad f_j = l_j - M_j; \quad i = \ln(1 - e \cos E), \quad i_j = \ln(1 - e_j \cos E_j).$$

e, e_j, E, E_j — суть эксцентриситеты и эксцентрисические аномалии возмущаемой точки и Юпитера.

Разлагая функции (4.2) в ряд Тейлора по степеням малых величин f, f_j, i, i_j получим, пользуясь символической записью, ряд вида:

$$a_j = E^{i+j+i_j+j_j} F(\ln a, \ln a_j, M, M_j). \quad (4.3)$$

Через E здесь, как прежде, обозначено основание натуральных логарифмов.

Выражение (4.3) можно иначе записать в виде:

$$a_j = E^{i+j+i_j+j_j} E^{i+j+i_j+j_j} F(\ln a, \ln a_j, M, M_j). \quad (4.4)$$

Т. е. мы сначала символически умножим функцию F на первый множитель, а затем так же символически умножим результат на второй множитель. Результат первого умножения получен нами в I части этой работы в форме:

$$\left(\frac{u}{\bar{\Omega}}\right)_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} e^k p^m A_{pkr}^{(k)} \cos[(p+m)M + p\omega + q\bar{\Omega} + r i], \quad (4.5)$$

¹ «Дважды круговой» мы называем такую задачу трех точек, когда эксцентриситеты орбит возмущаемой и возмущающей точек положены равными нулю (Еленевская, 1952).

где p_m^* есть результат операции, обозначенной символом Π_m^* над коэффициентами Лапласа $b_{l_j}^{(p)}$, а Π_m^* есть в свою очередь символические полиномы, названные операторами Ньюкома.¹ $\bar{\Omega} = I_j - \Omega$ [в данном случае $I_j = p_j(t - t_0) = M_j$]. Разложение (4.5) можно записать в форме:

$$\left(\frac{\alpha_j}{\Delta}\right)_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{q=-k}^k \lambda_1^q H_{k,q}(p, r), \quad (4.6)$$

где $\lambda_1 = E^{\bar{\Omega}}$, $i = \sqrt{-1}$, $H_{k,q}(p, r)$ — голоморфная функция всех аргументов, кроме $\bar{\Omega}$. Умножим символически правую часть уравнения (4.6) на второй множитель в выражении (4.4). Обозначим через $K_0^{(k)}$ выражение

$$R_0^{(k)} = \sum_{q=-k}^k \lambda_1^q H_{k,q}(p, r), \quad (4.7)$$

где s — некоторое фиксированное значение k . Пусть $R_0^{(k)} \dots$ общий член ряда (4.7)

$$R_0^{(k)} = \lambda_1^k H_{k,0}(p, r). \quad (4.8)$$

Умножая символически $K_0^{(k)}$ на $E^{(p_j)^k + i^k p_j}$, получим:

$$E^{(p_j)^k + i^k p_j} K_0^{(k)} = E^{(p_j)^k + i^k p_j - \bar{\Omega} p_j} R_0^{(k)}, \quad (4.9)$$

так как

$$D_j = \frac{\partial}{\partial \Omega} = \sqrt{-1} \lambda_1 \frac{\partial}{\partial \lambda_1}.$$

Положим $\gamma_1 = E^{i^k - i^k}$. Замена теперь в известных разложениях уравнения центра $I_j - M_j = f_j$ и $g_j = \ln \frac{r}{r'}$ синусы и косинусы M_j выражениями через γ_1 , получим разложения этих величин по степеням γ_1 . Подставим затем полученные значения f_j и g_j в функцию $E^{(p_j)^k + i^k p_j - \bar{\Omega} p_j}$ и разложим эту функцию по степеням γ_1 с неопределенными коэффициентами. Приравняв затем коэффициенты в правых и левых частях, получим значение этих коэффициентов в виде символических полиномов Π_m^* .

Итак, член разложения (4.8), содержащий множителем $I_j^{p_j}$, будет иметь вид:

$$R_{m,j}^{(k)} = e_j^{p_j} \sum_{n=-m}^m \Pi_m^* H_{k,n}(p, r) \gamma_1^n. \quad (4.10)$$

Суммируя по e_j от 0 до ∞ , получим:

$$\frac{\alpha_j}{\Delta} = \sum_{k=0}^{\infty} e_j^{p_j} \sum_{n=-m}^m \Pi_m^* H_{k,n}(p, r) \gamma_1^n. \quad (4.11)$$

Подставляя в разложение (4.11) значение $H_{k,n}$ из формул (4.5), получим:

$$\frac{\alpha_j}{\Delta} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=-m}^m \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=-k}^k \sum_{r=-k}^k e^{i^k + p} \Pi_m^* A_{p,q}^{(k)} \gamma_1^n \cos[(p+m)M + p\omega + r\bar{\Omega}] =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=-m}^m \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=-k}^k \sum_{r=-k}^k e^{i^k + p} \Pi_m^* A_{p,q}^{(k)} \cos q(l_j - \Omega) \cos m'l_j \cos[(p+m)M + p\omega + r\bar{\Omega}] =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=-m}^m \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=-k}^k \sum_{r=-k}^k e^{i^k + p} \Pi_m^* A_{p,q}^{(k)} \cos[(p+m)M + (q+m')M_j + p\omega - q\bar{\Omega} + r\bar{\Omega}].$$

Здесь через Π_m^* обозначен результат действия на исходный коэффициент $b_{l_j}^{(k)}$ начала оператора Π_m^* , а затем оператора Π_m^* . Вычисление операторов Π_m^* подробно рассмотрено в монографии Б. А. Орлова (1936).

К недостаткам этого способа разложения нужно отнести прежде всего невозможность написания общего члена, потому что мы не знаем общих членов для операторов Ньюкома Π_m^* .

Работа Б. А. Орлова была написана в 1936 г., а в то время еще не была известна структура общих членов в разложениях уравнения центра f и $\ln \frac{r}{r'}$, откуда следует невозможность получения общих членов и в операторах Ньюкома.

Общие члены упомянутых разложений получены нами в работах (Еленевская, 1949, 1953).

§ 2. Разложение пертурбационной функции в эллиптической задаче трех точек по функциям $J_n(\alpha, e)$

Возьмем пертурбационную функцию пространственной ограниченной задачи трех точек в конечном виде:

$$R = k'm \left[\frac{1}{\Delta} - \frac{r \cos b}{(r')^2} \right].$$

Здесь Δ — взаимное расстояние возмущаемой и возмущающей точек, r и r' — радиус-векторы этих точек и b — угол между ними.

Главная часть пертурбационной функции в этом случае определяется формулой:

$$\frac{1}{\Delta} = (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta)^{-\frac{1}{2}}, \quad (4.13)$$

$$\cos \theta = \cos(v + \omega) \cos(v_2 - \Omega) + \sin(v + \omega) \sin(v_2 - \Omega) \cos i.$$

Для пространственной круговой ограниченной задачи трех точек, когда $r_j = a_j$, нами было получено в части II разложение:

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{2}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=-k}^k A_{p,q}(k) \sum_{n=-m}^m [F_n(e) + \Phi_n(e)] \cos(nE + p\omega + p\bar{\Omega} + r\bar{\Omega}), \quad (4.14)$$

где $F_n(e)$ и $\Phi_n(e)$ некоторые функции эксцентриситета e , являющиеся линейными комбинациями функций $J_n(\alpha, e)$.² Рассмотрим теперь разложение функции (4.13) в

¹ Подробно о функциях $J_n(\alpha, e)$ сказано в работах (Еленевская, 1949, 1953).

² См. § 5, формула (2.53) и § 6, формула (2.67) (Еленевская, 1953).

эллиптической задаче. Ограничимся случаем, когда отношение $\frac{r'}{r}$ или $\frac{r}{r'}$ все время меньше единицы, и обозначим это отношение через \bar{r} . Тогда $\frac{1}{\Delta}$ можно написать в виде:

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r} (1 - 2\bar{r} \cos \theta + \bar{r}^2)^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.15)$$

В данном случае $\bar{r} = \frac{r'}{r}$ (внешний вариант). Величина, стоящая в скобках в правой части формулы (4.15) будет четной непрерывной периодической функцией θ , удовлетворяющей условиям Дирихле. Разлагая ее в ряд Фурье, получим

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{2r} \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_k^{(1)} \cos k\theta. \quad (4.16)$$

$B_k^{(1)}$ суть однородные функции нулевой степени относительно r , обращающиеся в известные коэффициенты Лапласа, когда $r=a$, $r'=a_j$. Функции $B_k^{(1)}$ определяются известными формулами:

$$\frac{1}{2} B_k^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k+2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2k+2n)} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2l-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2l} r^{k+2l} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k+2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2k+2n)} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2l-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2l} \left(\frac{a_j}{a} \right)^{k+2l} \left(\frac{1 - e_j \cos E_j}{1 - e \cos E} \right)^{k+2l}. \quad (4.17)$$

$$\frac{1}{2} B_k^{(1)} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2l-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2l} \left(\frac{a_j}{a} \right)^{k+2l} \left(\frac{1 - e_j \cos E_j}{1 - e \cos E} \right)^{k+2l}. \quad (4.18)$$

Обозначим

$$b_{k,l}^{(1)} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k+2l-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2k+2l)} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2l-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2l} \left(\frac{a_j}{a} \right)^{k+2l} \left(\frac{1 - e_j \cos E_j}{1 - e \cos E} \right)^{k+2l}.$$

$$b_{k,l}^{(0)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2l-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2l} \right]^2 \left(\frac{a_j}{a} \right)^{k+2l}. \quad (4.19)$$

получим

$$\frac{1}{2} B_k^{(1)} = \sum_{l=0}^{\infty} b_{k,l}^{(1)} \left(\frac{1 - e_j \cos E_j}{1 - e \cos E} \right)^{k+2l}.$$

Разложение $\frac{1}{\Delta}$ теперь примет вид:

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{2}{r} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} b_{k,l}^{(1)} \cos k\theta \left(\frac{1 - e_j \cos E_j}{1 - e \cos E} \right)^{k+2l}. \quad (4.20)$$

Как показано в части II данной работы, разложение величин $\left(\frac{1 - e_j \cos E_j}{1 - e \cos E} \right)^{k+2l}$ может быть получено в виде:

$$\left(\frac{1 - e_j \cos E_j}{1 - e \cos E} \right)^{k+2l} = \sum_{p,q,r} A_{p,q,r}^{(k)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Psi_n(e) \cos(nE + p\omega + q\Omega + rI). \quad (4.21)$$

Здесь $\Psi_n(e) = F_n(e) + \Phi_n(e)$. Подставляя разложение (4.21) в выражение главной части пертурбационной функции $\frac{1}{\Delta}$ (4.20), получим

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{2}{r} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} b_{k,l}^{(1)} \sum_{p,q,r} A_{p,q,r}^{(k)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Psi_n(e) \cos(nE + p\omega + q\Omega + rI) (1 - e_j \cos E_j)^{k+2l} =$$

$$= \frac{2}{r} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} b_{k,l}^{(1)} \sum_{p,q,r} A_{p,q,r}^{(k)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Psi_n(e) \{ \cos qv_j \cos(nE + p\omega - q\Omega + rI) -$$

$$- \sin qv_j \sin(nE + p\omega - q\Omega + rI) \} (1 - e_j \cos E_j)^{k+2l}. \quad (4.22)$$

Выразим величинами $\cos qv_j$ и $\sin qv_j$ по формулам Эйлера через степени. Мы получим

$$\cos qv_j = \sum_{m=0}^q (-1)^m \frac{2^{q-2m-1} q! (q-m-1)! (q-m-2)! \dots (q-2m+1)!}{m!} \cos^{q-2m} v_j,$$

$$\sin qv_j = \sum_{m=0}^{q-1} (-1)^m \frac{2^{q-2m-1} (q-m-1)! (q-m-2)! \dots (q-2m)!}{m!} \cos^{q-2m} v_j \sin v_j, \quad (4.23)$$

где

$$x_1 = \frac{q}{2} \text{ или } x_1 = \frac{q-1}{2},$$

$$x_2 = \frac{q-2}{2} \text{ или } x_2 = \frac{q-1}{2},$$

в зависимости от того, какое из этих чисел будет целым.

По формулам невозмущенного движения

$$\cos^{q-2m} v_j = \left(\frac{\cos E_j - e_j}{1 - e_j \cos E_j} \right)^{q-2m}; \quad \cos^{q-2m-1} v_j \sin v_j = \sqrt{1 - e_j^2} \frac{(\cos E_j - e_j)^{q-2m-1}}{(1 - e_j \cos E_j)^{q-2m}} \sin E_j.$$

Мы будем здесь поступать так же, как это было сделано во II части. Поэтому нам сейчас необходимо разложить в ряд Фурье величину

$$f(e_j) = \frac{(\cos E_j - e_j)^{q-2m}}{(1 - e_j \cos E_j)^{q-2m-1}}. \quad (4.24)$$

и

$$g(e_j) = \sqrt{1 - e_j^2} \frac{(\cos E_j - e_j)^{q-2m-1} \sin E_j}{(1 - e_j \cos E_j)^{q-2m-1}}. \quad (4.25)$$

где $k = k + 2l + 1$. Отличие от разложений аналогичных функций в круговой задаче будет состоять только в том, что величина $x' = q - m - x + 1$ в данном случае будет отрицательной, и потому в функциях $J_n(x, e_j)$ аргумент x' будет отрицательным. Как показано в части II, функции $J_n(x, e)$ от отрицательного аргумента x' представляют собой не бесконечные ряды, а полиномы.

Итак, разложим функции (4.24) и (4.25) в ряды Фурье. Начнем с функции (4.25)

$$f(e_j) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n(q, m, x, e_j) \cos nE_j. \quad (4.26)$$

$G_n(q, m, x, e_j)$ как коэффициенты Фурье определяются формулой:

$$G_n(q, m, x, e_j) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{(\cos E_j - e_j)^{q-2m} \cos nE_j}{(1 - e_j \cos E_j)^{q-2m-1}} dE_j. \quad (4.27)$$

473

$$\begin{aligned}
& \times \frac{(x-q+2m'+r-1)(x-q+2m'+r-2)\dots(x-q+2m'+r-n'-2\sigma)}{(n'+\sigma)! \sigma! 2^{\sigma-1}} \\
& - (q-2m') \sum_{r=0}^{q-2m'-1} (-1)^r \frac{(q-2m'-1)(q-2m'-2)\dots(q-2m'-r)}{r!} \times \\
& \times \frac{(x-q+2m'+r-1)(x-q+2m'+r-2)\dots(x-q+2m'+r-n'-2\sigma+2)}{(n'+\sigma-1)! (\sigma-1)! 2^{\sigma-2}} + \\
& + \dots + \\
& + (-1)^{\sigma} \frac{(q-2m')(q-2m'-1)\dots(q-2m'-\lambda+1)}{\lambda!} \sum_{r=0}^{q-2m'-\lambda} (-1)^r \frac{(q-2m'-\lambda)(q-2m'-\lambda-1)\dots(q-2m'-\lambda-r+1)}{r!} \times \\
& \times \frac{(x-q+2m'+r-1)(x-q+2m'+r-2)\dots(x-q+2m'+r-2\sigma+2\lambda-n')}{(n'+\sigma-\lambda)! (\sigma-\lambda)! 2^{\sigma-2\lambda}} + \\
& + (-1)^{\sigma-\lambda} \sum_{r=0}^{q-2m'-\lambda} (-1)^r \frac{(q-2m'-\sigma)(q-2m'-\sigma-1)\dots(q-2m'-\sigma+r-1)}{r!} \times \\
& \times \frac{(x-q+2m'+r-1)(x-q+2m'+r-2)\dots(x-q+2m'+r-n')}{n!} + \\
& + \dots
\end{aligned}$$

Суммирование ведется до некоторой величины $\bar{\sigma}$, причем $\bar{\sigma} = q - 2m'$, если $2q - 4m' \geq x$ и $\bar{\sigma} = \frac{x+q-2m'-n'}{2}$ или $\bar{\sigma} = \frac{x+q-2m'-n'}{2}$, если $2q - 4m' < x$.

Как легко показать

$$\begin{aligned}
& \sum_{r=0}^{q-2m'-\lambda} (-1)^r \frac{(q-2m'-\lambda)(q-2m'-\lambda+1)\dots(q-2m'-\lambda-r+1)}{r!} \times \\
& \times \frac{(x-q+2m'+r-1)(x-q+2m'+r-2)\dots(x-q+2m'+r-2\sigma+2\lambda-n')}{(n'+\sigma-\lambda)! (\sigma-\lambda)! 2^{\sigma-2\lambda}} = \\
& = (-1)^{\sigma-\lambda} \frac{(x-q+2m'-1)(x-q+2m'-2)\dots(x-q+2m'-\lambda)(n'+2\sigma-2\lambda)(n'+2\sigma-2\lambda-1)\dots(n'+2\sigma-q+2m'-\lambda+1)}{(n'+\sigma-\lambda)! (\sigma-\lambda)! 2^{\sigma-2\lambda}}. \quad (4.43)
\end{aligned}$$

Потому $G_{\sigma}(q, m', x, e_j)$ можно записать в виде:

$$G_{\sigma} = \sum_{n=0}^x e^{x+2m'-n} K_{\sigma}^{(n)}(q, m', x), \quad (4.44)$$

где

$$\begin{aligned}
K_{\sigma}^{(n)}(q, m', x) = & \sum_{r=0}^x (-1)^r \frac{(q-2m')(q-2m'-1)\dots(q-2m'-\lambda+1)}{\lambda!} \times \\
& \times \frac{(x-q+2m'-1)(x-q+2m'-2)\dots(x-q+2m'-\lambda)(n'+2\sigma-2\lambda)(n'+2\sigma-2\lambda-1)\dots(n'+2\sigma-q+2m'-\lambda+1)}{(n'+\sigma-\lambda)! (\sigma-\lambda)! 2^{\sigma-2\lambda}}. \quad (4.45)
\end{aligned}$$

Положим теперь $n' + 2\sigma - q + 2m' = s'$. Очевидно, что s' не может принимать отрицательных значений. Обозначим через $C_{\sigma}(n', q, -x+1)$ величину:

$$\begin{aligned}
C_{\sigma}(n', q, -x+1) = & \sum_{m'=0}^x (-1)^{m'} \frac{2^{\sigma-2m'} q (q-2m') (q-2m'-1) \dots (q-2m'+1)}{m'!} \times \\
& \times \sum_{r=0}^x (-1)^r \frac{(q-2m')(q-2m'-1) \dots (q-2m'-r+1)}{r!} \times \\
& \times \frac{(x-q+2m'-1)(x-q+2m'-2) \dots (x-s'-q+2m'+\lambda)}{(n'+s'+q-2m'-2\lambda)! \left(\frac{s'-n'+q-2m'-2\lambda}{2}\right)!} \times \\
& \times \frac{(s+q-2m'-2\lambda)(s+q-2m'-2\lambda-1) \dots (s-\lambda+1)}{2^{\sigma-2m'-2\lambda+1}}. \quad (4.46)
\end{aligned}$$

Легко доказать, совершенно так же как и в части II, что все коэффициенты $C_{\sigma}(n', q, -x+1)$ обращаются в нуль, если $n' \neq q + s' - 2j$, где $j = 0, 1, 2, \dots, s$. Так, например:

$$C_0(q, q, -x+1) = \frac{1}{2}, C_0(\beta, q, -x+1) = 0, \beta \neq q,$$

$$C_1(q+1, q, -x+1) = -\frac{1}{2}(x-q-1), C_1(q-1, q, -x+1) = -\frac{1}{2}(x+q-1),$$

$$C_1(\gamma, q, -x+1) = 0, \gamma \neq q+1, \gamma \neq q-1.$$

И вообще

$$\begin{aligned}
C_{\sigma}(q+s'-2j, q, -x+1) = & \sum_{m'=0}^x (-1)^{m'} \frac{q(q-m'-1)(q-m'-2) \dots (q-2m'+1)}{m'!} \times \\
& \times \sum_{r=0}^{j-m'} (-1)^r \frac{(q-2m')(q-2m'-1) \dots (q-2m'-\lambda+1) \cdot (x-q+2m'-1)(x-q+2m'-2) \dots (x-q+2m'-\lambda+s')}{\lambda! (q+s'-m'-\lambda-j)! (j-m'-\lambda)!} \times \\
& \times \frac{(s'+q-2m'-2\lambda)(s'+q-2m'-2\lambda-1) \dots (s'-\lambda+1)}{2^{\sigma-2m'-2\lambda+1}}. \quad (4.47)
\end{aligned}$$

Таким образом, разложение величин $\frac{\cos q e_j}{(1-e_j \cos E_j)^{-\lambda+1}}$ будет иметь вид:

$$\frac{\cos q e_j}{(1-e_j \cos E_j)^{-\lambda+1}} = \sum_{s'=0}^j e_j^{s'} \sum_{n'=q+s'-2j}^{q+s'-2} C_{\sigma}' \cos n' E_j. \quad (4.48)$$

Поступая аналогично с величинами $\frac{\sin q e_j}{(1-e_j \cos E_j)^{-\lambda+1}}$, мы получим их разложение в виде:

$$\frac{\sin q e_j}{(1-e_j \cos E_j)^{-\lambda+1}} = \sqrt{1-e_j^2} \sum_{s'=0}^j e_j^{s'} \sum_{n'=q+s'-2j}^{q+s'-2} C_{\sigma}' \sin n' E_j, \quad (4.49)$$

где коэффициенты C_{σ}' определяются формулой:

$$C_{\sigma}'(q+s'-2j, q, -x+1) = \sum_{m'=0}^x (-1)^{m'} \frac{(q-m'-1)(q-m'-2) \dots (q-2m')}{m'!} \times$$

$$\times \sum_{m=0}^{j-1} (-1)^m \frac{(q-2m-1)(q-2m-2)\dots(q-2m-h)}{m!} \times$$

$$\times \frac{(x-q+2m-1)(x-q+2m-2)\dots(x-q+2m-s+h)}{2^{m-s+h+1}} \times$$

$$\times \frac{(s'+q-2m'-1)(s'+q-2m'-2)\dots(s'-\lambda+1)}{(q+s'-m'-\lambda-j)!(j-m'-\lambda)!}, \quad s'=x-1. \quad (4.50)$$

Подставляя, наконец, разложения (4.48), (4.49) и (4.37) в формулу (4.35), получим разложение главной части пертурбационной функции $\frac{1}{\Delta}$ в виде:

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{2}{a} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} b_{pq}^{(1)} \sum_{r=0}^{\infty} A_{pr}^{(1)} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} e^s e_j^t \sum_{n=p+q+s+t}^{\infty} [C_s(n, p, x) + C'_s(n, p, x) \sqrt{1-e^2}] \times$$

$$\times [C_r(n', q, -x+1) + \sqrt{1-e_j^2} C'_r(n', q, -x+1)] \cos(nE + n'E_j + p\omega - q\Omega + r\tau). \quad (4.51)$$

Особенностью такого разложения пертурбационной функции является прежде всего то, что коэффициентами при соответствующих степенях эксцентриситетов и отношений полуосей будут тригонометрические полиномы. Этот результат мы уже получали при разложении пертурбационной функции в круговой задаче. Для эллиптической же задачи интересно отметить еще одну особенность, а именно то, что и по эксцентриситету возмущающей точки e_j тоже получается не бесконечный ряд, а многочлен, если оставить $\frac{1}{\Delta}$ в формуле (4.51), т. е. не разлагать в ряд $\sqrt{1-e_j^2}$.

Как было указано в работе (Еленевская, 1952), данное разложение особенно удобно для спутниковых задач, когда отношение $\frac{a}{a_j}$ мало. В эллиптической задаче такое разложение позволит учесть все неравенства, зависящие от эксцентриситета возмущающего тела, например эксцентриситета солнечной (или, что то же, земной) орбиты в теории Луны.

Именно поэтому нами и оставлен неразложенным $\sqrt{1-e_j^2}$ в формуле (4.51), в то время как $\sqrt{1-e^2}$ удобнее разложить, потому что по e мы получаем бесконечный ряд независимо от этого корня. Для случая внутреннего варианта будет как раз наоборот: мы будем иметь бесконечный ряд по e_j и многочлен по e , и коэффициенты c_s, c_r, c'_s и c'_r помножаются местами. Разложение $\frac{1}{\Delta}$ в этом случае будет иметь вид:

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{2}{a_j} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} b_{pq}^{(1)} \sum_{r=0}^{\infty} A_{pr}^{(1)} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} e^s e_j^t \sum_{n=p+q+s+t}^{\infty} [c_s(n, p, -x+1) +$$

$$+ \sqrt{1-e^2} c'_s(n, p, -x+1)] \cdot [c_r(n', q, x) +$$

$$+ \sqrt{1-e_j^2} c'_r(n', q, x)] \cos(nE + n'E_j + p\omega - q\Omega + r\tau). \quad (4.52)$$

Именно поэтому нам кажется, что разложение пертурбационной функции при помощи функций $J_n(x, e)$ удобнее, чем при помощи метода Ньюкома. Кроме того, вычисление коэффициентов c_s значительно проще вычисления операторов Ньюкома, и, наконец, здесь мы имеем возможность писать общий член разложения.

§ 4. Разложение дополнительной части пертурбационной функции

Разложение дополнительной части, как и всегда, приводится достаточно элементарно. В самом деле, мы имеем формулу:

$$R_1 = \frac{r \cos \theta}{(r^2)^2} = \frac{a}{a_j^2} \frac{(1-e \cos E)}{(1-e_j \cos E_j)^2} \quad (4.53)$$

или:

$$R_1 = \frac{r \cos \theta}{(r^2)^2} = \frac{a}{a_j^2} [\cos(v+\omega) \cos(v_j-\Omega) + \sin(v+\omega) \sin(v_j-\Omega) \cos i] \frac{(1-e \cos E)}{(1-e_j \cos E_j)^2} =$$

$$= \frac{a}{a_j^2} \frac{(1-e \cos E)}{(1-e_j \cos E_j)^2} \sum_{p,q,r=-1}^1 A_{pr}^{(1)} \cos(pv + p\omega + qv_j - q\Omega + r\tau). \quad (4.54)$$

Выделим сначала из общей суммы синус и косинус истинной аномалии. Мы получим:

$$R_1 = \frac{a}{a_j^2} \frac{(1-e \cos E)}{(1-e_j \cos E_j)^2} \sum_{p,q,r=-1}^1 A_{pr}^{(1)} [\cos pv \cos(p\omega + qv_j - q\Omega + r\tau) -$$

$$- \sin pv \sin(p\omega + qv_j - q\Omega + r\tau)], \quad (4.55)$$

$$R_1 = \frac{a}{a_j^2} \frac{1}{(1-e_j \cos E_j)^2} \sum_{p,q,r=-1}^1 A_{pr}^{(1)} [F_p(-1, p, e) + \Phi_p(-1, p, e)] \times$$

$$\times \cos(nE + p\omega + qv_j - q\Omega + r\tau). \quad (4.56)$$

Поступая затем так же с величиной v_j , получим:

$$R_1 = \frac{a}{a_j^2} \frac{1}{(1-e_j \cos E_j)^2} \sum_{p,q,r=-1}^1 A_{pr}^{(1)} [F_p(-1, p, e) + \Phi_p(-1, p, e)] \times$$

$$\times [\cos qv_j \cos(nE + p\omega - q\Omega + r\tau) - \sin qv_j \sin(nE + p\omega - q\Omega + r\tau)] =$$

$$= \frac{a}{a_j^2} \sum_{p,q,r=-1}^1 A_{pr}^{(1)} \sum_{n=-20}^{\infty} [F_p(-1, p, e) + \Phi_p(-1, p, e)] [F_r(2, q, e_j) + \Phi_r(2, q, e_j)] \times$$

$$\times \cos(nE + n'E_j + p\omega - q\Omega + r\tau). \quad (4.57)$$

$F_p(-1, p, e)$, $\Phi_p(-1, p, e)$ имеют чрезвычайно простые выражения, именно:

$$F_{-1}(-1, -1, e) = F_{-1}(-1, 1, e) = F_1(-1, -1, e) = F_1(-1, 1, e) = \frac{1}{2},$$

$$F_0(-1, -1, e) = F_0(-1, 1, e) = -e,$$

$$\Phi_{-1}(-1, -1, e) = \Phi_{-1}(-1, 1, e) = \frac{1}{2} \sqrt{1-e^2},$$

$$\Phi_{-1}(-1, 1, e) = \Phi_{-1}(-1, -1, e) = -\frac{1}{2} \sqrt{1-e^2},$$

$$\Phi_0(-1, 1, e) = \Phi_0(-1, -1, e) = 0.$$

Что касается $F_{\nu}(2, q, e_j)$ и $\Phi_{\nu}(2, q, e_j)$, то тут дело обстоит сложнее. Выразим $F_{\nu}(2, q, e_j)$ и $\Phi_{\nu}(2, q, e_j)$ через функции $J_{\nu}^*(\alpha, e)$. Мы имеем:

$$\frac{\cos q_j}{(1 - e_j \cos E_j)^3} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_{\nu}^*(2, 1, e_j) \cos n E_j,$$

где

$$\begin{aligned} F_{\nu}^*(2, 1, e_j) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos E_j - e_j}{(1 - e_j \cos E_j)^3} \cos n E_j dE_j = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(n-1)E_j + \cos(n+1)E_j - 2e_j \cos n E_j}{(1 - e_j \cos E_j)^3} dE_j = \\ &= \frac{1}{2} [J_{n-1}^*(3, e_j) + J_{n+1}^*(3, e_j)] - e_j J_n^*(3, e_j) \end{aligned}$$

или, по свойству функций $J_{\nu}^*(\alpha, e)$,

$$F_{\nu}^*(2, 1, e_j) = \frac{1}{2} \frac{d}{de_j} J_{\nu}^*(2, e_j) - e_j J_{\nu}^*(3, e_j). \quad (4.59)$$

Далее

$$\frac{\sin q_j}{(1 - e_j \cos E_j)^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi_{\nu}^*(2, 1, e_j) \sin n E_j,$$

где

$$\Phi_{\nu}^*(2, 1, e_j) = \frac{\sqrt{1-e_j^2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin E_j \sin n E_j}{(1 - e_j \cos E_j)^2} dE_j =$$

$$\frac{\sqrt{1-e_j^2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(n-1)E_j - \cos(n+1)E_j}{(1 - e_j \cos E_j)^2} dE_j = \frac{\sqrt{1-e_j^2}}{2\pi} [J_{n-1}^*(3, e_j) - J_{n+1}^*(3, e_j)].$$

Воспользовавшись рекуррентными соотношениями между функциями $J_{\nu}^*(\alpha, e)$, получим:

$$\Phi_{\nu}^*(2, 1, e_j) = \frac{e_j}{2\pi} \sqrt{1-e_j^2} J_{\nu}^*(2, e_j). \quad (4.60)$$

Итак, для получения полного разложения пертурбационной функции необходимо внести в формулу разложения ее главной части $\frac{1}{\Delta}$ коэффициент

$$2b_{\nu}^{(0)} [F_{\nu}(2, p, e) + \Phi_{\nu}(2, p, e)] [F_{\nu}^*(-1, q, e_j) + \Phi_{\nu}^*(-1, q, e_j)]$$

через

$$\begin{aligned} 2b_{\nu}^{(0)} [F_{\nu}(2, p, e) + \Phi_{\nu}(2, p, e)] [F_{\nu}^*(-1, q, e_j) + \Phi_{\nu}^*(-1, q, e_j)] - \\ - \frac{e_j}{2\pi} [F_{\nu}^*(-1, p, e) + \Phi_{\nu}^*(-1, p, e)] [F_{\nu}(2, q, e_j) + \Phi_{\nu}(2, q, e_j)]. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Выражения для функций $F_{\nu}(-1, p, e)$ и $\Phi_{\nu}(-1, p, e)$ даются формулами (4.58), а для функций $F_{\nu}(2, q, e_j)$ и $\Phi_{\nu}(2, q, e_j)$ — формулами (4.59) и (4.60).

480

Если же мы хотим получить разложение R_1 по степеням эксцентриситета, то нужно просто подставить в формулу (4.61) выражения для $F_{\nu}(-1, p, e)$, $\Phi_{\nu}(-1, p, e)$, $F_{\nu}(2, q, e_j)$ и $\Phi_{\nu}(2, q, e_j)$ из формул (4.58), (4.59) и (4.60), причем в формулах (4.59) и (4.60) надо заменить функции $J_{\nu}^*(\alpha, e_j)$ и производные от них их выражениями при помощи бесконечных рядов по e_j .

Мы видим, что в случае внешнего варианта ограниченной эллиптической задачи трех тел дополнительная часть R_1 порождает нам разложение пертурбационной функции R в том смысле, что разложение по e_j уже будет не многочленом, а бесконечным рядом. Зато для внутреннего варианта мы будем иметь многочлен по степеням e (если не считать $\sqrt{1-e^2}$), причем члены, содержащие e в дополнительной части, будут очень просты. Они даются формулами (4.58). Как уже было указано, внутренний вариант (спутниковые задачи) является для нас наиболее интересным.

Тем не менее, мы и для внешнего варианта можем получить конечные выражения относительно e_j , если взять разложение дополнительной части в формуле (4.56). Оно, правда, сложнее обычного ряда с числовыми коэффициентами, но все же представляет собой (в сочетании с разложением $\frac{1}{\Delta}$) явное выражение пертурбационной функции через асимптоты, что и требуется для интегрирования уравнения Лагранжа.

§ 5. Разложение пертурбационной функции в неограниченной задаче n тел

Пертурбационная функция в неограниченной задаче n тел представляет собой сумму $n-2$ членов совершенно одинаковой конструкции, именно:

$$R_g = k^2 \sum_{i=1}^{n-1} m_i \left(\frac{1}{\Delta_{gi}} - \frac{r_i \cos \theta_i}{r_i^2} \right), \quad g \neq s, \quad (4.62)$$

где

$$\Delta = \sqrt{r_s^2 + r_g^2 - 2r_s r_g \cos \theta_s},$$

k^2 — постоянная Гаусса, r_s и r_g — соответствующие радиус-векторы точек s и g , а θ_s — угол между этими радиус-векторами.

Из формулы (4.62) видно, что получив разложение для одного из членов суммы, мы получаем разложение для всех остальных членов простой заменой индексов. Поэтому рассмотрим разложение только одного из таких членов.

Принципиальным отличием неограниченной схемы от всех ограниченных является то, что здесь мы не можем выбрать за основную плоскость плоскость движения какой-нибудь точки, потому что ни одно из движений в данном случае уже не будет плоским.

Рассмотрим положение оскулирующих орбит трех точек с индексами 0, 1, 2 в некоторый фиксированный момент времени (см. рисунок).

Здесь положено: Ω_1 , Ω_2 — восходящие узлы оскулирующих орбит, i_1 , i_2 — наклонность орбит к некоторой основной плоскости, P_1 , P_2 — перигелии орбит, P_1 , P_2 — положения движения точек, θ_s — угол между радиус-векторами точек.

Взаимная наклонность оскулирующих орбит.

Считая, что движение происходит относительно точки с индексом 0 (Солнце), получим член пертурбационной функции для точки с индексом 1, зависящий от притяжения точки с индексом 2, в виде:

$$R_{12}^{(0)} = k^2 m_2 \left(\frac{1}{\Delta_{12}} - \frac{r_1 \cos \theta_1}{r_1^2} \right). \quad (4.63)$$

481

Соответствующий член пертурбационной функции для точки с индексом 2 будет:

$$R_2^{(1)} = k^2 m_1 \left(\frac{1}{a_{2,1}} - \frac{r_2 \cos \theta_1}{r_1^2} \right). \quad (4.64)$$

$$\Delta_{2,1} = \Delta_{1,2}.$$

Обозначим долготы планет в орбитах через ω_1 и ω_2 . Эти долготы можно представить в виде:

$$\omega_1 = \tau_1 + W_1, \quad \omega_2 = \tau_2 + W_2,$$

где $\tau_1 = \Omega_1 + N_1$, $\tau_2 = \Omega_2 + N_2$, а W_1 и W_2 суть долготы планет, считающиеся от точки перигелиев орбит от точки их пересечения, а v_1 и v_2 — истинные аномалии планет.

Из сферического треугольника $\Omega_1 \Omega_2 \kappa$ легко можно найти

$$\cos \theta_1 = \cos W_1 \cos W_2 + \sin W_1 \sin W_2 \cos I, \quad (4.65)$$

или

$$\cos \theta_1 = \cos(v_1 + \Pi_1) \cos(v_2 + \Pi_2) + \sin(v_1 + \Pi_1) \sin(v_2 + \Pi_2) \cos I. \quad (4.66)$$

Из сопоставления формул (4.63), (5.64) и (5.66) с формулами (5.12) и (5.13) мы видим, что их структура совершенно аналогична. Поэтому мы сразу можем написать разложение для $\Delta_{1,2}$ в виде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta_{1,2}} = & \frac{2}{a_1} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} b_{k,l}^{(1)} \sum_{p,q,r=0}^k A_{p,q,r}^{(1)} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{x=0}^{\infty} [F_s(x, p, e) + \Phi_s(x, p, e)] \cdot \\ & \times [F_s(-x+1, q, e) + \Phi_s(-x+1, q, e)] \cdot \cos(n_1 E_1 + n_2 E_2 + p \Pi_1 + q \Pi_2 + r f). \end{aligned}$$

Или же в виде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta_{1,2}} = & \frac{2}{a_1} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} b_{k,l}^{(1)} \sum_{p,q,r=0}^k A_{p,q,r}^{(1)} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{x=0}^{\infty} e_1^s e_2^x \sum_{n_1=p+q, n_2=r}^{s+x} [C_s(n_1, p, x) + \\ & + \sqrt{1-e_1^2} C_s(n_1, p, x)] \times [C_s(n_2, q, -x+1) + \sqrt{1-e_2^2} C_s(n_2, q, -x+1)] \times \\ & \times \cos(n_1 E_1 + n_2 E_2 + p \Pi_1 + q \Pi_2 + r f). \end{aligned} \quad (4.67)$$

Здесь $x = k + 2l + 1$, $s = x - 1 = k + 2l$. Здесь нам нет смысла разделять наружный и внутренний варианты задачи, так как мы всегда сможем переменить обозначения так, чтобы было $r_1 > r_2$. В этой задаче также нет смысла оставлять неразложимыми $\sqrt{1-e^2}$, так как мы не различаем здесь возмущающей и возмущаемой точек.

Поэтому формулу (4.67) удобнее переписать в виде:

$$\frac{1}{\Delta_{1,2}} = \frac{2}{a_1} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} b_{k,l}^{(1)} \sum_{p,q,r=0}^k A_{p,q,r}^{(1)} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{x=0}^{\infty} e_1^s e_2^x \sum_{n_1=p+q, n_2=r}^{s+x} [C_s(n_1, p, x) + \bar{C}_s(n_1, p, x)] \times$$

$$\times [C_s(n_2, q, -x+1) + \bar{C}_s(n_2, q, -x+1)] \cdot \cos(n_1 E_1 + n_2 E_2 + p \Pi_1 + q \Pi_2 + r f). \quad (4.68)$$

Причем здесь \bar{C}_s определяется по тем же формулам, что и C_s , после замены в последних x на $-x+1$ [см. часть II, § 9, формулы (2.96) и (2.98)].

Объединяя, наконец, все числовые коэффициенты при соответствующих членах в один и считая их исправленными за разложение дополнительной части, получим:

$$R_1^{(1)} = \frac{2}{a_1} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} b_{k,l}^{(1)} \sum_{p,q,r=0}^k \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{n_1=p+q, n_2=r}^{s+x} D_{p,q,r}^{s,s,x,x} \cos(n_1 E_1 + n_2 E_2 + p \Pi_1 + q \Pi_2 + r f). \quad (4.69)$$

Интересно отметить, что функция $R_1^{(1)}$, зависящая от двенадцати элементов, после ее разложения представлялась девятикратным рядом. Это произошло потому, что, во-первых, разложение велось по отношению полуосей, во-вторых, по взаимной наклонности, и в-третьих, как будет показано дальше, элементы Ω_1 и Ω_2 входят в разложение только в комбинации $\Omega_1 - \Omega_2$.

§ 6. Преобразование уравнений Лагранжа

В предыдущем параграфе мы получили разложение пертурбационной функции в формуле (4.69), нам остается теперь выразить Π_1 и Π_2 через элементы орбит (Π_1 и Π_2 суть расстояния перигелиев оскулирующих орбит от точки их пересечения). Из рисунка видно, что $\Pi_1 = \tau_1 - \tau_2$, $\Pi_2 = \tau_2 - \tau_1$, где τ_1 и τ_2 — долготы перигелиев и $\tau_1 = \Omega_1 + N_1$, $\tau_2 = \Omega_2 + N_2$. Мы можем выразить величины N_1 и N_2 через элементы орбит по формулам:

$$\begin{aligned} \sin \frac{f}{2} \sin \frac{(N_1 + N_2)}{2} &= \sin \frac{1}{2} (\Omega_2 - \Omega_1) \sin \frac{1}{2} (i_2 + i_1), \\ \sin \frac{f}{2} \cos \frac{(N_1 + N_2)}{2} &= \cos \frac{1}{2} (\Omega_2 - \Omega_1) \sin \frac{1}{2} (i_2 - i_1), \\ \cos \frac{f}{2} \sin \frac{(N_1 - N_2)}{2} &= \sin \frac{1}{2} (\Omega_2 - \Omega_1) \cos \frac{1}{2} (i_2 - i_1), \\ \cos \frac{f}{2} \cos \frac{(N_1 - N_2)}{2} &= \cos (\Omega_2 - \Omega_1) \cos \frac{1}{2} (i_2 - i_1). \end{aligned} \quad (4.70)$$

Однако это приводит к чрезвычайно громоздким выражениям. Кроме того, в этом случае надо выражать через элементы орбиты и взаимную наклонность f , а это испортит нам простую зависимость от наклонности. Поэтому мы считаем более удобным применить преобразование, аналогичное преобразованию Леверье при разложении пертурбационной функции по степеням $\sin^2 \frac{f}{2}$. Именно, полагаем

$$\omega_1 = \tau_1 + \tau_2 - \tau_1 = \Pi_1 + \tau_2, \quad (4.71)$$

получим:

$$\Pi_1 = \omega_1 - \tau_2, \quad \Pi_2 = \tau_2 - \tau_1.$$

Положим для сокращения

$$\cos(n_1 E_1 + n_2 E_2 + p \Pi_1 + q \Pi_2 + r f) = \cos \chi. \quad (4.72)$$

Тогда $\cos \chi$ можно записать в виде.

$$\begin{aligned} \cos \chi &= \cos(n_1 E_1 + n_2 E_2 + p \omega_1 - p \tau_2 + q \tau_2 - q \tau_1 + r f) = \\ &= \cos(n_1 E_1 + n_2 E_2 + p \omega_1 + p(\tau_2 - \tau_1) + q \tau_2 - (p+q) \tau_1 + r f). \end{aligned} \quad (4.73)$$

Так как разность $\tau_2 - \tau_1$ зависит только от $i_1, i_2, \Omega_2 - \Omega_1$ (Субботин, 1937), то очевидно, что $\frac{\partial R_2}{\partial \tau_2} = \frac{\partial R_1}{\partial \tau_1}$.

Напишем уравнения Лагранжа в форме:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \cdot \frac{\partial R}{\partial a}, \\ \frac{de}{dt} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2} \cdot \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{e\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{1}{na^2} \cdot \frac{\partial R}{\partial e}, \\ \frac{di}{dt} &= -\frac{\cos i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{\partial R}{\partial \Omega} - \frac{\frac{1}{2} \lg \frac{1}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \left(\frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{\partial R}{\partial e} \right), \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{\cos i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{\partial R}{\partial i}, \\ \frac{d\pi}{dt} &= -\frac{\frac{1}{2} \lg \frac{1}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{\partial R}{\partial i} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \cdot \frac{\partial R}{\partial e}, \\ \frac{d\epsilon}{dt} &= -\frac{2}{na} \cdot \frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\frac{1}{2} \lg \frac{1}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{\partial R}{\partial i} + \frac{e\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{1}{na^2} \cdot \frac{\partial R}{\partial e}. \end{aligned} \quad (4.74)$$

Для простоты мы здесь опустим индексы при элементах и пертурбационных функциях R_n . Так как $\cos i$ не зависит явно от i и Ω , то производные от R по этим элементам надо заменять производными по τ_2, τ_1 и f . Учитывая соотношения (4.71), получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial i_1} &= \frac{\partial R}{\partial \tau_2} \cdot \frac{\partial \tau_2}{\partial i_1} + \frac{\partial R}{\partial \omega_1} \cdot \frac{\partial (\tau_2 - \tau_1)}{\partial i_1} + \frac{\partial R}{\partial f} \cdot \frac{\partial f}{\partial i_1}, \\ \frac{\partial R}{\partial \Omega_1} &= \frac{\partial R}{\partial \tau_2} \cdot \frac{\partial \tau_2}{\partial \Omega_1} + \frac{\partial R}{\partial \omega_1} \cdot \frac{\partial (\tau_2 - \tau_1)}{\partial \Omega_1} + \frac{\partial R}{\partial f} \cdot \frac{\partial f}{\partial \Omega_1}. \end{aligned} \quad (4.75)$$

Вспользовавшись дифференциальными формулами сферической тригонометрии применительно к сферическому треугольнику $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ получим:

$$\begin{aligned} df &= -\cos(\tau_1 - \Omega_1) d\tau_1 + \cos(\tau_2 - \Omega_2) d\tau_2 + \sin i_2 \sin(\tau_2 - \Omega_2) d(\Omega_2 - \Omega_1), \\ df &= -\cos(\tau_1 - \Omega_1) d\tau_1 + \cos(\tau_2 - \Omega_2) d\tau_2 + \sin i_1 \sin(\tau_1 - \Omega_1) d(\Omega_2 - \Omega_1), \\ \sin f d(\tau_1 - \Omega_1) &= \cos f \sin(\tau_1 - \Omega_1) d\tau_1 - \sin(\tau_2 - \Omega_2) d\tau_2 + \sin i_2 \cos(\tau_2 - \Omega_2) d(\Omega_2 - \Omega_1), \\ \sin f d(\tau_2 - \Omega_2) &= \sin(\tau_1 - \Omega_1) d\tau_1 - \cos f \sin(\tau_2 - \Omega_2) d\tau_2 + \sin i_1 \cos(\tau_1 - \Omega_1) d(\Omega_2 - \Omega_1). \end{aligned} \quad (4.76)$$

Отсюда вычисляем нужные нам частные производные.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial i_1} &= -\cos(\tau_1 - \Omega_1), \\ \frac{\partial \tau_2}{\partial i_1} &= \frac{\sin(\tau_1 - \Omega_1)}{\sin f}, \\ \frac{\partial (\tau_2 - \tau_1)}{\partial i_1} &= \frac{1}{\sin f} \sin(\tau_1 - \Omega_1), \\ \frac{\partial f}{\partial \Omega_1} &= -\sin i_1 \sin(\tau_1 - \Omega_1), \\ \frac{\partial \tau_2}{\partial \Omega_1} &= -\frac{\sin i_1 \cos(\tau_1 - \Omega_1)}{\sin f}, \\ \frac{\partial (\tau_2 - \tau_1)}{\partial \Omega_1} &= -1 + \cos i_1 - \sin i_1 \cos(\tau_1 - \Omega_1) \frac{1}{\sin f}. \end{aligned} \quad (4.77)$$

Подставляя полученные производные в формулу (4.76), получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_1}{\partial i_1} &= \frac{\partial R_1}{\partial \tau_2} \frac{\sin(\tau_1 - \Omega_1)}{\sin f} + \frac{\partial R_1}{\partial \omega_1} \frac{1}{\sin f} \sin(\tau_1 - \Omega_1) - \frac{\partial R_1}{\partial f} \cos(\tau_1 - \Omega_1), \\ \frac{\partial R_1}{\partial \Omega_1} &= -\frac{\partial R_1}{\partial \tau_2} \frac{\sin i_1 \cos(\tau_1 - \Omega_1)}{\sin f} + \frac{\partial R_1}{\partial \omega_1} [-1 + \cos i_1 - \sin i_1 \cos(\tau_1 - \Omega_1) \frac{1}{\sin f}] - \\ &\quad - \frac{\partial R_1}{\partial f} \sin i_1 \sin(\tau_1 - \Omega_1). \end{aligned} \quad (4.78)$$

Заменяя теперь в уравнениях (4.74) производные по i, Ω их выражениями (4.78). Мы получим, снова опуская индексы:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \cdot \frac{\partial R}{\partial a}, \\ \frac{de}{dt} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2} \cdot \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{\cos i \frac{1}{2} \lg \frac{1}{2}}{na^2} \cdot \frac{\partial R}{\partial e}, \\ \frac{di}{dt} &= -\frac{\sec i \cos i}{na^2} \left\{ -\frac{\partial R}{\partial \tau_2} \frac{\sin i \cos(\tau - \Omega)}{\sin f} + \frac{\partial R}{\partial \omega_1} [\cos i - 1 - \sin i \cos(\tau - \Omega) \frac{1}{\sin f}] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial R}{\partial f} \sin i \sin(\tau - \Omega) \right\} - \frac{\frac{1}{2} \lg \frac{1}{2}}{na^2} \sec i \left(\frac{\partial R}{\partial \omega} + \frac{\partial R}{\partial e} \right), \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{\cos i}{na^2} \sec i \left\{ \frac{\sin(\tau - \Omega)}{\sin f} \cdot \frac{\partial R}{\partial \tau_2} + \frac{1}{\sin f} \sin(\tau - \Omega) \frac{\partial R}{\partial \omega_1} - \cos(\tau - \Omega) \frac{\partial R}{\partial f} \right\}, \\ \frac{d\pi}{dt} &= \frac{\frac{1}{2} \lg \frac{1}{2}}{na^2} \sec i \left\{ \frac{\sin(\tau - \Omega)}{\sin f} \frac{\partial R}{\partial \tau_2} + \frac{1}{\sin f} \sin(\tau - \Omega) \frac{\partial R}{\partial \omega} - \cos(\tau - \Omega) \frac{\partial R}{\partial f} \right\} + \\ &\quad + \frac{\frac{1}{2} \lg \frac{1}{2}}{na^2} \frac{\partial R}{\partial e}, \\ \frac{d\epsilon}{dt} &= \frac{2}{na^2} \cdot \frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\sec i \frac{1}{2} \lg \frac{1}{2}}{na^2} \left[\frac{\sin(\tau - \Omega)}{\sin f} \cdot \frac{\partial R}{\partial \tau_2} + \frac{1}{\sin f} \sin(\tau - \Omega) \frac{\partial R}{\partial \omega_1} - \right. \\ &\quad \left. - \cos(\tau - \Omega) \frac{\partial R}{\partial f} \right] + \frac{\cos i \frac{1}{2} \lg \frac{1}{2}}{na^2} \frac{\partial R}{\partial e}. \end{aligned} \quad (4.79)$$

Через τ обозначено τ с индексом возмущающей точки.

Пологая, согласно Леверье,

$$\begin{aligned} \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} &= \frac{dL}{dt}, & \frac{1}{na^2} \cos i \frac{\partial R}{\partial e} &= \frac{dP_1}{dt}, \\ -\frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial e} &= \frac{dP_2}{dt}, & \frac{\sec i}{na^2} \frac{\partial R}{\partial f} &= \frac{dP_3}{dt}, \\ -\frac{1}{na^2} \frac{\partial R}{\partial \omega} \frac{1}{\sin f} &= \frac{dP_4}{dt}, & \frac{\sec i}{na^2 \sin f} \frac{\partial R}{\partial \tau_2} &= \frac{dT}{dt}, \\ \frac{\sec i}{na^2} \frac{1}{2} \lg \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial \omega_1} &= \frac{dV}{dt}, \end{aligned}$$

приводим уравнения (4.79) к виду:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{dL}{dt}, \\ \frac{de}{dt} &= \frac{dP_3}{dt} - \frac{1}{2a} \cos \tau \lg \frac{e}{2} \frac{dL}{dt}, \\ \frac{di}{dt} &= \sin(\tau - \Omega) \frac{dP_4}{dt} + \cos(\tau - \Omega) \left(\frac{dT}{dt} + \frac{dV}{dt} \right) - \frac{\lg \frac{e}{2} \sec \tau}{2a} \frac{dL}{dt}, \\ \sin i \frac{d\Omega}{dt} &= -\cos(\tau - \Omega) \frac{dP_4}{dt} + \sin(\tau - \Omega) \left(\frac{dT}{dt} + \frac{dV}{dt} \right), \\ \frac{d\tau}{dt} &= \frac{dP_2}{dt} + e \sin i \lg \frac{e}{2} \frac{d\Omega}{dt}, \\ \frac{d\tau}{dt} &= -\frac{dP_1}{dt} + \lg \frac{e}{2} \frac{d\tau}{dt} + \sin i \lg \frac{e}{2} \frac{d\Omega}{dt}. \end{aligned} \quad (4.80)$$

Мы получили систему уравнений (порядок которой зависит от числа взаимно гравитирующих точек) такую, что производные, стоящие в правых частях зависят от величин: τ, τ', τ'' и i .

Разложение пертурбационной функции в пространственной неограниченной задаче n точек может быть теперь написано в виде:

$$R_0 = k^2 \sum_{s=1}^{n-1} m_s R_s^{(s)}, \quad s \neq g, \quad (4.81)$$

где

$$\begin{aligned} R_s^{(s)} &= \sum_{n_s=0}^{\infty} \sum_{l_s=0}^{\infty} b_{l_s}^{(s)} \sum_{p_s=0}^{\infty} \sum_{q_s=0}^{\infty} \sum_{r_s=0}^{\infty} \sum_{\tau_s=0}^{\infty} \sum_{\nu_s=0}^{\infty} D_{l_s p_s q_s r_s \tau_s \nu_s}^{(s)} \cos \chi, \\ \cos \chi &= \cos [n_s E_s + n_p E_p + p \tau_s + q \tau_p + r(\tau_s - \tau_p) - (p+q)\tau_s], \\ D_{l_s p_s q_s r_s \tau_s \nu_s}^{(s)} &= A_{l_s p_s q_s r_s \tau_s \nu_s}^{(s)} \bar{C}_{n_s}(p, x, \tau_s) \bar{C}_{n_p}(q, -x+1, \tau_s), \\ C_{n_s}(p, x, \tau_s) &= C_{n_s}(n_s, p, x) + C_{n_s}(n_s, p, x), \\ C_{n_s}(q, -x+1, \tau_s) &= C_{n_s}(n_s, q, -x+1) + \bar{C}_{n_s}(n_s, q, -x+1). \end{aligned}$$

Коэффициенты C_s и \bar{C}_s определяются формулами (2.96), (2.98) части II этой работы¹ и формулами (4.47) и (4.50) этой части.

Все преимущества такого способа разложения, которые имели место для круговой и эллиптической задачи трех точек, остаются в силе и для неограниченной задачи n точек.

ЛИТЕРАТУРА

- Еленинская Н. Б. 1949. О коэффициентах разложения координат невозмущенного движения в ряд Фурье по кратным эксцентриситетам. Уч. зап. Лвовск. ун-та. 15, 4.
Еленинская Н. Б. 1952. Разложение пертурбационной функции в ряд Фурье относительно наклонов. Ч. I. Бюлл. ИТА. 5, 2 (68).
Еленинская Н. Б. 1953. Разложение пертурбационной функции по методу Ньютона. Труды АО АГУ. 6, 1.
Орлов Б. А. 1956. Разложение пертурбационной функции по методу Ньютона. Труды АО АГУ. 6, 1.
Субботин М. Ф. 1927. Курс небесной механики. 2. ОНТИ.
Newcomb S. 1895. Development of the Perturbative Function in Cosines of Multiples of the Mean Anomalies and of Angles between the Perihelia and Common Node and in Powers of the Eccentricities and Mutual Inclination. Astr. Pap., 5.

Получено в Редакцию
6 марта 1956 г.

¹ (Еленинская, 1953).

Симметричная траектория ракеты для полета вокруг Луны

Г. А. Чеботарев

Автором построена симметричная траектория для полета ракеты вокруг Луны с возвращением на Землю без затраты горючего в пути.

A SYMMETRICAL ORBIT FOR A FLIGHT AROUND THE MOON, by G. Chebotarev. — In this article the orbit of a rocket for the flight around the moon is calculated. By means of numerical integration the effects of the earth's and moon's gravitational fields are taken into account. No fuel expense is required during the trip.

§ 1. Постановка задачи

В работе решена следующая задача: определить начальные условия движения, при которых ракета, находящаяся при $t=0$ на поверхности Земли, совершит полет вокруг Луны и вернется на Землю без затраты горючего в пути.

Поместим начало координат в центр Земли; за плоскость xy примем плоскость орбиты Луны. Пренебрегая эксцентриситетом лунной орбиты, будем рассматривать движение Луны, как круговое.

Возмущения Солнца и планеты лежат за пределами точности вычислений, принятой в настоящей работе. Сделанные упрощения не имеют принципиального характера и легко могут быть учтены в случае необходимости.

Пусть в начальный момент t_0 Луна и ракета находятся на оси x , причем расстояние ракеты от Земли x^0 больше, чем расстояние Луны от Земли x^L , а скорость ракеты равна нулю. При отсутствии возмущений со стороны Луны ракета, двигаясь по оси x , достигнет поверхности Земли со скоростью, которая равна скорости, необходимой для того, чтобы забросить ракету на исходную высоту x^0 .

Возмущения Луны деформируют прямолинейную траекторию ракеты, и ракета при своем движении на некотором расстоянии r_{\min} от центра Земли.

Очевидно, что увеличивая начальное значение x^0 , мы увеличиваем расстояние ракеты от Луны $\Delta x = x^0 - x^L$ и этим самым уменьшаем лунные возмущения. Путем последовательных приближений можно добиться того, чтобы выполнялось неравенство

$$r_{\min} < R,$$

где R — радиус Земли.

Изменим теперь движение Луны на обратное. Тогда ракета, двигаясь из точки x^0 , опишет новую траекторию, симметричную только что построенной. Положение и скорость ракеты в момент падения будут начальными условиями, необходимыми для того, чтобы забросить ракету в положение x^0 . Обратное движение Луны при этом необходимо заменить на прямое.

Таким образом, построена траектория, состоящая из двух симметричных ветвей, для полета ракеты вокруг Луны с возвращением на поверхность Земли.

В работе приняты следующие численные значения для астрономических постоянных:

| | |
|--|---------------------|
| средний радиус Лунной орбиты | $a_1 = 384400$ км |
| период обращения Луны | $P_1 = 655.72$ часа |
| масса Луны | $m_1 = 0.012277$ |
| радиус Земли | $R = 6378$ км |
| радиус Луны | $R_1 = 1740$ км |

Принята система единиц: километр, час, масса Земли. В этой системе численное значение постоянной Гаусса будет равно:

$$k = 2.2699 \times 10^6.$$

Все вычисления ведутся с пятью десятичными знаками.

§ 2. Первое приближение

В первом приближении расстояние ракеты от Земли, при $t=0$, принято равным 400 000 км. Поэтому начальные условия интегрирования определяются следующими данными:

$$\left. \begin{aligned} x^0 &= 400\,000 \text{ км}, & \dot{x}_0 &= 0, \\ y^0 &= 0, & \dot{y}_0 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Начальное расстояние ракеты от центра Луны $\Delta^0 = 15600$ км. Численное интегрирование велось методом Куталы по хорошо известным формулам:

$$\left. \begin{aligned} x &= f^{-1} + 0.083333f, \\ y &= g^{-1} + 0.083333g, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где

$$\left. \begin{aligned} f &= \omega^2 k^2 m_1 \frac{x_1^2}{\Delta^3} + X, \\ g &= \omega^2 k^2 m_1 \frac{y_1^2}{\Delta^3} + Y, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} X &= \omega^2 k^2 m_1 \frac{x_1^2}{\Delta^3}, \\ Y &= \omega^2 k^2 m_1 \frac{y_1^2}{\Delta^3}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Члены $X_1 = -\omega^2 k^2 m_1 \frac{x_1^2}{\Delta^3}$ и $Y_1 = -\omega^2 k^2 m_1 \frac{y_1^2}{\Delta^3}$ лежат на пределе точности вычисления и потому отброшены. Интервал интегрирования ω принят равным одному часу. При $t \geq 100$ часам возмущения становятся незначительными и дальнейшее движение ракеты может рассматриваться как невозмущенное. Для $t = 100$ часам численное интегрирование дает:

$$\left. \begin{aligned} x &= 40914 \text{ км}, & \dot{x} &= -9575, \\ y &= 72431 \text{ км}, & \dot{y} &= -3209, \\ r &= 83188 \text{ км}, & \Delta &= 301700 \text{ км}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

| t (часы) | x (в тыс. км) | y (в тыс. км) | r (в тыс. км) | x_1 (в тыс. км) | y_1 (в тыс. км) | Δ (в тыс. км) |
|---------------|--------------------|--------------------|--------------------|----------------------|----------------------|-------------------------|
| 18.07 | 169.4 | -36.6 | 173.3 | 221.0 | -314.5 | 282.7 |
| 28.07 | 221.9 | -34.6 | 224.6 | 250.1 | -291.9 | 258.8 |
| 38.07 | 264.1 | -31.1 | 265.9 | 276.9 | -266.6 | 235.3 |
| 48.07 | 299.0 | -26.7 | 300.2 | 301.1 | -238.9 | 212.1 |
| 58.07 | 328.1 | -22.0 | 328.8 | 322.6 | -209.0 | 187.1 |
| 68.07 | 352.4 | -17.2 | 352.8 | 341.1 | -177.2 | 160.3 |
| 78.07 | 372.6 | -12.4 | 372.8 | 356.5 | -143.8 | 132.0 |
| 88.07 | 389.0 | -7.8 | 389.1 | 368.6 | -109.0 | 103.0 |
| 98.07 | 401.9 | -3.8 | 401.9 | 377.4 | -73.2 | 73.6 |
| 108.07 | 411.1 | -0.9 | 411.0 | 382.6 | -36.8 | 45.7 |
| 118.07 | 414.9 | 0 | 414.9 | 384.4 | 0 | 30.5 |
| 128.07 | 410.3 | +0.5 | 410.3 | 382.6 | +36.8 | 45.6 |
| 138.07 | 400.4 | +3.5 | 400.4 | 377.4 | +73.2 | 73.4 |
| 148.07 | 386.8 | +7.6 | 386.8 | 368.6 | +109.0 | 103.0 |
| 158.07 | 369.6 | +12.3 | 369.6 | 356.5 | +143.8 | 132.0 |
| 168.07 | 348.6 | +17.2 | 348.6 | 341.1 | +177.2 | 160.2 |
| 178.07 | 323.3 | +22.2 | 323.3 | 322.6 | +209.0 | 186.8 |
| 188.07 | 293.2 | +27.0 | 293.2 | 301.1 | +238.9 | 212.0 |
| 198.07 | 257.0 | +31.4 | 257.0 | 276.9 | +266.6 | 236.0 |
| 208.07 | 213.2 | +34.9 | 213.2 | 250.1 | +291.9 | 259.5 |
| 218.07 | 158.2 | +36.7 | 162.7 | 221.0 | +314.5 | 284.7 |

Скорости выражены в единице времени, равной ω суткам, и их следует разделить на ωk перед выводом элементов. Элементы вычисляются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \dot{r} &= x\dot{x} + y\dot{y}, & e \sin E &= \frac{r}{\sqrt{a}}, \\ V^2 &= \dot{x}^2 + \dot{y}^2, & e \cos E &= r/V^2 - 1, \\ \frac{1}{a} &= \frac{2}{r} - V^2, & M &= E - e \sin E, \\ \sin \pi &= \frac{y}{r} \cos E - \dot{y} \sqrt{a} \sin E, \\ \cos \pi &= \frac{x}{r} \cos E - \dot{x} \sqrt{a} \sin E. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Интересующие нас параметры оскулирующего эллипса равны:

$$\left. \begin{aligned} a &= 235200 \text{ км}, \\ e &= 0.85980, \\ r_{\min} &= 32975 \text{ км}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Таким образом, ракета пролетит на расстояние 26 597 км от поверхности Земли.

§ 3. Второе приближение

Во втором приближении увеличиваем начальное расстояние ракеты от Луны, полагая $\Delta^0 = 31600$ км. Как показало интегрирование в первом приближении интервал ω может быть значительно увеличен. Полагаем поэтому $\omega = 2$ часа.

Начальные условия для второго приближения:

$$\left. \begin{aligned} x^0 &= 416000 \text{ км}, & \dot{x}_0 &= 0, \\ y^0 &= 0, & \dot{y}_0 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Для $t=100$ часов численное интегрирование дает следующие результаты:

$$\begin{aligned} x &= 169374 \text{ км}, & \dot{x} &= -11920, \\ y &= 36585 \text{ км}, & \dot{y} &= +134, \\ r &= 173280 \text{ км}, & \dot{r} &= 282670 \text{ км}. \end{aligned} \quad (9)$$

Вычисляем оскулирующую орбиту для $t=100$ часов.

$$\begin{aligned} a &= 215200 \text{ км}, & M &= -23^{\circ}70', \\ e &= 0.97598, & \pi &= 176^{\circ}82', \\ n &= 1^{\circ}303 \text{ (в час)}. \end{aligned} \quad (10)$$

Пренебрегая, как и в первом приближении, возмущениями при $t > 100$ часов, вычислим перигелиальное расстояние кометы:

$$r_{\text{min}} = 5169 \text{ км.}$$

Таким образом, ракета при своем движении обязательно коснется поверхности Земли.

Условия падения находим из равенства $r=R=6378 \text{ км}$.

$$\begin{aligned} M &= -0^{\circ}16', \\ V &= 11080 \text{ м/сек.} \end{aligned} \quad (11)$$

Зная среднюю угловую скорость ракеты n , легко вычислить, что расстояние $\Delta M = 23^{\circ}54'$ по невозмущенной траектории, от момента $t_{\text{ис}}$ до момента падения, ракета пройдет за время $\Delta t = 18.07$ часов. Таким образом, общее время движения от точки x^0 до момента падения на поверхность Земли составляет 118.07 часов, или 4.92 суток. В силу симметричности второй ветви траектории, относительно оси x , начальные условия движения для полета вокруг Луны определяются следующими параметрами:

$$\begin{aligned} a &= 215200 \text{ км}, & M &= +0^{\circ}16', \\ e &= 0.97598, & \pi &= 183^{\circ}18'. \end{aligned} \quad (12)$$

Начальная скорость $V_0 = 11080 \text{ м/сек}$. Общая продолжительность полета ракеты 236.14 часа или 9.84 суток. Наибольшее расстояние ракеты от Земли 416000 км. Наименьшее расстояние ракеты от поверхности Луны 293650 км.

В работе дано только схематическое решение поставленной задачи.

Дальнейшее исследование должно идти в трех направлениях:

1. Изучение устойчивости построенной траектории относительно начальных условий движения.
2. Изучение влияния ошибок принятых астрономических постоянных на движение ракеты.
3. Переход к реальной задаче в результате отказа от сделанных в настоящей работе упрощений.

§ 4. Контрольные вычисления

В заключительном разделе было проведено контрольное вычисление всего пути ракеты от старта на поверхности Земли до обратного возвращения на Землю. Исходными данными послужили эллиптические элементы (12). В течение первых 18.07 часов полета движение рассматривалось как невозмущенное. Основные величины, характеризующие возмущенное движение, приведенные в таблице. По числовым данным этой таблицы легко

виден эффект накопления ошибок в процессе численного интегрирования. Необходимо отметить также неточности исходных данных (12), которые получены в результате численного интегрирования. Оскулирующая эллиптическая орбита вычислена для момента $t_{\text{ис}}$:

$$\begin{aligned} a &= 214247 \text{ км}, \\ e &= 0.97524, \\ r_{\text{min}} &= 5313 \text{ км.} \end{aligned} \quad (13)$$

Таким образом, ракета при своем движении по невозмущенной орбите коснется поверхности Земли. Контрольные вычисления выполнены научным сотрудником Института М. С. Волковым.

§ 5. Основные этапы завоевания межпланетного пространства

Какое практическое значение имеет задача, рассмотренная в настоящей работе? Чтобы ответить на этот вопрос, необходимо сказать несколько слов об основных этапах завоевания межпланетного пространства. Можно отметить три основных этапа в организации межпланетных перелетов:

- I этап — полеты неуправляемых ракет;
 - II этап — полеты управляемых ракет-автоматов;
 - III этап — полеты пассажирских управляемых ракет.
- Для того чтобы забросить в межпланетное пространство ракету, лишенную собственных запасов горючего (и, следовательно, неуправляемую), весом в несколько килограммов, необходимо построить трехступенчатую ракету, стартовый вес которой будет равен 16.8 т. Но уже при полезном весе третьей ступени в 100 кг стартовый вес ракеты увеличится до 62.4 т (по другому варианту — 90.9 т). Для создания искусственного спутника с полезным грузом 36 т общий вес трехступенчатой ракеты должен равняться 7000 т, из которых 90% составляет горючее (проект Брауна). Для сравнения укажем, что стартовый вес $V-2$ составляет всего 12.9 т.

Таким образом, возможности современной техники не выходят пока за пределы реализации I этапа межпланетных сообщений (неуправляемые ракеты). Осуществление II и III этапов потребует, по-видимому, принципиально нового решения вопроса о толкающей ракете. Кроме того, осуществление III этапа связано с рядом трудных и далеко идущих задач. Помимо биологического и медицинского характера (особую сложность еще не ясных вопросов биологического действия космического излучения), представляет задача от биологического действия космического излучения, представляется задача от биологического действия космического излучения, представляется задача от биологического действия космического излучения.

Какие же задачи могут быть решены на I этапе с помощью неуправляемых ракет? Укажем три такие задачи.

- 1-я задача. Создание искусственных спутников Земли. Орбиты спутников могут быть весьма разнообразными.
- 2-я задача. Полет на Луну. Хотя ракета не несет с собой никакого полезного груза и не может затормозить свое падение на поверхность Луны, научное значение такого полета чрезвычайно велико.
- 3-я задача. Полет вокруг Луны с возвращением на Землю. Для торможения ракеты в атмосфере Земли используются парашютные и планерные устройства. Осуществление этого проекта даст возможность сфотографировать невидимое с Земли полушарие Луны.

Все три задачи, приблизительно одинаковой технической трудности, будут, вероятно, решены одна за другой в течение ближайших пяти-десяти лет. Однако с точки зрения небесной механики вторая, и особенно третья, задача много сложнее, чем первая. На разработку этих двух задач и должно быть обращено внимание астрономов, интересующихся вопросами космонавтики.

В списке литературы указаны основные работы, нашедшие на русском языке.

ЛИТЕРАТУРА

- Кондратьев Ю. В. 1947. Завоевание межпланетных пространств. Оборонгиз, 84 стр.
 Коф И. и И. Ютеибогарт. 1950. Динамика ракет. Оборонгиз, 328 стр.
 Оберт Г. 1948. Пути осуществления космических полетов. Оборонгиз, 232 стр.
 Рмкин Н. А. 1928—1932. Межпланетные сообщения, вып. 1—9.
 Цвицер Ф. А. 1947. Проблема полета при помощи ракетных аппаратов. Оборонгиз, 240 стр.
 Цюлковский К. Э. 1951. Аэродинамика. Собр. соч., 1, АН СССР, 268 стр.
 Цюлковский К. Э. 1954. Реактивные летательные аппараты. Собр. соч., 2, АН СССР, 455 стр.
 Штернфельд А. 1937. Введение в космонавтику. ОНТИ, 320 стр.
 Эно-Шелтра Р. 1950. Космические полеты. Оборонгиз, 148 стр.

Поступило в Редакцию
3 апреля 1956 г.

Бюллетень Института Теоретической Астрономии

Т. VI

1957

№7 (80)

Новые элементы восьми малых планет

О. Н. Бартенева

Приводятся новые элементы малых планет 247, 344, 536, 680, 747, 794, 1339 и 1415, полученные в результате улучшения их орбит.
 NEW ELEMENTS OF EIGHT MINOR PLANETS, by O. N. Barteneva. — New elements of minor planets 247, 344, 536, 680, 747, 794, 1339 and 1415 are given, improved by differential correction from some oppositions. Special perturbations from Jupiter or Jupiter and Saturn have been included.

В настоящей статье приводятся результаты улучшения орбит 8 планет: 247 Eukrate, 344 Desiderata, 536 Metari, 680 Genoveva, 747 Winchester, 794 Irenaea, 1339 Désag-neaux и 1415 Malauta, — для которых в Институте теоретической астрономии было выполнено численное интегрирование уравнений движения в прямоугольных координатах. Интегрирование велось с учетом возмущений от Юпитера и Сатурна (для планет 536, 747 и 1339) или только от Юпитера (для остальных пяти планет). Шаг интегрирования был различен: 40 дней для планет 536 и 1339 и 20 дней для остальных. Улучшение элементов производилось по методу Экиерта — Брауера (Самойлова-Яхонтова, 1944). При улучшении моментов оскуляции для всех планет перенесены на более поздние моменты. С исправленными элементами численное интегрирование в прямоугольных координатах было повторено. Шаг интегрирования для всех планет сохранен первоначальным. После интегрирования вновь произведены сравнения с наблюдениями. Результаты представлены в табл. 1—9. В этих таблицах звездочками отмечены наблюдения, участвовавшие в исправлении.

247 Eukrate

Планета 247 Eukrate открыта в 1885 г. в Дюссельдорфе.
 За исходные элементы при интегрировании взяты элементы Лютера (Luther. Эфемериды малых планет на 1948 год, ч. 2). Улучшение элементов выполнено дважды по 4 оппозициям 1950—1954 гг.

Элементы

Эпоха и оскуляция 1951 декабрь 20.0 вс. вр.

| | | |
|---------------------------|--------|--------------------|
| $M = 351^{\circ}55'33.53$ | | $P_s = 0.5678291$ |
| $\omega = 53.68907$ | 1950.0 | $P_p = 0.5369784$ |
| $\Omega = 0.33970$ | | $P_i = 0.6050712$ |
| $i = 25.07132$ | | |
| $\varphi = 14.01702$ | | $Q_s = -0.8069812$ |
| $\mu = 781^{\circ}81'120$ | | $Q_p = 0.3678575$ |
| $\sigma = 2.7411733$ | | $Q_i = 0.4417193$ |

Таблица 1
Сравнения с наблюдениями планеты 247 Еврате

| № по пор. | Дата | Наблюдения | | До улучшения | | После 2-го улучшения | | Место наблюдения |
|------------|----------|-------------------|-------------------|----------------|----------------|----------------------|----------------|------------------|
| | | $\alpha_{1950.0}$ | $\delta_{1950.0}$ | $\Delta\alpha$ | $\Delta\delta$ | $\Delta\alpha$ | $\Delta\delta$ | |
| | | | | | | | | |
| 1950 | | | | | | | | |
| *1 июл | 22.92905 | 10°26'31.74 | -57°04'29.2 | +1°00'49 | -1'49.2 | -0.27 | -6.9 | Иоганнесбург |
| 2 июль | 31.72261 | 17 09 55.79 | -55 36 51.4 | + 44.91 | - 4.004 | - 0.54 | - 8.1 | " |
| 3 сентябрь | 13.74659 | 17 16 49.26 | -49 28 40.6 | | | -22.78 | -34.6 | " |
| 1951 | | | | | | | | |
| 4 август | 31.06568 | 1 11 05.17 | + 8 49 04.0 | | | - 0.10 | + 2.9 | Уэль |
| 5 сентябрь | 29.825 | 0 40 11.0 | +13 49 49 | +4°50'8 | +85 13 | + 0.1 | + 6 | Тарту |
| *6 октябрь | 10.02508 | 0 25 24.04 | +15 09 42.3 | +4 44.91 | +89 02.0 | + 0.61 | + 6.1 | Уэль |
| 7 октябрь | 23.87658 | 0 06 39.75 | +16 34 17.9 | | | - 0.12 | +11.7 | " |
| 1953 | | | | | | | | |
| 8 март | 7.90420 | 11 41 07.02 | + 9 53 12.5 | +2 04.11 | -44 46.8 | -15.77 | - 8.2 | Мадрид |
| 9 март | 9.91700 | 11 39 02.3 | + 9 52 28 | | | + 0.3 | - 9 | Тарту |
| *10 март | 10.85250 | 11 37 56.35 | + 9 52 01.4 | | | - 0.28 | -11.2 | Мадрид |
| 11 март | 11.95700 | 11 36 39.3 | + 9 51 23 | | | + 0.3 | -15 | Тарту |
| 1954 | | | | | | | | |
| *12 апрель | 8.97466 | 15 20 06.54 | -44 07 10.8 | +1 06.75 | - 84.92 | + 0.60 | - 5.6 | Иоганнесбург |

Наблюдения 3 и 8 (Иоганнесбург и Мадрид), повидному, ошибочны.

344 Desiderata

Планета 344 Desiderata открыта в 1892 г. Шардуа (Charlois) в Ницце. Карштедт (Kahrstedt) получил систему оскулирующих элементов планеты на основании наблюдений в 6 оппозициях за годы 1922—1938 с учетом возмущений от Юпитера. Однако в дальнейшем возмущения не вычислялись, и с 1941 г. публиковались невозмущенные эфемериды планеты. Вследствие этого разности наблюдений с вычислениями, постепенно увеличиваясь, дошли в 1950 г. до $\Delta\alpha = -11.6$. Поэтому решено было сделать улучшение орбиты планеты с учетом возмущений, приняв за исходные элементы Карштедта с оскуляцией 1941 (Kahrstedt, Kleine Planeten, 1941). Оказалось, что одного только учета возмущений было достаточно, чтобы уменьшить разности в 1950 г. до $\Delta\alpha = +1.5$. В результате улучшения получена приведенная ниже система оскулирующих элементов.

Элементы

Эпоха и оскуляция 1946 июль 29.0 вс. вр.

$$\begin{aligned} M &= 24.32601 \\ \omega &= 235.20508 \\ \Omega &= 48.58607 \\ i &= 18.51077 \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} P_0 &= +0.2065543 \\ P_1 &= -0.7614637 \\ P_2 &= -0.6144172 \end{aligned} \right\} 1950.0$$

$$\begin{aligned} q &= 18.10810 \\ \mu &= 0.4740868 \\ a &= 2.5978200 \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} Q_0 &= 0.9490215 \\ Q_1 &= 0.3087325 \\ Q_2 &= -0.0635792 \end{aligned} \right\}$$

Таблица 2
Сравнения с наблюдениями планеты 344 Desiderata

| № по пор. | Дата | Наблюдения | | До улучшения | | После улучшения | | Место наблюдения |
|-----------|------------------|-------------------|-------------------|----------------|----------------|-----------------|----------------|------------------|
| | | $\alpha_{1950.0}$ | $\delta_{1950.0}$ | $\Delta\alpha$ | $\Delta\delta$ | $\Delta\alpha$ | $\Delta\delta$ | |
| | | | | | | | | |
| 1938 | | | | | | | | |
| 1 | ноябрь 7.94 | 2°55'2 | +14°55' | + 0°2 | 0' | 0°0 | -3' | Турку |
| 2 | ноябрь 16.89 | 2 44.9 | +15 02 | 0.0 | -1 | 0.0 | -3 | |
| 1941 | | | | | | | | |
| *3 | апрель 19.89 | 12 03.9 | +20 47 | + 0.4 | -3 | 0.0 | 0 | " |
| 4 | апрель 21.95 | 12 02.0 | +20 35 | — | — | -0.1 | -1 | |
| 1942 | | | | | | | | |
| *5 | ноябрь 8.71 | 1 42.6 | + 1 34 | + 0.1 | +4 | 0.0 | 0 | Китаб |
| 1946 | | | | | | | | |
| *6 | октябрь 28.90882 | 0°20'01.09 | -16°59'53.4 | +24.93 | +5°57.5 | 0.0 | 0 | Сан-Фер-наво |
| 1950 | | | | | | | | |
| *7 | сентябрь 5.83908 | 22 16 22.94 | -48 04 44.9 | +1°29'28 | +8 12.9 | 0.2 | +1 | Иоганнесбург |
| 8 | сентябрь 7.83916 | 22 14 30.03 | -47 44 06.1 | +1 26.94 | +7 59.5 | 0.2 | 1 | |

536 Merapi

Планета 536 Merapi открыта в 1904 г. Петерсом (Peters) в Вашингтоне. Позднее Я. П. Цукеряник улучшил ее орбиту по 4 оппозициям 1922—1928 гг. с учетом возмущений от Юпитера. Он же вычислял возмущения планеты и давал ее эфемериды до 1942 г. Численное интегрирование в прямоугольных координатах перед улучшением произведено по элементам Я. П. Цукеряника (Цукеряник, Kleine Planeten, 1942). Улучшение элементов выполнено дважды по 4 оппозициям 1939—1951 гг.

Элементы

1. Эпоха и оскуляция 1949 март 25.0 вс. вр.

$$\begin{aligned} M &= 195.92619 \\ \omega &= 297.83480 \\ \Omega &= 60.28860 \\ i &= 19.38659 \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} P_0 &= 0.9559158 \\ P_1 &= 0.1095472 \\ P_2 &= -0.2724408 \end{aligned} \right\} 1950.0$$

$$\begin{aligned} q &= 4.68394 \\ \mu &= 541.37537 \\ a &= 3.5021816 \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} Q_0 &= 0.0557411 \\ Q_1 &= 0.8432388 \\ Q_2 &= 0.5346413 \end{aligned} \right\}$$

2. Эпоха и оскуляция 1957 июль 11.0 вс. вр.

$$\begin{aligned} M &= 291.70277 \\ \omega &= 294.02532 \\ \Omega &= 60.10121 \\ i &= 19.39180 \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} P_0 &= 0.9498399 \\ P_1 &= 0.0505336 \\ P_2 &= -0.3086266 \end{aligned} \right\} 1950.0$$

$$\begin{aligned} q &= 5.14884 \\ \mu &= 542.25709 \\ a &= 3.4983847 \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} Q_0 &= 0.1222887 \\ Q_1 &= 0.8482685 \\ Q_2 &= 0.5125233 \end{aligned} \right\}$$

Таблица 3
Сравнения с наблюдениями планеты 536 Мегри

| № по пор. | Дата | Наблюдения | | До улучшения | | После 2-го улучшения | | Место наблюдения |
|-----------|---------------|-------------------|-------------------|--------------------|-----------------|----------------------|----------------|------------------|
| | | $\alpha_{1950.0}$ | $\delta_{1950.0}$ | $\Delta\alpha$ | $\Delta\delta$ | $\Delta\alpha$ | $\Delta\delta$ | |
| *1 | ноябрь 1939 | 6.93 | 3^h13^m4 | $+11^s19''$ | $-4^s9''$ | $-5^s3''$ | $-0^s2''$ | Улаа |
| 2 | декабрь 1940 | 28.83 | 8 08.4 | $+41^s01''$ | -7.4 | $+3$ | -0.2 | Турку |
| 3 | январь 1941 | 1.88 | 8 05.0 | $+41^s26''$ | -7.5 | $+2$ | -0.3 | Аалжир |
| *4 | январь 1941 | 27.90111 | $7^h40^m43^s90$ | $+43^s13^s02''$ | $-7^s37^s05''$ | $-3^s55^s0''$ | $-16^s00''$ | Вюрцбург |
| 5 | январь 1941 | 29.80946 | 7 38 23.38 | $+44^s18^s03^s9$ | 8 13.54 | $-3^s12^s5''$ | $-54^s07''$ | Вюрцбург |
| *6 | март 1940 | 23.56708 | 13^h36^m6 | $+10^s28''$ | $-7^s8''$ | $+91''$ | $+0^s1''$ | Сименз |
| 7 | март 1940 | 28.04 | 13 33.4 | $+10^s44''$ | $-8^s1''$ | $+93''$ | -0.1 | Турку |
| 8 | апрель 1940 | 25.91 | 13 12.3 | $+11^s24''$ | -8.1 | $+90$ | 0.0 | Турку |
| 9 | август 1951 | 23.87176 | $22^h06^m26^s68$ | $-40^s57^s25^s0''$ | $-21^s30^s57''$ | $-1^s26^s50^s4''$ | $+24^s12''$ | Иоганнесбург |
| *10 | сентябрь 1951 | 5.89549 | 21 55 39.79 | $-41^s14^s09^s1''$ | $-21^s18^s14''$ | $-1^s16^s15^s0''$ | $+24^s01''$ | Иоганнесбург |

Наблюдение 5 (Вюрцбург) ошибочно.

680 Geyova

Планета 680 Geyova открыта Корфом (Korff) в Гейдельберге в 1909 г. Благодаря своему большому эксцентриситету ($e=17^\circ$) планета может в афелии сблизиться с Юпитером, а потому ее возмущения довольно велики. Карштедт (Kärstedt) вычислила возмущения планеты за 1909—1932 гг. и улучшила ее орбиту по 6 оппозициям за те же годы. В дальнейшем возмущения не вычислялись, и с 1937 г. планета больше не наблюдалась. Лишь в 1950 г. в Ницце удалось найти планету, причем по правым афелии составляла $\Delta\alpha=+12''$. В 1954 г. Брунер (Brüner) в Иоганнесбурге открыла новую планету 1954 НС. П. Музен (Muzen) вычислила для нее орбиту по трем наблюдениям. На основании сходства элементов Киппес (Kippes) установила тождество планеты 1954 НС и 680 Geyova. Таким образом, из новых наблюдений планеты нам известны только пять точных наблюдений, полученных в Ницце в 1950 г., два приближенных наблюдения 1953 г. (Ницца и Турку) и семь точных наблюдений в Иоганнесбурге 1954 г. (одно приближенное Кнотто-Кавсан).

В основу численного интегрирования положены элементы планеты 1954 НС, определенные Музеном (MPC 1098). Проведено улучшение только элементов μ и M по точным наблюдениям в двух оппозициях 1950 и 1954 гг.

Элементы

Эпоха и оскуляция 1954 апреля 20.0 вс. вр.

$$\begin{aligned} M &= 228^{\circ}06'12'' \\ e &= 240.57768 \\ Q &= 40.14965 \\ i &= 17.83107 \end{aligned} \quad \begin{aligned} P_1 &= 0.1591571 \\ P_2 &= -0.7659410 \\ P_3 &= -0.6228992 \end{aligned} \quad \begin{aligned} \mu &= 17.24537 \\ \mu &= 640^{\circ}28'42'' \\ \mu &= 3.1315242 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_1 &= 0.9673087 \\ Q_2 &= 0.2471665 \\ Q_3 &= -0.0567683 \end{aligned}$$

Таблица 4

Сравнения с наблюдениями планеты 680 Geyova

| № по пор. | Дата | Наблюдения | | До улучшения | | После улучшения | | Место наблюдения |
|-----------|--------------|-------------------|-------------------|--------------------|----------------|-----------------|----------------|------------------|
| | | $\alpha_{1950.0}$ | $\delta_{1950.0}$ | $\Delta\alpha$ | $\Delta\delta$ | $\Delta\alpha$ | $\Delta\delta$ | |
| 1 | ноябрь 1950 | 12.99259 | $3^h18^m41^s51$ | $+23^s58^s04^s8''$ | — | — | $+1^s70''$ | Ницца |
| *2 | ноябрь 1950 | 15.91791 | 3 15 52.10 | $+23^s57^s17^s7''$ | $+1^s18^s81''$ | $+11^s41^s9''$ | $+1^s41''$ | Ницца |
| 3 | ноябрь 1950 | 30.90052 | 3 02 13.55 | $+23^s46^s56^s9''$ | — | — | $+0^s83''$ | Ницца |
| 4 | декабрь 1950 | 1.85806 | 3 01 26.19 | $+23^s46^s02^s9''$ | $+1^s16^s94''$ | $+11^s50^s4''$ | $+0^s82''$ | Ницца |
| 5 | декабрь 1950 | 11.83263 | 2 54 04.53 | $+23^s36^s24^s8''$ | — | — | $+0^s41''$ | Ницца |
| 6 | март 1953 | 10.90 | 9^h54^m09 | $+36^s25''$ | $+0^s07''$ | -2^s | $+0^s02''$ | Турку |
| 7 | март 1953 | 14.80 | 9 55.6 | $+36^s21''$ | $+0^s5''$ | -2 | 0.0 | Турку |
| 8 | апрель 1954 | 8.95104 | $15^h13^m26^s16$ | $-17^s00^s05^s8''$ | $+0^s64''$ | $+3^s4''$ | $+0^s27''$ | Иоганнесбург |
| *9 | апрель 1954 | 28.88507 | 14 56 52.76 | $-18^s41^s19^s5''$ | — | — | $-0^s28''$ | Иоганнесбург |
| 10 | апрель 1954 | 28.60413 | 14 57 09 | $-18^s40^s1''$ | — | — | -1^s | Иоганнесбург |
| 11 | апрель 1954 | 30.88031 | 14 54 46.80 | $-18^s50^s42^s0''$ | — | — | $-0^s61''$ | Иоганнесбург |
| 12 | май 1954 | 23.83021 | 14 29 56.64 | $-20^s28^s14^s3''$ | — | — | $-1^s69''$ | Иоганнесбург |
| 13 | июнь 1954 | 28.78194 | 14 25 18.59 | $-20^s47^s30^s1''$ | — | — | $-2^s01''$ | Иоганнесбург |
| 14 | июнь 1954 | 2.78056 | 14 21 11.97 | $-21^s06^s57^s9''$ | — | — | $-2^s37''$ | Иоганнесбург |
| 15 | июнь 1954 | 6.88507 | 14 18 19.78 | $-21^s23^s11^s2''$ | $-0^s10''$ | -25.0 | $-2^s52''$ | Иоганнесбург |

747 Winchester

Планета 747 Winchester открыта в 1913 г. Меткофом (Metcalf) в Винчестере. За исходные элементы при интегрировании взяты элементы Чампино (Cimino). Эфемериды малых планет при интегрировании взяты элементы Чампино (Cimino). Эфемериды 1949—1954 гг.

Элементы

Эпоха и оскуляция 1951 декабря 20.0 вс. вр.

$$\begin{aligned} M &= 254^{\circ}24'28'' \\ e &= 274.64018 \\ Q &= 130.76176 \\ i &= 18.15130 \end{aligned} \quad \begin{aligned} P_1 &= +0.6645806 \\ P_2 &= +0.7470948 \\ P_3 &= -0.0144439 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu &= 20.32214 \\ \mu &= 685^{\circ}58'57'' \\ \mu &= 2.9720502 \end{aligned} \quad \begin{aligned} Q_1 &= -0.7090006 \\ Q_2 &= +0.635431 \\ Q_3 &= +0.3025309 \end{aligned}$$

Таблица 5
Сравнения с наблюдаемыми планетой 747 Winchester

| № по пор. | Дата | Наблюдения | | До улучшения | | После улучшения | | Место наблюдения |
|-----------|--------------|-------------------|-------------------|----------------|----------------|-----------------|----------------|------------------|
| | | $\alpha_{1950.0}$ | $\delta_{1950.0}$ | $\Delta\alpha$ | $\Delta\delta$ | $\Delta\alpha$ | $\Delta\delta$ | |
| 1 | январь 1949 | 24.95266 | 0448°05'51" | +16°29'59".6 | +42°90' | +50.0 | -0.40 | Нидца |
| 2 | январь 1949 | 31.89072 | 9 42 29.40 | +17 47 46.8 | +43.51 | +20.0 | -0.61 | Улья |
| 3 | февраль 1949 | 17.89488 | 9 27 50.37 | +20 46 13.5 | — | — | +9.51 | Улья |
| 4 | апрель 1951 | 29.98292 | 16°45'54" | -0°18' | +0°2' | -1' | 0°0 | Симеиз |
| 5 | июнь 1951 | 4.66185 | 16°20'43.73 | +0°55'11.3 | +14°42' | -109.6 | +4°72' | Навизи |
| 6 | июль 1952 | 21.61603 | 20 12 36 | -14°53.3 | — | +1' | -0.8 | Кнот-Квасин |
| 7 | август 1952 | 17.01743 | 19 50 21.04 | -18°33'29.7 | +47.19 | -156.9 | -0.33 | Ла-Палта |
| 8 | август 1952 | 17.03890 | 19 50 23.09 | -18 33 40.7 | +43.53 | -206.1 | +0.33 | Ла-Палта |
| 9 | январь 1954 | 20.98929 | 8 06 36.64 | +14 32 11.2 | +1°30'17" | +307.9 | +0.06 | Барселона |
| 10 | февраль 1954 | 3.82153 | 7 54 44.27 | +17 12 20.6 | +1 27.17 | +259.7 | -0.04 | Мадрид |
| 11 | февраль 1954 | 9.000 | 7 51 05.2 | +18 07 47 | — | — | +0 | Таргу |
| 12 | апрель 1955 | 18.94483 | 13 11 59.19 | +16 12 14.4 | — | — | +13.17 | Улья |
| 13 | апрель 1955 | 19.90227 | 13 11 18.36 | +16 15 31.3 | — | — | +13.48 | Улья |
| 14 | май 1955 | 1.350 | 13°03'7" | +16°41' | — | — | 0.0 | Линк |

794 Igeaesa

Планета 794 Igeaesa открыта в 1914 г. Пализа (Palisa) в Вене.
За исходные элементы при улучшении орбиты приняты элементы Штеттлера (Stettler). Эфемерид малых планет на 1948 г., ч. 2). Было сделано предварительное улучшение орбиты по двум оппозициям 1952—1953 гг., которые дали возможность составить четыре условных уравнения для определения четырех неизвестных поправок элементов (ΔM , Δa , Δi , Δe). Второе исправление орбиты производилось по трем оппозициям 1948—1953 гг., исправлялись все шесть элементов.

Элементы

Эпоха и оскуляция 1951 декабря 20.0 вс. вр.

$$\begin{aligned} M &= 309744156 \\ a &= 123.62942 \\ Q &= 164.58812 \\ i &= 5.18379 \\ e &= 16.52988 \\ \mu &= 638'35/91 \\ a &= 3.1578246 \end{aligned} \quad \begin{aligned} P_1 &= 0.3135308 \\ P_2 &= -0.8983723 \\ P_3 &= -0.3076134 \\ Q_1 &= 0.9492745 \\ Q_2 &= 0.3047203 \\ Q_3 &= 0.0776123 \end{aligned}$$

Таблица 6
Сравнения с наблюдаемыми планетой 794 Igeaesa

| № по пор. | Дата | Наблюдения | | До улучшения | | После улучшения | | Место наблюдения |
|-----------|--------------|-------------------|-------------------|----------------|----------------|-----------------|----------------|------------------|
| | | $\alpha_{1950.0}$ | $\delta_{1950.0}$ | $\Delta\alpha$ | $\Delta\delta$ | $\Delta\alpha$ | $\Delta\delta$ | |
| *1 | ноябрь 1948 | 27.94801 | 3°43'07.09 | +12°39'39.3 | — | +1°92' | +10°9' | Улья |
| 2 | апрель 1952 | 19.94320 | 15°26'04" | -11°29' | +7°6' | -0°8' | -2' | Симеиз |
| *3 | апрель 1952 | 25.08170 | 15°23'04.13 | -11°01'44.4 | +6°59'64" | -29°53.7 | +1°86' | Улья |
| 4 | октябрь 1953 | 14.20068 | 1 11 18.1 | +2 46 42.6 | -1 51.62 | -23 39.5 | +2.85 | Линк |
| 5 | октябрь 1953 | 14.24859 | 1 11 15.72 | +2 46 25.1 | -4 51.71 | -23 30.4 | +2.74 | " |
| 6 | октябрь 1953 | 31.14721 | 0 59 33.31 | +1 21 20.4 | — | — | +2.46 | " |
| 7 | октябрь 1953 | 31.19235 | 0 59 31.68 | +1 21 08.8 | — | — | +2.45 | " |
| 8 | ноябрь 1953 | 5.09556 | 0 56 50.81 | +1 03 11.9 | — | — | +1.86 | " |
| 9 | ноябрь 1953 | 5.15004 | 0 56 49.14 | +1 03 01.8 | — | — | +1.81 | " |

1339 Desagneaux

В 1951 г. Н. Ф. Боева произвела улучшение орбиты планеты 1339 Desagneaux по 4 оппозициям 1946—1951 гг. (Боева, Эфемерид малых планет на 1953 г.). После улучшения представление наблюдений за эти годы оказалось удовлетворительным. Однако планета перестала наблюдаться. Это обстоятельство заставило произвести сравнение с наблюдениями за более ранние годы, продолжив численное интегрирование уравнений движения с элементами Н. Ф. Боевой до 1934 г. Невянки оказались очень большими. Впоследствии было обнаружено, что в улучшении Боевой участвовало одно не принадлежащее планете наблюдение (1951 г. январь 9.96233, Улья). Для улучшения орбиты было решено вновь провести численное интегрирование уравнений движения с учетом возмущений от Юпитера и Сатурна, начиная с 1934 г. по 1938 г., взяв за исходные элементы Бое (Boeg). Эфемерид малых планет на 1948 г., ч. 2). Улучшение элементов продолжено по 4 оппозициям 1934—1938 гг. С новыми элементами вновь проведено интегрирование до 1951 г. и обнаружено, что два наблюдения новой планеты, открытой в Улья и получившей предварительное обозначение 1951 AF, в действительности принадлежат планете 1339. Эти наблюдения были использованы при вторичном улучшении, которое было произведено по 5 оппозициям 1942—1951 гг. Наблюдения 1938 и 1941 гг. во втором улучшении не участвовали и являются контрольными.

Элементы

Эпоха и оскуляция 1946 январь 29.0 вс. вр.

$$\begin{aligned} M &= 61320576 \\ a &= 160.70531 \\ Q &= 291.81210 \\ i &= 8.67738 \\ e &= 2.83300 \\ \mu &= 675'45/12 \\ a &= 3.0217482 \end{aligned} \quad \begin{aligned} P_1 &= -0.0474516 \\ P_2 &= 0.8954276 \\ P_3 &= 0.4426714 \\ Q_1 &= -0.9890041 \\ Q_2 &= 0.0200276 \\ Q_3 &= -0.1465264 \end{aligned}$$

Таблица 7

Сравнения с наблюдениями планеты 1339 Desagheux

| № по пор. | Дата | Наблюдения | | До улучшения | | После 1-го улучшения | | Место наблюдения |
|-----------|------------------|-------------------|-------------------|----------------|----------------|----------------------|----------------|------------------|
| | | $\alpha_{1950.0}$ | $\delta_{1950.0}$ | $\Delta\alpha$ | $\Delta\delta$ | $\Delta\alpha$ | $\Delta\delta$ | |
| 1 | 1934 | | | | | | | |
| 2 | декабрь 16.04470 | 5°20'56.17 | +29°35'28.4 | +1°41'99 | -757.3 | -23'10 | +1'07.2 | Алжир |
| | декабрь 26.00634 | 5 21 14.20 | +29 02 24.6 | +1 41.74 | -758.3 | -22.83 | +1 00.3 | " |
| 3 | 1936 | | | | | | | |
| 4 | март 14.99985 | 11 25 13.89 | -8 52 20.4 | -46.66 | +611.2 | -13.43 | -53.5 | " |
| | март 22.02369 | 11 19 39.33 | -8 23 03.5 | -46.12 | +611.8 | -13.39 | -54.7 | " |
| 5 | 1937 | | | | | | | |
| 6 | июнь 3.93165 | 10°45'3" | -30°23' | +478 | +4' | +0°4' | -1' | Иоганнесбург |
| | июнь 11.96530 | 10°46'00.80 | -29°56'20.6 | +446.76 | +249.3 | +20.90 | -1°05.3 | Алжир |
| 7 | 1938 | | | | | | | |
| 8 | июль 28.00938 | 22 19 50.02 | -3 00 47.2 | +5 02.75 | +40 25.3 | - | - | Гейдельберг |
| | август 4.01361 | 22 15 27.58 | -3 02 38.6 | +5 11.13 | +41 04.7 | -2.05 | +1 18.9 | Уэльс |
| | август 24.92178 | 21 59 24.94 | -3 38 14.0 | +5 23.45 | +41 35.0 | -2.28 | +1 18.7 | " |
| 10 | 1941 | | | | | | | |
| | февраль 22.83000 | 10°02'0" | +2°59' | -5.0 | +37 | -1°0 | +6' | Симея |

Таблица 8

Сравнения с наблюдениями планеты 1339 Desagheux

| № по пор. | Дата | Наблюдения | | После 1-го улучшения | | После 2-го улучшения | | Место наблюдения |
|-----------|------------------|-------------------|-------------------|----------------------|----------------|----------------------|----------------|------------------|
| | | $\alpha_{1950.0}$ | $\delta_{1950.0}$ | $\Delta\alpha$ | $\Delta\delta$ | $\Delta\alpha$ | $\Delta\delta$ | |
| 8 | 1938 | | | | | | | |
| 9 | август 4.01361 | 22°15'27.58 | -3°02'38.6 | -2.05 | +1'18.9 | +1.21 | +5.2 | Гейдельберг |
| | август 24.92178 | 21 59 24.94 | -3 38 14.0 | -2.28 | +1 18.7 | +1.30 | +2.3 | Уэльс |
| 10 | 1941 | | | | | | | |
| | февраль 22.83000 | 10°02'0" | +2°59' | -1°0 | +6' | +0°1' | 0' | Симея |
| 11 | 1942 | | | | | | | |
| 12 | март 23.95068 | 15°15'17.19 | -28°55'33.2 | -36.21 | -7.3 | +0°70 | -5.1 | Алжир |
| | март 28.89523 | 14 57 32.37 | -26 19 01.8 | -32.27 | +6.9 | +0.66 | -5.2 | " |
| 13 | 1946 | | | | | | | |
| 14 | январь 31.95026 | 8 37 15.89 | +14 28 20.6 | -2°03'13 | +1124.5 | -0.33 | +8.2 | " |
| | февраль 5.87565 | 8 32 51.13 | +14 32 25.7 | -2 02.77 | +11 10.1 | -0.33 | +8.6 | " |
| 15 | 1947 | | | | | | | |
| 16 | апрель 21.99148 | 13 58 00.95 | -25 21 59.8 | -1 29.13 | +4 12.9 | -0.35 | -2.5 | " |
| | апрель 24.94967 | 13 55 33.77 | -25 08 42.0 | -1 29.02 | +4 21.8 | -0.38 | 0.9 | " |
| 17 | 1949 | | | | | | | |
| 18 | октябрь 16.89692 | 0 13 09.21 | +15 20 50.7 | -1 54.99 | -11 34.2 | -0.88 | -3.6 | " |
| | октябрь 18.88352 | 0 11 07.72 | +15 04 07.1 | -1 53.73 | -11 34.9 | -0.76 | -4.8 | " |
| 19 | 1951 | | | | | | | |
| 20 | январь 9.88722 | 6 59 04.75 | +24 13 52.8 | -3 13.03 | +11 12.7 | -2.01 | +11.2 | Уэльс |
| | январь 12.95778 | 6 56 06.36 | +24 08 50.0 | -3 12.98 | +10 46.7 | -2.49 | +2.2 | " |
| 21 | январь 9.96223 | 7 22 33.87 | +22 45 42.4 | +20 18.93 | -1°16'46.9 | +23°31'54 | -1°27'52.1 | " |

Наблюдение 21 (Уэльс) не принадлежит планете 1339.

1415 Malautra

В 1954 г. опубликованы новые элементы планеты 1415 Malautra, вычисленные по трем наблюдениям, 1949 декабрь—1950 январь (М. Р. Pretre, Annales de l'Observatoire Astronomique de Toulouse, 1954).

В Институте теоретической астрономии проведено численное интегрирование в прямоугольных координатах по элементам Претера с учетом возмущений от Юпитера за период времени 1947—1954 гг.

Улучшение элементов планеты проведено по наблюдениям в 4 оппозициях за этот же период времени.

Ниже приводятся две системы оскулирующих элементов:

Эпоха и оскуляция 1949 декабрь 23.0 вс. гр.

$$\begin{aligned} M &= 266729445 \\ \omega &= 238.60076 \\ \Omega &= 329.39904 \\ i &= 3.43175 \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} 1950.0 \\ P_x &= -0.8821701 \\ P_y &= -0.4091098 \\ P_z &= -0.2331458 \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} \varphi &= 4.98633 \\ \mu &= 1069.90346 \\ \sigma &= 2.2238629 \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} Q_x &= 0.4699441 \\ Q_y &= -0.7969038 \\ Q_z &= -0.3976008 \end{aligned} \right\}$$

Эпоха и оскуляция 1957 июнь 11.0 вс. гр.

$$\begin{aligned} M &= 356704205 \\ \omega &= 239.35616 \\ \Omega &= 329.25569 \\ i &= 3.42741 \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} 1950.0 \\ P_x &= -0.8770888 \\ P_y &= -0.4176717 \\ P_z &= -0.2370332 \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} \varphi &= 4.98027 \\ \mu &= 1069.78837 \\ \sigma &= 2.2240256 \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} Q_x &= 0.4703548 \\ Q_y &= 0.7955324 \\ Q_z &= -0.3769344 \end{aligned} \right\}$$

Таблица 9

Сравнения с наблюдениями планеты 1415 Malautra

| № по пор. | Дата | Наблюдения | | До улучшения | | После улучшения | | Место наблюдения |
|-----------|------------------|-------------------|-------------------|----------------|----------------|-----------------|----------------|------------------|
| | | $\alpha_{1950.0}$ | $\delta_{1950.0}$ | $\Delta\alpha$ | $\Delta\delta$ | $\Delta\alpha$ | $\Delta\delta$ | |
| 1 | 1947 | | | | | | | |
| 2 | март 20.91657 | 10°38'11.08 | +6°20'51.8 | -43.26 | +613.9 | -0.77 | -8.3 | Алжир |
| | март 21.91042 | 10 37 20.65 | +6 21 01.7 | -43.45 | +615.6 | -0.73 | -8.0 | " |
| 3 | 1948 | | | | | | | |
| 4 | сентябрь 7.27984 | 22°42'02 | -6 52.0 | -1°18 | -9.9 | +0°02 | 0.0 | Флангифф |
| | сентябрь 8.29984 | 22 41.01 | -6 56.8 | -1 14 | -10.1 | +0.04 | -0.4 | Симея |
| 5 | октябрь 3.81986 | 22 21.3 | -8°21' | - | - | +0.2 | +7 | " |
| 6 | 1949 | | | | | | | |
| | декабрь 23.08205 | 7°49'42.53 | +25°15'56.3 | -0.07 | +0.2 | -0.53 | +9.6 | Уэльс |
| 7 | 1950 | | | | | | | |
| 8 | январь 13.92565 | 7 25 09.09 | +25 51 40.0 | -0.01 | +0.1 | -0.68 | +5.1 | Алжир |
| | январь 27.88979 | 7 08 59.42 | +25 53 54.9 | -0.04 | +0.1 | -0.55 | +4.1 | " |
| 9 | 1954 | | | | | | | |
| 10 | март 4.88889 | 15 40 01.74 | -26 19 36.3 | +5°18'19 | -14°49'6 | +0.71 | -20.7 | Иоганнесбург |
| | март 31.55664 | 15 12 48.45 | -24 46 28.0 | +5 04.30 | -18 41.1 | +1.02 | -19.9 | Сидней |

ЛИТЕРАТУРА

Самойлова-Яхонтова Н. С. 1944. Исправление аналитических орбит. Бюлл. ИТА, 3 (53).
 Хакина Ф. Б. 1955. Формулы и таблицы для интерполирования осевых координат и вычисления компонент скоростей. Бюлл. ИТА, 6, 2 (75).

Поступило в Редакцию
 6 марта 1956 г.

СОДЕРЖАНИЕ

| | Стр. |
|---|------|
| Н. С. Самойлова-Яхонтова. Малые планеты 1955 г. | 429 |
| Н. Б. Еленинский. Разложение пертурбационной функции в ряд Фурье относительно наклонности. Часть III. Разложение пертурбационной функции в ряд по степеням приращений эксцентриситета. | 434 |
| Н. Б. Еленинский. Разложение пертурбационной функции в ряд Фурье относительно наклонности. Часть IV. Разложение пертурбационной функции в пространственной ограниченной аналитической задаче трех точек и в неограниченной задаче 4 точек | 466 |
| Г. А. Чеботарев. Симметричные траектории ракеты для полета вокруг Луны | 487 |
| О. Н. Буртеева. Новые элементы восьми малых планет | 493 |

ЛИТЕРАТУРА

- Самойлова-Яхонтова Н. С. 1944. Исправление эллиптических орбит. Бюлл. ИТА, 3 (53).
 Ханина Ф. Б. 1955. Формулы и таблицы для интерполирования особых координат и вычисления компонентов скоростей. Бюлл. ИТА, 6, 2 (75).
 Поступило в Редакцию
 6 марта 1956 г.

СОДЕРЖАНИЕ

| | Стр. |
|---|------|
| Н. С. Самойлова-Яхонтова. Малые планеты 1955 г. | 429 |
| Н. Б. Еленинская. Разложение пертурбационной функции в ряд Фурье относительно наклонности. Часть III. Разложение пертурбационной функции в ряд по степеням приращений эксцентриситета. | 434 |
| Н. Б. Еленинская. Разложение пертурбационной функции в ряд Фурье относительно наклонности. Часть IV. Разложение пертурбационной функции в пространственной ограниченной эллиптической задаче трех точек и в неограниченной задаче 4 точек | 466 |
| Г. А. Чеботарев. Симметричная траектория ракеты для полета вокруг Луны | 487 |
| О. Н. Бартелева. Новые элементы восьми малых планет | 493 |

Утверждено к печати
Институтом теоретической астрономии
Академии Наук СССР

Технический редактор М. Е. Зендель
Корректоры А. А. Гельфонд и М. П. Казарновский

РИСО АН СССР № 29—48. Полн. к. н. 23/1
1957 г. М-12060. Бумага 84 × 109/16.
Бум. л. 21. Печ. л. 7.79. Уч.-изд. л. 8.43.
Тираж 1000. Заказ 832. Цена 5 р. 90 к.

1-й тип. Изд. АН СССР.
Ленинград В-34, 9 линия, 12.

ОПЕЧАТКИ

| Стро- нича | Столбец, строка | Напечатано | Должно быть |
|---------------|--|------------|-------------|
| 498 | Табл. 5, столбец 1, строка 2 сверху | 2 | *2 |
| " | Табл. 5, столбец 1, строка 3 сверху | *3 | 3 |
| " | Табл. 5, столбец 8, строка 7 сверху | -2.8 | +2.8 |

Волжский ИТА, № 7000

АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА СОВЕТСКИХ СОЦИАЛИСТИЧЕСКИХ
РЕСПУБЛИК

БЮЛЛЕТЕНЬ ИНСТИТУТА
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ АСТРОНОМИИ

Том VI, № 8 (81)



ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА 1957 ЛЕНИНГРАД

Директор Института Теоретической Астрономии экз-контр. АН СССР М. Ф. Субботин
 Ответственный редактор проф. Г. А. Чеботарев

Потенциал земного притяжения

И. Д. Жонзлович

Дается разложение потенциалов земного притяжения с точностью до пятого порядка малости сил. Дается попытка определить численные коэффициенты этого разложения, используя ранее выведенные автором (Жонзлович, 1952) результаты для внешнего гравитационного поля Земли. Полученное разложение может быть использовано при исследовании движения тел. *Abstract in French.*
 POTENTIEL DE L'ATTRACTION TERRESTRE, par I. Jongolovich. On donne le développement du potentiel de la Terre aux termes du deuxième ordre de l'aplatissement près. On cherche à déterminer les valeurs numériques des coefficients de ce développement en utilisant les résultats obtenus par l'auteur (Jongolovich, 1952) pour le champ extérieur de la gravitation terrestre. Le développement obtenu peut être utilisé dans l'étude du mouvement des corps dans le voisinage de la Terre.

§ 1. Предварительные замечания

Потенциал земного притяжения во внешнем пространстве необходимо знать при решении различных задач небесной механики, когда учитывается влияние Земли на движение небесного тела. При больших расстояниях от Земли, когда движение тела определяется в основном воздействием Солнца или одной из больших планет, а Земля проявляется лишь небольшими возмущениями в этом движении, можно рассматривать лишь материальную точку, находящуюся в центре инерции Земли и обладающую массой, равной массе всей Земли. Однако для более близких объектов, движение которых в основном определяется притяжением самой Земли, необходимо иметь более подробное выражение для потенциала притяжения Луны, учитывающее в той или иной степени расположение земных масс. В теории движения Луны принимается во внимание так называемое возмущение от земного притяжения, учитывающее не материальную точку, а в виде некоторой фигуры Земли, т. е. Земля представляется не материальной точкой, а в виде некоторой материальной тела, ограниченного поверхностью уровня силы тяжести, обычно в форме точечного эллипсоида вращения. Однако при той точности наблюдения Луны, которую стремятся обеспечить современные астрономы, могут иметь значение и возможные отклонения реальной Земли от указанного идеального тела. Тем более необходимо иметь достаточно детальное выражение для потенциала земного притяжения, когда переходим к рассмотрению более близких объектов, как, например, возможных искусственных спутников Земли.

В настоящей работе выводится выражение потенциала земного притяжения, необходимое при решении задач подобного рода, и делается попытка определения численных значений коэффициентов этого выражения. Для последней цели используются найденные ранее (Жонзлович, 1952) численные значения коэффициентов в разложении силы тяжести на поверхности Земли по сферическим функциям широты и долготы. Поэтому в работе, прежде всего, находится выражение для потенциала силы тяжести. Полагаем в окончательном выражении угловую скорость равной нулю, мы тем самым уничтожаем

1 При этом применяется метод, аналогичный использованному в работе Б. В. Нумерова и Д. Н. Храмова (1956) для определения фигуры спутника по наблюдениям сил тяжести. Приняты также некоторые обозначения из указанной работы.

влияние центробежной силы и получаем искомое выражение для потенциала земного притяжения.

Окончательный результат работы представлен в § 7 формулой (81), числовые значения коэффициентов этой формулы даны в § 8.

§ 2. Выражение для потенциала силы тяжести

Начало координат берем в центре инерции регуляризированной Земли, ось z направлена по оси ее вращения к северу, ось x — параллельно плоскости астрономического меридиана в Гринвиче, ось y — на 90° к востоку. Сферические геоцентрические координаты элемента массы Земли dm обозначаем через r , ψ , l , а произвольной внешней точки M — через r , ψ , l . Потенциальная функция V для точки M напишется в виде

$$V = \int \frac{dm}{\Delta}, \quad (1)$$

а потенциал сил тяжести W в этой же точке в виде

$$W = fV + \frac{\omega^2}{2} r^2 \cos^2 \psi, \quad (2)$$

где

$$\Delta = \sqrt{r_1^2 + r^2 - 2r_1 r \cos \gamma}, \quad (3)$$

а

$$\cos \gamma = \sin \psi_1 \sin \psi + \cos \psi_1 \cos \psi \cos (l_1 - l), \quad (4)$$

f — постоянная притяжения, ω — угловая скорость вращения Земли и интеграл распростран на все массы Земли.

Разложим потенциал сил тяжести W в ряд по сферическим функциям. Величину Δ^{-1} можно представить бесконечным рядом вида

$$\Delta^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_1^k}{r^{k+1}} P_k(\cos \gamma), \quad (5)$$

где $P_k(\cos \gamma)$ — сферическая (зональная) функция k -го порядка от $\cos \gamma$; и ряд сходится при всяком $r > r_1$. Мы примем также, что указанным рядом можно пользоваться для всех точек, лежащих и на самом геоиде, хотя для некоторого числа элементов массы dm в этом случае будем иметь $r \leq r_1$.¹ Подставляя (5) в (2) получаем

$$W = f \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r^{k+1}} \int r_1^k P_k(\cos \gamma) dm + \frac{\omega^2}{2} r^2 \cos^2 \psi. \quad (6)$$

Введем теперь в рассмотрение значение потенциала сил тяжести W_0 на самом геоиде и следующие вспомогательные величины, являющиеся функциями W_0 и масс Земли M :

$$r_0 = \frac{fM}{W_0}, \quad g_0 = \frac{fM}{r_0^2}, \quad \sigma = \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{r_0}{g_0}; \quad (7)$$

очевидно, что r_0 имеет размерность длины, g_0 — размерность ускорения, а σ является некоторой небольшой безразмерной величиной.

Обозначим, кроме того, через ρ отношение

$$\rho = \frac{r_0}{r}; \quad (8)$$

очевидно, ρ для всех точек геоида будет лишь незначительно отличаться от единицы.

¹ О возможности такого допущения см., например: Сладский, 1888, § 14.

При указанных обозначениях легко представить выражение (6) в виде

$$W = W_0 \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho^{k+1}}{M r_0^k} \int r_1^k P_k(\cos \gamma) dm + \sigma \rho^{-2} \cos^2 \psi \right\}. \quad (9)$$

Если введем еще в рассмотрение безразмерные величины

$$A_k = \frac{1}{M r_0^k} \int r_1^k P_k(\cos \gamma) dm, \quad (10)$$

$$B_2 = \sigma \cos^2 \psi,$$

то искомое разложение потенциала сил тяжести напишется в следующем виде:

$$W = W_0 \{ \rho A_0 + \rho^2 A_1 + \rho^3 A_2 + \rho^4 A_3 + \rho^5 A_4 + \dots + B_2 \rho^{-2} \}. \quad (11)$$

Чтобы представить входящие сюда величины A_k в явном виде, воспользуемся так называемой теоремой сложения сферических функций (Идельсон, 1936, стр. 230), которая для $P_k(\cos \gamma)$ дает выражение

$$P_k(\cos \gamma) = \sum_{k=0}^k \gamma_{k,k} P_{k,k}(\sin \psi_1) P_{k,k}(\sin \psi) \cos k(l_1 - l), \quad (12)$$

где

$$\gamma_{k,0} = 1, \quad \gamma_{k,k} = 2 \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \quad (k=1, 2, 3, \dots, n). \quad (13)$$

Подставляя (12) в (10), получим следующее, играющее в дальнейшем важную роль, выражение для A_k в виде сферической функции k -го порядка:

$$A_k = \sum_{k=0}^k (\gamma_{k,k} \cos k l_1 + d_{k,k} \sin k l_1) P_{k,k}(\sin \psi), \quad (14)$$

где коэффициенты $c_{k,k}$ и $d_{k,k}$ определяются формулами

$$c_{k,k} = \frac{\gamma_{k,k}}{M r_0^k} \int r_1^k P_{k,k}(\sin \psi_1) \cos k l_1 dm, \quad (15)$$

$$d_{k,k} = \frac{\gamma_{k,k}}{M r_0^k} \int r_1^k P_{k,k}(\sin \psi_1) \sin k l_1 dm.$$

§ 3. Исследование коэффициентов $c_{k,k}$ и $d_{k,k}$

Изменяя в формулах (15) k от 0 до n , мы получим все значения коэффициентов $c_{k,k}$ и $d_{k,k}$, входящие в выражение A_k . Число этих коэффициентов равно $2n+1$; подиграли в этих величинах стоят следующие $2n+1$ выражений:

$$\begin{aligned} & r_1^k P_{k,k}(\sin \psi_1) \quad \text{при } k=0, \\ & r_1^k P_{k,k}(\sin \psi_1) \cos k l_1, \quad \left| \quad \text{при } k=1, 2, \dots \right. \\ & r_1^k P_{k,k}(\sin \psi_1) \sin k l_1 \end{aligned} \quad (16)$$

Как известно, это есть полный комплект $2n+1$ обычных сферических функций n -го порядка, которые представляют собой также $2n+1$ независимых, однородных гармонических полиномов n -й степени от трех переменных x, y, z . Выражение этих полиномов легко получить из (16), пользуясь известными выражениями сферических функций

$P_n(\sin \psi)$, формулы для синусов и косинусов кратных дуг и формулы преобразования сферических координат в прямоугольные. В табл. на стр. 509, в столбце 4 приведен список этих полиномов для $n=0, 1, 2, 3, 4$.

Введем в рассмотрение величины I_{n0} , пропорциональные моментам масс Земли различного порядка, определяемые формулой

$$I_{n0} = \frac{1}{M r_0^n} \int x^n y^n z^n dm, \quad (17)$$

где x, y, z — всевозможные целые числа от 0 до n , так что всегда $x+y+z=n$, dm — элемент массы Земли с координатами x, y, z , а интегрирование распространяется на все массы Земли.

Мы можем теперь все величины c_{nk} и d_{nk} , определенные формулами (15), представить линейным образом через указанные величины (17). В таблице, в 5-м столбце, приведен полный список этих величин для $n=0, 1, 2, 3, 4$. В 3-м столбце этой таблицы даны значения величин $1: I_{n0}$ соответственно формуле (13).

Кроме того, коэффициенты c_{nk} и d_{nk} для $n=1$ и $n=2$ можно представить иначе, введя в рассмотрение координаты центра инерции Земли x_c, y_c, z_c , моменты инерции Земли A, B, C и центробежные моменты инерции Земли D, E, F , выражения которых хорошо известны. Сравнивая их с выражениями коэффициентов c_{nk} и d_{nk} через I_{n0} , находим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} z_c &= r_0 c_{10}, & A+B-2C &= r_0^2 M c_{20}, & D &= r_0^2 M d_{21}, \\ x_c &= r_0 c_{11}, & B-A &= r_0^2 M c_{22}, & E &= r_0^2 M c_{23}, \\ y_c &= r_0 d_{11}, & B-A &= r_0^2 M c_{22}, & F &= r_0^2 M d_{22}. \end{aligned} \quad (18)$$

Покажем также, что направления главных осей инерции Земли вполне определяются значениями коэффициентов $c_{20}, c_{21}, c_{22}, c_{23}, d_{21}, d_{22}$. Пусть по этим направлениям идут оси ξ, η, ζ . Положение их относительно ранее набранных осей x, y, z определим эйлеровыми углами ψ, φ, θ . Известно, что угол θ между осью вращения и ближайшей главной осью инерции Земли очень мал (меньше 1°), поэтому положим $\sin \theta \approx \theta$ и $\cos \theta \approx 1$. В таком случае формулы преобразования координат примут вид

$$\begin{aligned} \xi &= x \cos(\psi + \varphi) + y \sin(\psi + \varphi) + z \theta \sin \varphi, \\ \eta &= -x \sin(\psi + \varphi) + y \cos(\psi + \varphi) + z \theta \cos \varphi, \\ \zeta &= x \theta \sin \psi - y \theta \cos \psi + z. \end{aligned} \quad (19)$$

Составим выражения центробежных моментов инерции $\int \xi^2 dm, \int \eta^2 dm, \int \zeta^2 dm$ и приравняем их нулю, так как оси ξ, η, ζ главные. Из полученных равенств, пользуясь известными выражениями для A, B, C, D, E, F , получим

$$\begin{aligned} \theta \cos \psi (A+B-2C) + \theta \cos \psi (B-A) + 2\theta \sin \psi F + 2D &= 0, \\ \theta \sin \psi (A+B-2C) - \theta \cos \psi (B-A) - 2\theta \sin \psi F + 2E &= 0, \\ -(B-A) \sin 2(\psi + \varphi) + 2F \cos 2(\psi + \varphi) + 2\theta [D \sin(\psi + 2\varphi) + \\ + E \cos(\psi + 2\varphi)] &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

На основании соотношений (18) видно, что полученные равенства дают выражения углов Эйлера ψ, φ, θ через коэффициенты $c_{20}, c_{21}, c_{22}, c_{23}, d_{21}, d_{22}$. Пренебрегая произведением малых величин $\theta(B-A), \theta D, \theta E, \theta F$, с достаточной точностью находим из (20)

$$\tan \psi = \frac{c_{21}}{c_{20}}, \quad \tan 2(\psi + \varphi) = \frac{d_{22}}{c_{22}}, \quad \theta = \frac{\sqrt{c_{21}^2 + d_{21}^2}}{c_{20}}. \quad (21)$$

Список однородных гармонических полиномов от переменных x, y, z до 4-й степени и выражение соответствующих коэффициентов c_{nk} и d_{nk} через моменты инерции масс Земли различного порядка.

| n | k | $1: I_{n0}$ | Однородные гармонические полиномы | Выражение коэффициентов c_{nk} и d_{nk} |
|-----|-----|-------------|---|--|
| 0 | 0 | 1 | 1 | $c_{00} = 1$ |
| 1 | 0 | 1 | z | $c_{10} = I_{100}$ |
| 1 | 1 | 1 | x | $c_{11} = I_{100}$ |
| 1 | 1 | 1 | y | $d_{11} = I_{100}$ |
| 2 | 0 | 1 | $\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} y^2 + z^2$ | $c_{20} = \frac{1}{2} I_{200} - \frac{1}{2} I_{220} + I_{202}$ |
| 2 | 1 | 3 | $3xz$ | $c_{21} = I_{201}$ |
| 2 | 1 | 3 | $3yz$ | $d_{21} = I_{201}$ |
| 2 | 2 | 12 | $3x^2 - 3y^2$ | $c_{22} = \frac{1}{4} I_{200} - \frac{1}{4} I_{220}$ |
| 2 | 2 | 12 | $6xy$ | $d_{22} = \frac{1}{4} I_{200} - \frac{1}{4} I_{220}$ |
| 3 | 0 | 1 | $-\frac{3}{2} x^2 z - \frac{3}{2} y^2 z + z^3$ | $c_{30} = -\frac{3}{2} I_{301} - \frac{3}{2} I_{321} + I_{303}$ |
| 3 | 1 | 6 | $-\frac{3}{2} x^3 - \frac{3}{2} xy^2 + 6xz^2$ | $c_{31} = -\frac{1}{4} I_{300} - \frac{1}{4} I_{320} + I_{302}$ |
| 3 | 1 | 6 | $-\frac{3}{2} x^2 y - \frac{3}{2} y^2 x + 6yz^2$ | $d_{31} = -\frac{1}{4} I_{300} - \frac{1}{4} I_{320} + I_{302}$ |
| 3 | 2 | 60 | $15x^2 z - 15y^2 z$ | $c_{32} = \frac{1}{4} I_{300} - \frac{1}{4} I_{320}$ |
| 3 | 2 | 60 | $30xyz$ | $d_{32} = \frac{1}{4} I_{300} - \frac{1}{4} I_{320}$ |
| 3 | 3 | 360 | $15x^3 - 15y^3$ | $c_{33} = \frac{1}{24} I_{300} - \frac{1}{8} I_{320}$ |
| 3 | 3 | 360 | $45x^2 y - 15y^3$ | $d_{33} = \frac{1}{24} I_{300} - \frac{1}{8} I_{320}$ |
| 4 | 0 | 1 | $\frac{3}{8} x^4 + \frac{3}{8} y^4 - \frac{3}{4} x^2 y^2 + \frac{3}{8} y^4 - \frac{3}{8} y^4 + z^4$ | $c_{40} = \frac{3}{8} I_{400} + \frac{3}{4} I_{420} - 3I_{402} + \frac{3}{8} I_{404} - 3I_{422} + I_{404}$ |
| 4 | 1 | 10 | $-\frac{15}{2} xy^2 z - \frac{15}{2} x^2 z + 10xz^3$ | $c_{41} = -\frac{3}{4} I_{401} - \frac{3}{4} I_{421} + I_{403} + I_{405}$ |
| 4 | 1 | 10 | $-\frac{15}{2} x^2 yz - \frac{15}{2} y^2 z + 10yz^3$ | $d_{41} = -\frac{3}{4} I_{401} - \frac{3}{4} I_{421} + I_{403} + I_{405}$ |
| 4 | 2 | 180 | $-\frac{15}{2} x^4 + 45x^2 y^2 + \frac{15}{2} y^4 - 45y^2 z^2$ | $c_{42} = -\frac{1}{24} I_{400} + \frac{1}{4} I_{402} + \frac{1}{48} I_{404} - \frac{1}{4} I_{402}$ |
| 4 | 2 | 180 | $-15x^2 y - 15xy^2 + 90xyz^2$ | $d_{42} = -\frac{1}{12} I_{400} - \frac{1}{12} I_{420} + \frac{1}{2} I_{412}$ |
| 4 | 3 | 2520 | $105x^3 z - 415xy^2 z$ | $c_{43} = \frac{1}{24} I_{400} - \frac{1}{8} I_{420}$ |
| 4 | 3 | 2520 | $415x^2 yz - 105y^3 z$ | $d_{43} = \frac{1}{24} I_{400} - \frac{1}{8} I_{420}$ |
| 4 | 4 | 20160 | $105x^4 - 630x^2 y^2 + 105y^4$ | $c_{44} = \frac{1}{192} I_{400} - \frac{1}{32} I_{420} + \frac{1}{192} I_{404}$ |
| 4 | 4 | 20160 | $420x^3 y - 420y^3 x$ | $d_{44} = \frac{1}{48} I_{400} - \frac{1}{48} I_{420}$ |

Так как все величины c_{ik} и d_{ik} [формулы (15)] имеют вид $\int U dm$, где интеграл распространяется на все массы, заключенные внутри геоида регуляризированной Земли (вне геоида масс нет), а U есть функция гармоническая внутри геоида, то (Идельсон, 1936, стр. 159) все эти величины и величины непосредственно от них зависящие будут стоксовыми постоянными, т. е. они вполне определяются общим количеством масс, поверхностью геоида и угловой скоростью его вращения. Следует также заметить, что различные моменты масс Земли, пропорциональные величинам I_{ik} , вообще говоря, не являются стоксовыми постоянными и только их комбинации, помещенные в табл. на стр. 509 являются таковыми.

§ 4. Порядок величин A_1 и B_2 и точность дальнейших выкладок

Порядок величин A_1 определяется значениями коэффициентов c_{ik} и d_{ik} , а порядок B_2 — значениями величин σ . Назовем величиной первого порядка малости величину, близкую к величине второго эксцентриситета $i = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$, обычно употребляемых в геодезии референциальных эллипсоидов, связанного с сжатием $\alpha = \frac{a-b}{a}$ формулой $i^2 = 2\alpha + 3\alpha^2 + 4\alpha^3 + \dots$. Условимся в дальнейшем пренебрегать лишь величинами, порядок которых заведомо равен пяти и выше. Следовательно, будем производить расчеты с точностью до малых величин четвертого порядка. Можно также сказать, что в таком случае будет сохранена точность порядка квадрата сжатия.

Что касается величины B_2 , то ее можно считать величиной второго порядка малости, так как σ , как это видно из формулы (7), содержит отношение величин, близких к центробежной силе на экваторе и к силе тяжести на экваторе, что, как известно, имеет порядок сжатия.

Займемся оценкой порядка величины A_1 . Во-первых, $A_1 = 1$, как это следует из значения c_{00} указанного в табл. на стр. 509. Кроме того, очевидно, $A_1 = 0$, ибо начало координатных осей взято нами в центре масс Земли, и поэтому $c_{10} = c_{11} = d_{11} = 0$, как это видно из формулы (18). Остается оценить лишь порядок величин A_2 , A_3 , A_4 и т. д.

Так как коэффициенты c_{ik} и d_{ik} , входящие в эти выражения, зависят от моментов масс Земли различных порядков, то по существу для определения их порядка следовало бы принять какую-либо гипотезу о расположении масс внутри Земли. Однако это можно сделать с большей уверенностью и проще, используя известное выражение для потенциальной функции сжатого и вращающегося эллипсоида вращения. По Стоксу, внешняя потенциальная функция такого эллипсоида вполне определяется его геометрическими параметрами a и b , угловой скоростью его вращения ω и величиной заключенной в нем массы M и не требует для своего определения данных о расположении этих масс внутри эллипсоида. Потенциал силы тяжести $W = fV + \frac{\omega^2}{2} r^2 \cos^2 \psi$ такого эллипсоида находим, если для V принять следующее точное выражение (Пизетти, 1938, стр. 42),

$$V = \left(M + \frac{2Q}{3} \right) \frac{\arctg E}{\sqrt{a^2 - b^2}} - \frac{Q}{\sqrt{a^2 - b^2}} \left(\arctg E - \frac{E}{1 + E^2} \right) (x^2 + y^2) - \frac{2Q}{\sqrt{a^2 - b^2}} (E - \arctg E) z^2, \quad (22)$$

где Q определяется уравнением

$$\frac{Q}{a^2 b^2} [(3 + i^2) \arctg i - 3i] = \frac{\omega^2}{2f}, \quad (23)$$

а величина E находится из равенства

$$E = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 + \lambda}}, \quad (24)$$

где λ есть больший корень уравнения

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2 + \lambda} + \frac{z^2}{b^2 + \lambda} = 1. \quad (25)$$

Как известно, геоид Земли лишь незначительно отличается от так называемого общего земного эллипсоида, отклоняясь от его поверхности в пределах около 150 м. Этот эллипсоид есть уравненный эллипсоид, центр его совпадает с центром масс Земли, вращается он с той же угловой скоростью, что и Земля, и внутри его заключена масса, равная массе всей Земли (Жонголович, 1952, стр. 62). Можно считать, что его внешнее потенциальное поле лишь незначительно отличается от потенциального поля Земли и параметры, их определяющие, не отличаются значительно друг от друга.

Следует, очевидно, выражение для потенциала силы тяжести W такого эллипсоида получить в виде разложения подобного (11) и сравнить соответствующие коэффициенты. Используем для этого приведенные выше формулы, пригодные для любого уравненного эллипсоида, и произведем указанное разложение.

$$a^2 - b^2 = b^2 f, \quad x^2 + y^2 = r^2 \cos^2 \psi, \quad z^2 = r^2 \sin^2 \psi \quad (26)$$

и вводя временно обозначение

$$k = \frac{b^2}{r}, \quad (27)$$

нечетные формулы (22) можем написать

$$V = \left(\frac{M}{r} + \frac{2Q}{3r} \right) \left[\frac{\arctg E}{k} \right] - \frac{Q}{r} \cos^2 \psi \left[\frac{\arctg E - \frac{E}{1 + E^2}}{k^2} \right] - \frac{2Q}{r} \sin^2 \psi \left[\frac{E - \arctg E}{k^2} \right]. \quad (28)$$

а исключая из формулы (24) и (25) величину λ , найдем

$$E^2 + E^4 \sin^2 \psi = k^2 (1 + E^2). \quad (29)$$

Разлагая в соответствии с последним соотношением величину E по нечетным степеням k до члена с k^4 , получим

$$E = k + \frac{k^3}{2} \cos^2 \psi + \frac{k^5}{8} \cos^4 \psi (7 \cos^2 \psi - 4) + \frac{k^7}{16} \cos^2 \psi (33 \cos^4 \psi - 36 \cos^2 \psi + 8) + \dots \quad (30)$$

Пользуясь этим, найдем для величин, заключенных в квадратные скобки в формуле (28), следующие выражения с точностью до k^4 :

$$\begin{aligned} \arctg E &= 1 + k^2 \left(\frac{1}{2} \cos^2 \psi - \frac{1}{3} \right) + k^4 \left(\frac{7}{8} \cos^4 \psi - \cos^2 \psi + \frac{1}{5} \right) + \\ &+ k^6 \left(\frac{33}{16} \cos^6 \psi - \frac{27}{8} \cos^4 \psi + \frac{3}{2} \cos^2 \psi - \frac{1}{7} \right), \\ \arctg E - \frac{E}{1 + E^2} &= \frac{2}{3} + k^2 \left(\cos^2 \psi - \frac{4}{5} \right) + k^4 \left(\frac{9}{4} \cos^4 \psi - 3 \cos^2 \psi + \frac{6}{7} \right) + \\ &+ k^6 \left(\frac{143}{24} \cos^6 \psi - 11 \cos^4 \psi + 6 \cos^2 \psi - \frac{8}{9} \right), \\ \frac{E - \arctg E}{k^2} &= \frac{1}{3} + k^2 \left(\frac{1}{2} \cos^2 \psi - \frac{1}{5} \right) + k^4 \left(\frac{9}{8} \cos^4 \psi - \cos^2 \psi + \frac{1}{7} \right) + \\ &+ k^6 \left(\frac{143}{48} \cos^6 \psi - \frac{33}{8} \cos^4 \psi + \frac{3}{2} \cos^2 \psi - \frac{1}{9} \right). \end{aligned} \quad (31)$$

Подставляя эти выражения в формулу (28), группируя члены одного порядка и восстанавливая значение k по формуле (27), найдем

$$V = \frac{M}{r} - \frac{b^2 r^2}{3a^3} \left(M - \frac{8}{15} Q \right) P_{20} + \frac{b^4 r^4}{5a^5} \left(M - \frac{16}{21} Q \right) P_{40} - \frac{b^6 r^6}{7a^7} \left(M - \frac{8}{9} Q \right) P_{60} + \dots, \quad (32)$$

где $P_{20} = P_{20}(\sin \varphi)$ — зональные сферические функции от $\sin \varphi$ для $l=2, 4, 6, \dots$.
Найдем теперь выражение для потенциала W сил тяжести рассматриваемого эллипсоида. Введя в рассмотрение значение потенциала на поверхности этого эллипсоида W_0 и вспомогательные величины r_0, g_0, c_0, τ , аналогичные указанным формулам (7) и (8), получим

$$W = W_0 \left(1 + \tau^2 A_2 + \tau^4 A_4 + \tau^6 A_6 + \dots + B_{2n} \tau^{2n} \right), \quad (33)$$

где B_2 естественно определяется той же формулой (11), как и в случае произвольной Земли, а выражения A_2, A_4, A_6, \dots вместо формулы (15) имеют следующий простой вид:

$$A_2 = c_{20} P_{20}, \quad A_4 = c_{40} P_{40}, \quad A_6 = c_{60} P_{60}, \quad (34)$$

причем коэффициенты c_{20}, c_{40}, c_{60} определяются по формулам

$$\begin{aligned} c_{20} &= -\frac{b^2 r^2}{3a^3} \left(1 - \frac{8}{15} \frac{Q}{M} \right), \\ c_{40} &= -\frac{b^4 r^4}{5a^5} \left(1 - \frac{16}{21} \frac{Q}{M} \right), \\ c_{60} &= -\frac{b^6 r^6}{7a^7} \left(1 - \frac{8}{9} \frac{Q}{M} \right), \end{aligned} \quad (35)$$

показывающим, что порядки величин A_2, A_4, A_6 будут в основном соответствовать степеням r^2, r^4, r^6 . Кроме того, сравнивая полученные результаты с общими для Земли выражениями (11) и (14), мы видим, что на общей формуле для W исчезли все A_4 с нечетными индексами l , а в оставшихся A_2 с четными индексами l из всех $2n-1$ коэффициентов c_{2n} и d_{2n} сохранился лишь один c_{2n} .

Можно, очевидно, предполагать, что все величины, исчезающие в выражении W для общего эллипсоида, будут иметь лишь сравнительно небольшие значения для Земли вообще.

На основании сказанного, откинем в общей формуле (11) выражения A_2, A_4 и т. д. как выходящие из пределов принятой точности. Из оставшихся выражений A_2 и B_2 будем считать величинами второго порядка, а A_4 — четвертого порядка. Оставим также выражение A_6 и для удобства и единообразия последующих выкладок будем считать ее величиной третьего порядка малости; возможно, что она окажется еще меньше. Сохраним также для общности все c_{2n} и d_{2n} , хотя многие из них могут оказаться и меньше четвертого порядка. Заранее исключим лишь коэффициенты c_{21} и d_{21} как величины для Земли весьма очень малые, что показывает последняя из формул (21).

Таким образом, в дальнейшем мы будем иметь дело со следующим выражением для W :

$$W = W_0 \left(1 + \tau^2 A_2 + \tau^4 A_4 + \tau^6 A_6 + B_{2n} \tau^{2n} \right), \quad (36)$$

где индексы у выражений, стоящих при различных степенях τ , указывают порядок их малости. Все выкладки будем производить, сохраняя формально лишь величины до четвертого порядка малости.

¹ Если для примера определим общий эллипсоид следующими параметрами (Жонгловский, 1952, стр. 66 и 67): $a = 6378250$ м, $b = 6356573$ м, $M = 39836 \cdot 10^8$ см³ сек⁻², откуда получается такое $W_0 = 62639 \cdot 10^8$ см² сек⁻², то по указанным выше формулам получим $r = 67724 \cdot 10^3$ м, $g = 6356731$ м, $r_0 = 6373766$ м, $Q = 38243 \cdot 10^8$ см³ сек⁻², $c_{20} = -11076 \cdot 10^{-8}$, $c_{40} = +246 \cdot 10^{-8}$, $c_{60} = -0.6 \cdot 10^{-8}$.

§ 5. Земной сфероид, его уравнение и величина, характеризующая его размеры

Представляя потенциал сил тяжести в виде (36), т. е. ограничиваясь в разложении (11) лишь определенным количеством членов, мы тем самым заменим сложную поверхность геоида Земли некоторой более простой фигурой, совпадающей с геоидом лишь с точностью до величин порядка квадрата сжатия. Назовем эту поверхность земным сфероидом четвертого порядка. Для получения уравнения этой поверхности в сферических координатах применим выражение (36) к точке, находящейся на поверхности этого сфероидов, т. е. положим $W = W_0$, что даст

$$1 + A_2 \tau^2 + A_4 \tau^4 + A_6 \tau^6 + B_{2n} \tau^{2n} = 1. \quad (37)$$

Отсюда видно, что τ отличается от единицы на величину второго порядка и выше. Положив $\tau = 1 + s$ и пренебрегая величинами выше четвертого порядка малости, имеем

$$1 + s + A_2(1 + 3s) + A_4 + A_6 + B_{2n}(1 - 2s) = 1. \quad (38)$$

Определив отсюда s и учитывая (8), находим следующее общее выражение для радиуса вектора r нашего сфероидов:

$$r = r_0 \left(1 + A_2 + B_{2n} + A_4 + A_6 - 2A_2^2 + 3B_{2n}^2 + A_2 B_{2n} \right). \quad (39)$$

Подставляя сюда выражения для B_{2n} и A_n по формулам (11) и (15) и делая некоторые преобразования, получаем выражение для r в виде суммы сферических функций

$$r = r_0 \left\{ p_{00} + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=0}^n (p_{nk} \cos kl + q_{nk} \sin kl) P_{nk}(\sin \varphi) \right\}, \quad (40)$$

где коэффициенты p_{nk} и q_{nk} следующим образом выражаются через ранее введенные величины:

$$\begin{aligned} p_{00} &= 1 + \frac{2}{3} \tau^2 + \frac{8}{15} \tau^4 - \frac{2}{15} c_{20} \tau^2 - \frac{2}{5} c_{40} \tau^4 - \frac{2}{5} (c_{22}^2 + d_{22}^2); \\ p_{20} &= c_{20} \tau^2 + \frac{2}{3} \tau^4 + \frac{10}{21} c_{20} \tau^2 - \frac{4}{7} c_{40} \tau^4 - \frac{48}{7} (c_{22}^2 + d_{22}^2); \\ p_{40} &= c_{40} \tau^4 + \frac{24}{35} \tau^6 - \frac{12}{35} c_{20} \tau^4 - \frac{36}{35} c_{40} \tau^6 - \frac{72}{35} (c_{22}^2 + d_{22}^2); \\ p_{22} &= q_{22} = 0; \quad p_{22} = c_{22} \tau^2 + \frac{6}{7} c_{22} \tau^4 + \frac{8}{7} c_{40} \tau^2; \quad q_{22} = d_{22} \tau^2 + \frac{6}{7} d_{22} \tau^4 + \frac{8}{7} c_{40} \tau^2; \\ p_{42} &= c_{42} \tau^4; \quad q_{42} = d_{42} \tau^4; \quad p_{42} = c_{42} \tau^4; \quad q_{42} = d_{42} \tau^4; \quad p_{42} = c_{42} \tau^4; \quad q_{42} = d_{42} \tau^4; \\ p_{44} &= c_{44} \tau^4; \quad q_{44} = d_{44} \tau^4; \quad p_{44} = c_{44} \tau^4; \quad q_{44} = d_{44} \tau^4; \quad p_{44} = c_{44} \tau^4; \quad q_{44} = d_{44} \tau^4; \end{aligned} \quad (41)$$

Уравнение (40) и представляет собой уравнение в сферических координатах рассматриваемого нами земного сфероидов. Для характеристики его формы должны быть известны значения входящих в выражения (41) величин c_{2n} , d_{2n} и c_{4n} . В дальнейшем будет показано, как можно определить эти величины из наблюдений сил тяжести на земной поверхности. Что касается величин r_0 , то она характеризует размеры нашего сфероидов и значение ее не может быть получено только на данных о гравитационном поле Земли. Для ее определения необходимо иметь также данные о результатах астрономо-геодезических работ на земной поверхности. Наиболее удобно с этой целью использовать

известное понятие об общем земном эллипсоиде, методы получения формы и размеров которого на результатов гравитационных и астрономо-геодезических работ достаточно хорошо разработаны.¹

Мы предположим, что нам уже известны форма и размеры общего земного эллипсоида, т. е. его сжатие $\bar{\alpha}$ и полуоси \bar{a} и \bar{b} . Напомним, что центр этого эллипсоида совпадает с центром масс Земли, малая ось — с осью вращения Земли, а поверхность его максимально совпадает с поверхностью геоида Земли. В нашем приближении последнее условие, очевидно, должно относиться к поверхности упомянутого земного сфероида.

Уравнение общего земного эллипсоида

$$\frac{x^2 + y^2}{\bar{a}^2} + \frac{z^2}{\bar{b}^2} = 1 \quad (42)$$

в сферических координатах, с точностью до величин квадрата сжатия, можно представить в виде

$$r = \bar{b} [P_{00} + P_{20}(\sin \psi) + P_{40}P_{10}(\sin \psi)], \quad (43)$$

где

$$P_{00} = 1 + \frac{2}{3} \bar{\alpha} + \frac{7}{15} \bar{\alpha}^2, \quad P_{20} = -\frac{2}{3} \bar{\alpha} - \frac{17}{21} \bar{\alpha}^2, \quad P_{40} = \frac{12}{35} \bar{\alpha}^2. \quad (44)$$

Составим теперь выражение для расстояния N вдоль радиуса вектора между поверхностью земного сфероида (40) и поверхностью общего земного эллипсоида (43)

$$N = r - \bar{r} = (r_{00}P_{00} - \bar{b}P_{00}) + (r_{20}P_{20} - \bar{b}P_{20})P_{20}(\sin \psi) + (r_{40}P_{40} - \bar{b}P_{40})P_{40}(\sin \psi) + \\ + r_{02} \left\{ (p_{22} \cos 2l + q_{22} \sin 2l) P_{22}(\sin \psi) + \sum_{k=2}^n (p_{4k} \cos kl + q_{4k} \sin kl) P_{4k}(\sin \psi) \right\}. \quad (45)$$

Максимальное совпадение указанных двух поверхностей требует минимума для суммы квадратов этих расстояний, т. е. для величин

$$\Omega = \int N^2 ds = 4\pi \left\{ (r_{00}P_{00} - \bar{b}P_{00})^2 + \frac{1}{5} (r_{20}P_{20} - \bar{b}P_{20})^2 + (\text{величин высшего порядка}) + \right. \\ \left. + (\text{величин, не содержащие параметров эллипсоида}) \right\}, \quad (46)$$

при подсчете которой интеграл взят по поверхности единичной сферы и использованы известные свойства сферических функций. В соответствии с двумя параметрами \bar{b} и $\bar{\alpha}$, определяющими общий земной эллипсоид, условия минимума функции Ω будут

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \bar{b}} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \bar{\alpha}} = 0, \quad (47)$$

что после соответствующих выкладок приводит к следующим двум уравнениям:

$$r_0 \left(1 + \frac{2}{3} \bar{\alpha} + \frac{8}{5} \bar{\alpha}^2 - \frac{2}{15} \bar{\alpha} c_{20} - \frac{2}{5} c_{20}^2 - \frac{24}{5} (c_{22}^2 + d_{22}^2) + \frac{2}{3} \bar{\alpha} + \frac{8}{15} \bar{\alpha} c_{20} + \frac{7}{15} \bar{\alpha}^2 - \frac{2}{15} \bar{\alpha} c_{20} \right) = \\ = \bar{b} \left(1 + \frac{4}{3} \bar{\alpha} + \frac{22}{15} \bar{\alpha}^2 \right), \quad (48) \\ r_0 \left(1 + \frac{4}{5} \bar{\alpha} - \frac{1}{5} c_{20} + \frac{72}{35} \bar{\alpha}^2 - \frac{8}{5} \bar{\alpha} c_{20} - \frac{2}{7} c_{20}^2 - \frac{216}{35} (c_{22}^2 + d_{22}^2) + \frac{7}{5} \bar{\alpha} + \frac{44}{35} \bar{\alpha} c_{20} - \frac{17}{35} \bar{\alpha} c_{20} \right) = \\ = \bar{b} \left(1 + \frac{11}{5} \bar{\alpha} + \frac{66}{35} \bar{\alpha}^2 \right).$$

¹ См., например, предыдущие работы автора (Жогаляков, 1952, 1956).

Для одно уравнение на другое, исключая сначала величин r_0 и \bar{b} и из получившегося равенства методом последовательных приближений находим следующее соотношение для $\bar{\alpha}$:

$$\bar{\alpha} = c - \frac{3}{2} c_{20} + \frac{31}{14} c^2 + \frac{27}{14} c_{20} c - \frac{3}{8} c_{20}^2 - \frac{72}{7} (c_{22}^2 + d_{22}^2), \quad (49)$$

после чего любое из уравнений (48) дает

$$\bar{b} = r_0 \left[1 + c_{20} - \frac{12}{35} c^2 - \frac{24}{35} c_{20} c - \frac{1}{5} c_{20}^2 + \frac{72}{35} (c_{22}^2 + d_{22}^2) \right]. \quad (50)$$

Равенство (49) не дает для определения фигуры земного сфероида каких-либо новых данных, так как сжатие общего земного эллипсоида $\bar{\alpha}$ так же определяется по данным о внешнем гравитационном поле Земли, как и величин, стоящие в правой части равенства. Если для одной и другой задачи использован тот же гравитационный материал, то равенство (49) может дать лишь дополнительный контроль сделанных расчетов.

Равенство (50) играет важную роль в разбираемом вопросе, так как дает простое средство для определения величин r_0 , характеризующей размеры земного сфероида, связывая его определенным образом с малой полуосью общего земного эллипсоида \bar{b} , определение которой по результатам гравиметрических и астрономо-геодезических работ не представляет принципиальных затруднений. Практическое использование равенства (50) будет выяснено дальше в § 7.

§ 6. Выражение для силы тяжести на земном сфероиде

Пользуясь выражением для потенциала сил тяжести W в функции сферических координат (36), получаем значение сил тяжести g по формуле

$$g = \sqrt{g_r^2 + g_\psi^2 + g_l^2}, \quad (51)$$

где

$$g_r = \frac{\partial W}{\partial r}, \quad g_\psi = \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \psi}, \quad g_l = \frac{1}{r \cos \psi} \frac{\partial W}{\partial l}. \quad (52)$$

Суть проекции вектора силы тяжести на оси сферических координат r, ψ, l .

Продолжая указанные выкладки, приняв во внимание, что из формул (8) следует

$$\frac{\partial r}{\partial r} = -r_0^{-1/2}, \quad (53)$$

и учитывая обозначение g_0 , введенное формулой (7), получим для любой точки вне или на сфероиде следующие выражения:

$$g_r = -g_0 (r^2 + 3A_2 r^4 + 4A_4 r^6 + 5A_6 r^8 - 2B_2 r^{-1}), \\ g_\psi = g_0 \left(\frac{\partial A_2}{\partial \psi} r^4 + \frac{\partial A_4}{\partial \psi} r^6 + \frac{\partial A_6}{\partial \psi} r^8 + \frac{\partial B_2}{\partial \psi} r^{-1} \right), \\ g_l = g_0 \left(\frac{\partial A_2}{\partial l} r^4 + \frac{\partial A_4}{\partial l} r^6 + \frac{\partial A_6}{\partial l} r^8 \right) \sec \psi. \quad (54)$$

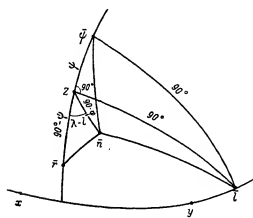
Подставляя сюда значение r для поверхности сфероида по формуле (39), получим для точки, лежащей на поверхности сфероида,

$$g_r = -g_0 [1 + A_2 - 4B_2 + 2A_4 + 3A_6 - 5A_2^2 - 5B_2^2 - 10A_2 B_2], \\ g_\psi = g_0 \left[\frac{\partial A_2}{\partial \psi} + \frac{\partial B_2}{\partial \psi} + \frac{\partial A_4}{\partial \psi} + \frac{\partial A_6}{\partial \psi} - 4(A_2 + B_2) \frac{\partial A_2}{\partial \psi} + (A_2 + B_2) \frac{\partial B_2}{\partial \psi} \right], \\ g_l = g_0 \left[\frac{\partial A_2}{\partial l} + \frac{\partial A_4}{\partial l} + \frac{\partial A_6}{\partial l} - 4(A_2 + B_2) \frac{\partial A_2}{\partial l} \right] \sec \psi. \quad (55)$$

Подставляя эти выражения в формулу (51), получим с принятой точностью для силы тяжести g на сфероиде следующее выражение:

$$g = g_0 [1 + A_2 - 4B_2 + 2A_3 + 3A_4 - 5A_2^2 - 5B_2^2 - 10A_2B_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A_2}{\partial \varphi} \right)^2 + \frac{\partial A_2}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial B_2}{\partial \varphi} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial B_2}{\partial \varphi} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A_2}{\partial \varphi} \right)^2 \sec^2 \varphi] \quad (56)$$

Величины, стоящие в правой части формулы (56), являются функциями геоцентрических координат φ и l , указывающих направление радиуса вектора, проведенного из центра масс Земли в данную точку на геоиде. Для возможности практического использования выражения (56) необходимо преобразовать его от сферических координат к астрономическим координатам φ и λ , определяющих направление нормали к геоиду, ибо из непосредственных наблюдений мы определяем именно эти координаты в пунктах



r — радиусу вектору, или направлению первой оси сферических координат, точка l — третьей оси и, наконец, точка λ — направлению внешней нормали к сфероиду в данном пункте.

Из сферических треугольников ΔZP , ΔZG , известные величины сторон и углов которых помечены на рисунке, получаем искомые косинусы углов $\cos(n, r)$, $\cos(n, \lambda)$, $\cos(r, \lambda)$ и соответствующие проекции вектора силы тяжести на оси r , λ , l

$$\begin{aligned} g_r &= -g \cos(n, r) = -g [\sin \varphi \sin \lambda + \cos \varphi \cos \lambda \cos(l - \lambda)], \\ g_n &= -g \cos(n, \lambda) = -g [\sin \varphi \cos \lambda - \cos \varphi \sin \lambda \cos(l - \lambda)], \\ g_l &= -g \cos(n, l) = -g [-\cos \varphi \sin(l - \lambda)]. \end{aligned} \quad (57)$$

Сравнивая эти выражения с выражениями (55) и принимая во внимание зависимость между g и g_0 данную формулой (56), получаем с принятой точностью

$$\begin{aligned} \sin \varphi \sin \lambda + \cos \varphi \cos \lambda \cos(l - \lambda) &= 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A_2}{\partial \varphi} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial B_2}{\partial \varphi} \right)^2 - \frac{\partial A_2}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial B_2}{\partial \varphi} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A_2}{\partial \varphi} \right)^2 \sec^2 \varphi, \\ -\sin \varphi \cos \lambda - \cos \varphi \sin \lambda \cos(l - \lambda) &= \frac{\partial A_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial B_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_4}{\partial \varphi} - 5A_2 \frac{\partial A_2}{\partial \varphi} + 5B_2 \frac{\partial B_2}{\partial \varphi}, \\ \cos \varphi \cos \lambda \sin(l - \lambda) &= \frac{\partial A_2}{\partial \lambda} + \frac{\partial A_3}{\partial \lambda} + \frac{\partial A_4}{\partial \lambda} - 5A_2 \frac{\partial A_2}{\partial \lambda}. \end{aligned} \quad (58)$$

Из этих выражений следующим образом можно получить искомые разности $\varphi - \psi$ и $\lambda - l$, которые называются также абсолютными уклонениями отвесных линий на сфероиде. Умножим первое уравнение (58) на $\sin \psi$, второе уравнение на $-\cos \psi$ и, сложив их, получим

$$\begin{aligned} \sin \varphi - \sin \psi &= - \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial A_2}{\partial \varphi} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial B_2}{\partial \varphi} \right)^2 + \frac{\partial A_2}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial B_2}{\partial \varphi} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A_2}{\partial \varphi} \right)^2 \sec^2 \varphi \right] \sin \psi - \\ &= \left[\frac{\partial A_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial B_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_4}{\partial \varphi} - 5A_2 \frac{\partial A_2}{\partial \varphi} + 5B_2 \frac{\partial B_2}{\partial \varphi} \right] \cos \psi. \end{aligned} \quad (59)$$

Так как при малой разности углов $\varphi - \psi$ можно написать

$$\varphi - \psi = (\sin \varphi - \sin \psi) \sec \psi + \frac{1}{2} (\sin \varphi - \sin \psi)^2 \sec^3 \psi \lg \psi \dots, \quad (60)$$

то, учитывая выражение (59), получаем

$$\varphi - \psi = - \frac{1}{\sec \psi} \left(A_2 + B_2 + A_3 + B_3 - \frac{5}{2} A_2^2 + \frac{5}{2} B_2^2 \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A_2}{\partial \varphi} \right)^2 \sec^3 \psi \lg \psi. \quad (61)$$

Из третьего уравнения (58) найдем $\lambda - l$. Так как эта величина, очевидно, второго порядка, то с принятой точностью достаточно заменить синус ее самим углом, а множитель $\cos \varphi \cos \lambda$, сохраняя в нем лишь величинами второго порядка, представить в виде

$$\cos \varphi \cos \lambda = \cos^2 \psi [\cos(\varphi - \psi) - \sin(\varphi - \psi) \lg \psi] = \cos^2 \psi \left[1 + \frac{\partial(A_2 + B_2)}{\partial \varphi} \lg \psi \right]. \quad (62)$$

Приняв это во внимание, легко получаем

$$(\lambda - l) \cos^2 \psi = - \frac{\partial(A_2 + A_3 + A_4 - \frac{5}{2} A_2^2)}{\partial \lambda} + \frac{\partial A_2}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial(A_2 + B_2)}{\partial \varphi} \lg \psi. \quad (63)$$

Формулы (61) и (63) показывают, что разности $\varphi - \psi$ и $\lambda - l$ содержат величины второго порядка малости и выше. Поэтому при преобразовании различных выражений от сферических координат к астрономическим можно во всех членах третьего и четвертого порядка малости просто заменить φ на ψ и l на λ , а соответствующие преобразования необходимо сделать лишь в членах второго порядка малости, причем эти изменения будут величинами четвертого порядка. Обозначим в общем виде такой член второго порядка в виде $F_2(\varphi, \lambda)$. По строке Тейлора получаем

$$F_2(\psi, l) = F_2(\varphi, \lambda) + (\psi - \varphi) \frac{\partial F_2(\varphi, \lambda)}{\partial \varphi} + (l - \lambda) \frac{\partial F_2(\varphi, \lambda)}{\partial \lambda}. \quad (64)$$

Во входящих сюда разностях $(\psi - \varphi)$ и $(l - \lambda)$, очевидно, достаточно сохранить лишь члены второго порядка, т. е. согласно формулам (61) и (63) принять

$$\begin{aligned} \psi - \varphi &= \frac{\partial A_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial B_2}{\partial \varphi}, \\ l - \lambda &= \frac{\partial A_2}{\partial \lambda} \sec^2 \varphi. \end{aligned} \quad (65)$$

Применяя теперь указанное преобразование к членам A_2 и $4B_2$, стоящим в квадратных скобках, равенства (56), получаем для выражения силы тяжести на сфероиде g

следующее окончательное выражение, все члены которого содержат лишь астрономические координаты φ и λ :

$$g = g_0 \left[1 + A_2 - 4B_2 + 2A_3 + 3A_4 - 5A_2^2 - 5B_2^2 - 10A_2B_2 + \frac{3}{2} \left(\frac{\partial A_2}{\partial \varphi} \right)^2 - \frac{7}{2} \left(\frac{\partial B_2}{\partial \varphi} \right)^2 - 2 \frac{\partial A_2}{\partial \varphi} \frac{\partial B_2}{\partial \varphi} + \frac{3}{2} \left(\frac{\partial A_2}{\partial \lambda} \right)^2 \sec^2 \varphi \right]. \quad (66)$$

Подставляя сюда выражения для B_2 и A_4 по формулам (10) и (14) и делая некоторые преобразования, получаем выражение для g в виде суммы сферических функций

$$g = g_0 \left\{ a_0 + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=0}^n (a_{nk} \cos k\lambda + b_{nk} \sin k\lambda) P_{nk}(\sin \varphi) \right\}, \quad (67)$$

где коэффициенты a_{nk} и b_{nk} следующим образом выражаются через ранее введенные величины:

$$\begin{aligned} a_{00} &= 1 - \frac{8}{3} \sigma - \frac{68}{15} \sigma^2 + \frac{44}{15} \sigma c_{20} + \frac{4}{5} c_{20}^2 + \frac{48}{5} \left(c_{22}^2 + d_{22}^2 \right); \\ a_{20} &= c_{20} + \frac{8}{3} \sigma + \frac{52}{21} \sigma^2 - \frac{76}{21} \sigma c_{20} - \frac{1}{7} c_{20}^2 + \frac{12}{7} \left(c_{22}^2 + d_{22}^2 \right); \\ a_{40} &= 3c_{40} + \frac{72}{35} \sigma^2 + \frac{24}{35} \sigma c_{20} - \frac{198}{35} c_{20}^2 - \frac{396}{35} \left(c_{22}^2 + d_{22}^2 \right); \\ a_{21} &= b_{21} = 0; \quad a_{22} = c_{22} - \frac{68}{7} \sigma c_{22} + \frac{2}{7} \sigma c_{20} c_{22}; \quad b_{22} = d_{22} - \frac{68}{7} \sigma d_{22} + \frac{12}{7} \sigma c_{20} d_{22}; \\ a_{40} &= 2c_{40}; \quad a_{21} = 2c_{21}; \quad b_{21} = 2d_{21}; \quad a_{42} = 2c_{42}; \quad b_{42} = 2d_{42}; \quad a_{44} = 2c_{44}; \quad b_{44} = 2d_{44}; \\ a_{41} &= 3c_{41}; \quad b_{41} = 3d_{41}; \quad a_{42} = 3c_{42} + \frac{4}{35} \sigma c_{22} - \frac{66}{35} \sigma c_{20} c_{22}; \quad b_{42} = 3d_{42} + \frac{4}{35} \sigma d_{22} - \frac{66}{35} \sigma c_{20} d_{22}; \\ a_{43} &= 3c_{43}; \quad b_{43} = 3d_{43}; \quad a_{44} = 3c_{44} - \frac{33}{70} (c_{22}^2 - d_{22}^2); \quad b_{44} = 3d_{44} - \frac{66}{70} c_{20} d_{22}. \end{aligned} \quad (68)$$

§ 7. Определение параметров потенциала земного притяжения из результатов наблюдений и окончательное выражение этого потенциала

Как уже было упомянуто раньше, в настоящей работе имеется в виду определение параметров, характеризующих потенциал земного притяжения из результатов определения сил тяжести на земной поверхности. При этом будем предполагать, что предварительно на основании материала о мировой гравиметрической съемке получено разложение сил тяжести в ряд по сферическим функциям вида

$$g = A_0 + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=0}^n (A_{nk} \cos k\lambda + B_{nk} \sin k\lambda) P_{nk}(\sin \varphi), \quad (69)$$

где φ и λ астрономические координаты.

Если бы вся поверхность Земли была сплошь покрыта гравиметрическими наблюдениями, то получение значений любых коэффициентов ряда (69) производилось бы просто и независимо друг от друга. Это разложение можно было бы сделать практически до любой желаемой гармоник n . Для наших целей можно было бы использовать лишь начальные члены такого разложения до $n=4$, в соответствии с введенным выше понятием о земном сфероиде четвертого порядка, и отбросить в разложении (69) остальные члены как выходящие за пределы принятой точности вычислений.

Однако в данное время мировая гравиметрическая съемка еще очень далека от сплошной сети, хотя бы и редко расположенных пунктов. Огромные пространства земной поверхности, особенно поверхности мирового океана, еще совершенно гравиметрически не обследованы. Поэтому в данное время определение даже небольшого числа коэффициентов ряда (69) представляет значительные трудности. Включение в разложение гармоник высшего порядка не оправдывается наличием имеющегося материала и может даже внести дополнительные искажения в коэффициенты первых гармоник. Вероятно, наиболее рационально при таких обстоятельствах в разложении (69) ограничиться лишь членами до $n=4$ и соответственно с произведенной заменой точной фигуры геоида земным сфероидом четвертого порядка. Оставшиеся коэффициенты в таком разложении и будут однообразным образом соответствовать имеющемуся наличию данных о гравиметрическом поле Земли.

Как бы то ни было, для дальнейших приложений следует принять известным разложение (69) до значения $n=4$. Такое разложение не должно содержать гармоник первого порядка, т. е. коэффициентов A_{10} , A_{11} , B_{11} , для чего делается необходимое уравнение исходного гравиметрического материала (Жонголович, 1952, стр. 78); кроме того, в этом разложении можно с принятой точностью заранее положить $A_{11} = B_{11} = 0$, как это следует из результатов наблюдений над изменением широт.

Таким образом, будем предполагать, что мы имеем разложение (69), для которого известны численные значения всех 20 оставшихся коэффициентов начальных гармоник до $n=4$. Это именно и является тем основным материалом, который служит для определения искомых параметров, характеризующих потенциал земного притяжения. Сравнивая между собой коэффициенты разложений (67) и (69), получаем первые 20 из 22 уравнений системы (70). Два последних уравнения этой системы соответствуют ранее приведенным соотношениям (7) для величин σ и (50) для связи между c_6 и малой погрешностью общего земного эллипсоида b_1 , полученной из результатов астрономико-геодезических работ на материках. Система 22 уравнений (70) содержит, таким образом, 22 неизвестных, а именно: 19 коэффициентов c_{nk} и d_{nk} и три величины σ , g_0 , τ_0 .

Система уравнений для определения параметров потенциала земного притяжения

$$\begin{aligned} 1) \quad A_{00} &= g_0 \left(1 - \frac{8}{3} \sigma - \frac{68}{15} \sigma^2 + \frac{44}{15} \sigma c_{20} + \frac{4}{5} c_{20}^2 + \frac{48}{5} \left(c_{22}^2 + d_{22}^2 \right) \right), \\ 2) \quad A_{20} &= g_0 \left(c_{20} + \frac{8}{3} \sigma + \frac{52}{21} \sigma^2 - \frac{76}{21} \sigma c_{20} - \frac{1}{7} c_{20}^2 + \frac{12}{7} \left(c_{22}^2 + d_{22}^2 \right) \right), \\ 3) \quad A_{40} &= g_0 \left(3c_{40} + \frac{72}{35} \sigma^2 + \frac{24}{35} \sigma c_{20} - \frac{198}{35} c_{20}^2 - \frac{396}{35} \left(c_{22}^2 + d_{22}^2 \right) \right), \\ 4) \quad A_{22} &= g_0 \left(c_{22} - \frac{68}{7} \sigma c_{22} + \frac{2}{7} \sigma c_{20} c_{22} \right), \\ 5) \quad B_{22} &= g_0 \left(d_{22} - \frac{68}{7} \sigma d_{22} + \frac{2}{7} \sigma c_{20} d_{22} \right), \\ 6) \quad A_{40} &= g_0^2 c_{20}, \\ 7) \quad A_{21} &= g_0^2 c_{21}, \\ 8) \quad B_{21} &= g_0^2 d_{21}, \\ 9) \quad A_{42} &= g_0^2 c_{22}, \\ 10) \quad B_{42} &= g_0^2 d_{22}, \\ 11) \quad A_{44} &= g_0^2 c_{40}, \end{aligned} \quad (70)$$

¹ Эти 20 уравнений совпадают с уравнениями (59), полученными в упомянутой уже работе (Нумерон и Храмов, 1956), если в последних положить $c_{21} = d_{21} = 0$.

$$\begin{aligned}
12) B_{23} &= g_0 d_{23}, \\
13) A_{41} &= g_0 c_{41}, \\
14) B_{41} &= g_0 d_{41}, \\
15) A_{12} &= g_0 \left(3c_{12} + \frac{4}{35} \tau_{22} - \frac{66}{35} c_{20} c_{12} \right), \\
16) B_{12} &= g_0 \left(3d_{12} + \frac{4}{35} \tau_{22} - \frac{66}{35} c_{20} d_{12} \right), \\
17) A_{13} &= g_0 c_{13}, \\
18) B_{13} &= g_0 d_{13}, \\
19) A_{14} &= g_0 \left(3c_{14} - \frac{33}{70} \tau_{22} + \frac{33}{70} d_{22} \right), \\
20) B_{14} &= g_0 \left(3d_{14} - \frac{33}{35} \tau_{22} + \frac{33}{70} d_{22} \right), \\
21) \tau &= \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{r_0}{g_0}, \\
22) \bar{b} &= r_0 \left(1 + c_{20} - \frac{12}{35} \tau^2 - \frac{24}{35} \tau c_{20} - \frac{1}{5} c_{20}^2 + \frac{72}{35} c_{22}^2 + \frac{72}{35} d_{22}^2 \right).
\end{aligned} \quad (70)$$

Решение этой системы уравнений необходимо производить методом последовательных приближений. Можно этот процесс выполнить следующим образом.

Прежде всего составим 19 величин

$$\tau_{ab} = \frac{A_{ab}}{A_{00}}, \quad \pi_{ab} = \frac{B_{ab}}{A_{00}}. \quad (71)$$

Разделив четвертое и пятое из уравнений (70) на первое из них, имеем с точностью до величин второго порядка $c_{22} = \tau_{22}$ и $d_{22} = \pi_{22}$, а следовательно, с точностью до величин 4-го порядка

$$c_{22}^2 + d_{22}^2 = \tau_{22}^2 + \pi_{22}^2 \quad \text{и} \quad c_{22}^2 - d_{22}^2 = \tau_{22}^2 - \pi_{22}^2.$$

Разделив затем второе из уравнений (70) на первое, найдем, применяя метод последовательных приближений, следующее выражение c_{20} с полной принятой точностью:

$$c_{20} = \tau_{20} - \frac{8}{3} \tau_{20}^2 + \frac{100}{9} \tau_{22}^2 + \frac{4}{21} \tau_{20} \tau_{22} + \frac{1}{7} \tau_{22}^2 - \frac{12}{7} (\tau_{22}^2 + \pi_{22}^2). \quad (72)$$

Точно так же, разделив третье уравнение (70) на первое из них и приняв во внимание найденное выражение (72) для c_{20} , найдем аналогичное выражение для

$$c_{40} = \frac{1}{3} \tau_{40} + \frac{40}{3} \tau_{20}^2 - \frac{72}{7} \tau_{20} \tau_{22} + \frac{66}{35} \tau_{22}^2 + \frac{132}{35} (\tau_{22}^2 + \pi_{22}^2). \quad (73)$$

Определяя непосредственно из первого и последнего из уравнений (70) g_0 и r_0 и приняв во внимание выражение (72) для c_{20} , находим

$$g_0 = A_{00} \left[1 + \frac{8}{3} \tau_{20} + \frac{124}{9} \tau_{20}^2 + \frac{4}{3} \tau_{20} \tau_{22} - \frac{4}{3} \tau_{22}^2 - \frac{48}{5} (\tau_{22}^2 + \pi_{22}^2) \right] \quad (74)$$

и

$$r_0 = \bar{b} \left[1 - \tau_{20} + \frac{8}{3} \tau_{20}^2 + \frac{1144}{63} \tau_{20}^2 - \frac{124}{21} \tau_{20} \tau_{22} + \frac{37}{35} \tau_{22}^2 - \frac{72}{35} (\tau_{22}^2 + \pi_{22}^2) \right]. \quad (75)$$

Подставляя эти значения для g_0 и r_0 в выражение для τ в предпоследнем из уравнений (70), находим

$$\tau = \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{\bar{b}}{A_{00}} (1 - \tau_{20}). \quad (76)$$

Величина \bar{b} и должна быть рассчитана в первую очередь по этой формуле, так как она входит во все предыдущие формулы.

Подставив теперь в четвертую и пятую из формул (70) величину g_0 по формуле (74) и c_{20} по формуле (72), находим

$$c_{22} = \tau_{22} \left(1 - \frac{2}{7} \tau_{20} + \frac{164}{21} \tau_{20}^2 \right). \quad (77)$$

$$d_{22} = \pi_{22} \left(1 - \frac{2}{7} \tau_{20} + \frac{164}{21} \tau_{20}^2 \right). \quad (78)$$

Для остальных параметров аналогичным образом получаем с той же точностью

$$c_{30} = \frac{1}{2} \tau_{30}, \quad c_{31} = \frac{1}{2} \tau_{31}, \quad d_{31} = \frac{1}{2} \pi_{31}, \quad c_{32} = \frac{1}{2} \tau_{32},$$

$$d_{32} = \frac{1}{2} \pi_{32}, \quad c_{33} = \frac{1}{2} \tau_{33}, \quad d_{33} = \frac{1}{2} \pi_{33}, \quad c_{41} = \frac{1}{3} \tau_{41},$$

$$d_{41} = \frac{1}{3} \pi_{41}, \quad c_{42} = \frac{1}{3} \tau_{42} - \frac{12}{7} \tau_{22} + \frac{22}{35} \tau_{20} \tau_{22}, \quad (79)$$

$$d_{42} = \frac{1}{3} \pi_{42} - \frac{12}{7} \pi_{22} + \frac{22}{35} \tau_{20} \pi_{22}, \quad c_{43} = \frac{1}{3} \tau_{43},$$

$$d_{43} = \frac{1}{3} \pi_{43}, \quad c_{44} = \frac{1}{3} \tau_{44} + \frac{11}{70} (\tau_{22}^2 - \pi_{22}^2), \quad d_{44} = \frac{1}{3} \pi_{44} + \frac{11}{35} \tau_{22} \pi_{22}.$$

Заметим попутно, что определение указанных неизвестных из системы (70) дает также возможность получить просто величину массы Земли и значение потенциала силы тяжести на поверхности геоида Земли по формулам

$$fM = g_0 r_0^2, \quad (80)$$

$$W_0 = g_0 r_0.$$

соответственно с формулами (7).

Когда получены значения указанных выше параметров, окончательное выражение потенциала земного притяжения удобно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}
fV = \frac{fM}{r} \left\{ 1 + \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 [c_{20} P_{20}(\sin \delta) + (c_{22} \cos 2t_{rp} - d_{22} \sin 2t_{rp}) P_{22}(\sin \delta)] + \right. \\
+ \left(\frac{r_0}{r} \right)^3 [c_{30} P_{30}(\sin \delta) + (c_{31} \cos t_{rp} - d_{31} \sin t_{rp}) P_{31}(\sin \delta) + \\
+ (c_{32} \cos 2t_{rp} - d_{32} \sin 2t_{rp}) P_{32}(\sin \delta) + \\
+ (c_{33} \cos 3t_{rp} - d_{33} \sin 3t_{rp}) P_{33}(\sin \delta)] + \\
+ \left(\frac{r_0}{r} \right)^4 [c_{40} P_{40}(\sin \delta) + (c_{41} \cos t_{rp} - d_{41} \sin t_{rp}) P_{41}(\sin \delta) + \\
+ (c_{42} \cos 2t_{rp} - d_{42} \sin 2t_{rp}) P_{42}(\sin \delta) + (c_{43} \cos 3t_{rp} - d_{43} \sin 3t_{rp}) P_{43}(\sin \delta) + \\
+ (c_{44} \cos 4t_{rp} - d_{44} \sin 4t_{rp}) P_{44}(\sin \delta)] \left. \right\}. \quad (81)
\end{aligned}$$

Это выражение легко получается из (36), если положить в нем $B_2=0$, подставить $W_0 = \frac{fM}{r_0}$ и принять во внимание выражения A_2, A_3, A_4 по формуле (14). Кроме того, вместо сферических координат, широты φ и долготы l (счет от меридиана Гринвича к востоку), подставлены соответствующие им значения астрономических экваториальных координат, склонения δ и гринвичского угла $l_{гр}$ (счет к западу), по формулам

$$\begin{aligned} \varphi &= \delta, \\ l &= 360^\circ - l_{гр}. \end{aligned} \quad (82)$$

§ 8. Опыт определения численных значений коэффициентов формулы (81)

Для этой цели используем разложение сил тяжести, которое было получено в одной из предыдущих работ автора (Жонголович, 1952). Способ получения этого разложения, а также сведения о материалах мировой гравиметрической съемки, на основании которых оно получено, подробно изложены в упомянутой работе. Ниже приводятся числовые значения коэффициентов A_n и B_n в разложении сил тяжести по сферическим функциям до четвертого порядка на основании результатов указанной работы. При этом взяты результаты второго варианта под № 14 из табл. 7, помещенной на стр. 50—51 той работы. Этот именно результат выбран как наиболее вероятный из тех решений, в которых разложение производилось по сферическим функциям только до четвертого порядка.

Кроме того, в значение A_0 , полученное в указанном решении 1952 г., вводим теперь поправку, равную -12 мга, с целью возможного исправления употреблявшейся до сих пор Потсдамской системы в соответствии с результатами современных абсолютных измерений сил тяжести.

Числовые значения (в мга) коэффициентов A_n и B_n формулы (69)

| | |
|------------------------|------------------|
| $A_{00} = 979\,764.83$ | $A_{40} = 8.90$ |
| $A_{20} = 3\,444.40$ | $A_{41} = -1.96$ |
| $A_{22} = 5.56$ | $A_{42} = -1.18$ |
| $B_{20} = -1.53$ | $A_{43} = 0.01$ |
| $A_{30} = 8.67$ | $B_{42} = 0.24$ |
| $A_{32} = 3.90$ | $A_{44} = 0.14$ |
| $B_{30} = -1.87$ | $B_{43} = -0.03$ |
| $A_{32} = 0.70$ | $A_{44} = 0.04$ |
| $B_{32} = -0.98$ | $B_{44} = 0.05$ |
| $A_{34} = 0.83$ | |
| $B_{34} = 0.68$ | |

Приняв, кроме того, для общего земного эллипсоида значения

$$a = 6\,378\,070 \text{ м}, \quad \bar{\omega} = 1:296.6,$$

а для угловой скорости вращения Земли в 1 сек. среднего времени значение

$$\omega = \frac{2\pi}{86\,164.1}$$

и, произведя все расчеты по формулам (71)—(80), получим следующие окончательные результаты.

¹ В данное время еще нет возможности получить окончательное значение этой поправки, так как еще не сделан общий анализ всех произведенных для этого измерений, а некоторые абсолютные определения и гравиметрические связи в разных странах еще не вполне закончены или не опубликованы. Возможно, что на предстоящем в 1957 г. съезде Международного геодезического и геофизического союзов будет уже принято некоторое решение об этой поправке. Указанная в тексте предварительная величина -12 мга представляет округленное среднее значение из известных в данное время отдельных выводов.

Числовые значения величин, входящих в формулу (81)

| | | |
|------------------------------------|------------------------------|---|
| $c_{20} = -109\,808 \cdot 10^{-8}$ | $c_{40} = 358 \cdot 10^{-8}$ | |
| $c_{22} = 574$ | $c_{41} = -67$ | |
| $d_{22} = -158$ | $d_{41} = -40$ | |
| $c_{30} = 442$ | $c_{42} = 0$ | $r_0 = 6\,363\,553 \text{ м}$ |
| $c_{31} = 199$ | $d_{42} = 8$ | $fM = 39\,859 \cdot 10^{18} \frac{\text{см}^3}{\text{сек}^2}$ |
| $d_{31} = -96$ | $c_{43} = 5$ | |
| $c_{32} = 36$ | $d_{43} = -1$ | |
| $d_{32} = -50$ | $c_{44} = 1$ | |
| $c_{34} = 42$ | $d_{44} = 2$ | |
| $d_{34} = 34$ | | |

В процессе вычислений получены также следующие величины:

$$c = 171\,889 \cdot 10^{-7}, \quad g_0 = 984\,293.9 \text{ мга}, \quad W_0 = 62\,636 \cdot 10^7 \frac{\text{см}^2}{\text{сек}^2}.$$

Полученные результаты не могут претендовать на большую точность. Основной причиной этого являются огромные проблемы в мировой гравиметрической съемке, на которой основано использованное здесь разложение сил тяжести. Большие пространства мирового океана, а также материк в южном полушарии гравиметрически исследованы еще совершенно недостаточно. Это обстоятельство может быть причиной значительных систематических, не поддающихся точному учету ошибок в полученных результатах. Поэтому полученный результат следует рассматривать как предварительный, дающий лишь ориентировочное представление о порядке различных членов в разложении потенциала земного притяжения.

ЛИТЕРАТУРА

- Жонголович И. Д. 1952. Внешнее гравитационное поле Земли и фундаментальные постоянные, связанные с ним. Труды ИТА, 3, А.—М.
Жонголович И. Д. 1956. Об определении размеров общего земного эллипсоида. Труды ИТА, 6, А.—М.
Идальский Н. И. 1936. Теория потенциала с приложениями к теории фигуры Земли и геофизике. 2-е изд., А.—М.
Нумеров Б. В. и Д. Н. Храмов, 1926. Об определении фигуры геоида на основании наблюдений сил тяжести. Бюлл. Астр. инст., 40, А.
Пизетти П. 1933. Основы механической теории фигуры планет. М.—Л.
Слаудский Ф. А. 1888. Общая теория фигуры Земли. М.

Поступило в Редакцию
11 июля 1956 г.

Периодические движения частицы в поле тяготения вращающегося трехосного эллипсоида

Ю. В. Батраков

Рассматривается движение частицы с массой, равной нулю, под действием притяжения однородного трехосного эллипсоида, мало отличающегося от сферы того же объема. Эллипсоид равномерно вращается вокруг одной из осей симметрии.

Показано существование периодических решений третьего, второго и первого сорта в рассматриваемой задаче.

THE PERIODICAL MOTIONS OF A PARTICLE UNDER GRAVITATION OF A ROTATING THREE-AXIAL ELLIPSOID, by J. W. Batrakov. — The article discusses the motion of a particle of zero mass under the action of gravity of a homogeneous three-axial ellipsoid, the latter differing but little from a sphere of the same volume and rotating uniformly about one of the axes of symmetry. The possibility of periodical solutions of the third, second and first sort in this problem has been established.

Периодические движения в окрестности гравитирующего трехосного эллипсоида, насколько нам известно, еще никем не изучались. Известны лишь результаты, относящиеся к частному случаю, когда гравитирующий эллипсоид является эллипсоидом вращения. Наиболее полно они изложены в классической монографии (Moulton, 1920).

Упомянем еще работу Г. Н. Дубошина (1945), где рассмотрены пространственные периодические движения под действием притяжения эллипсоида вращения и нескольких концентрических круговых колец, расположенных в экваториальной плоскости.

Между тем, изучение свойств движения в окрестности трехосного эллипсоида было бы весьма полезным, так как, помимо получения новых результатов, позволило бы с более общей точки зрения осветить уже известные особенности движения в различных частных случаях.

Настоящая работа преследует цель изучить условия существования некоторых простейших семейств периодических решений в окрестности гравитирующего трехосного эллипсоида. Первые два параграфа имеют вводный характер и содержат главным образом общие вопросы. В остальных параграфах мы занимаемся непосредственно периодическими решениями. В целях удобства изложения в первую очередь рассматриваются решения третьего сорта и лишь в последнюю очередь — решения первого сорта. При этом мы стараемся по возможности делать упор на вопросы существования, не увлекаясь фактическим вычислением решений.

§ 1. Постановка задачи. Разложение пертурбационной функции

Рассмотрим однородный гравитирующий эллипсоид и обозначим его массу через M . Если уравнение эллипсоида записано в виде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (1.1)$$

то потенциала эллипсоида на внешней точке с координатами x, y, z выражается известной формулой

$$V = \frac{3}{4} k^2 M \int_0^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a^2+s} - \frac{y^2}{b^2+s} - \frac{z^2}{c^2+s} \right) \frac{ds}{\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}}, \quad (1.2)$$

где k^2 — постоянная тяготения, а u — решение уравнения

$$\frac{x^2}{a^2+u} + \frac{y^2}{b^2+u} + \frac{z^2}{c^2+u} = 1. \quad (1.3)$$

Будем предполагать, что эллипсоид (1.1) мало отличается от сферы радиуса R и что объем его равен объему сферы. Пользуясь этим, можно написать

$$a^2 = R^2(1-\gamma), \quad b^2 = R^2(1-\gamma), \quad c^2 = R^2(1+\gamma), \quad (1.4)$$

где $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ — малые величины, с точностью до малых более высоких порядков, связанное соотношением

$$\gamma + \gamma_1 + \gamma_2 = 0$$

в силу равенства объемов эллипсоида и сферы. Если ввести эксцентриситеты главных меридиальных сечений

$$e_1^2 = \frac{a^2 - c^2}{a^2}, \quad e_2^2 = \frac{b^2 - c^2}{b^2}, \quad (1.5)$$

то с точностью до малых второго порядка будем иметь

$$e_1^2 = \frac{2\gamma + \gamma_1}{R^2}, \quad e_2^2 = \frac{\gamma + 2\gamma_2}{R^2}. \quad (1.6)$$

Разложим потенциал (1.2) по степеням $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$, тогда получим

$$V = \frac{k^2 M}{r} + \frac{3}{10} k^2 M \frac{2\gamma x^2 + 2\gamma_1 y^2 + \gamma_2 z^2}{r^3} + \dots \quad (1.7)$$

Пусть эллипсоид (1.1) равномерно вращается вокруг оси OZ с угловой скоростью n и пусть система координат OX, OY, OZ связана с эллипсоидом и вращается вместе с ним. Тогда уравнения движения частицы под влиянием притяжения эллипсоида во вращающихся осях можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} - 2n \frac{dy}{dt} - n^2 x &= -\frac{\partial V}{\partial x}, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} - n^2 y &= -\frac{\partial V}{\partial y}, \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= -\frac{\partial V}{\partial z}, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где V определяется формулой (1.7).

Введем в эти уравнения и в выражение (1.7) безразмерный малый параметр μ . Для этого положим

$$\frac{3}{10} k^2 M x = \mu x, \quad \frac{3}{10} k^2 M y = \mu y, \quad \frac{3}{10} k^2 M z = \mu z, \quad (1.9)$$

где λ, μ, ν — некоторые величины такой же размерности как и $k^2 M a$, связанные условием $\lambda + \mu + \nu = 0$. Тогда V представится рядом по степеням малого параметра

$$V = V_0 + \theta V_1 + \theta^2 V_2 + \dots, \quad (1.10)$$

$$V_0 = \frac{k^2 M}{r}, \quad V_1 = \frac{\lambda x^2 + \mu y^2 + \nu z^2}{r^3} = \frac{\lambda x^2 + \mu y^2 - (\lambda + \mu) z^2}{r^3}, \dots$$

При $\theta = 0$ эллипсоид обращается в сферу и движение частицы происходит по невозмущенному кеплеровскому эллипсу. Член θV_1 можно рассматривать как наиболее существенную часть пертурбационной функции.

Выразим V_1 через эллиптические элементы. Координаты частицы выражаются через эллиптические элементы следующим образом:

$$\begin{aligned} x &= r (\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i), \\ y &= r (\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i), \\ z &= r \sin u \sin i, \end{aligned} \quad (1.11)$$

где r есть радиус-вектор частицы (ОР на рис. 1), u — аргумент широты, i — наклонность орбиты к экваториальной плоскости эллипсоида, $\Omega = \angle NO\Omega$ — расстояние узла от направления оси OX . Через ON на рис. 1 обозначено начальное положение большой оси эллипсоида, через P — частица, через II — перигелий орбиты. Возводя (1.11) в квадраты и подставляя в (1.10), получим

$$V_1 = \frac{\lambda + \mu}{2a^3} \left[1 - 6e^2 + 6e^4 + \kappa(1 - e^2)^2 \cos(2u + 2\Omega) + \kappa e^2 \cos(2u - 2\Omega) + 2\kappa e^2(1 - e^2) \cos 2\Omega + 6e^2(1 - e^2) \cos 2u \right], \quad (1.12)$$

где обозначено

$$\kappa = \sin \frac{i}{2}, \quad \lambda = \frac{\lambda - \mu}{\lambda + \mu}. \quad (1.13)$$

При помощи известных таблиц (Cayley, 1859),¹ ограничиваясь четвертыми степенями эксцентриситета e , получаем разложение

$$\begin{aligned} r^{-3} &= a^{-3} \left[1 + \frac{3}{2} e^2 + \frac{15}{8} e^4 + \left(3e + \frac{27}{8} e^3 \right) \cos l + \right. \\ &+ \left(\frac{9}{2} e^2 + \frac{7}{2} e^4 \right) \cos 2l + \frac{53}{8} e^2 \cos 3l + \frac{77}{8} e^4 \cos 4l \Big], \\ r^{-3} \cos 2u &= a^{-3} \left[\left(-\frac{1}{2} e + \frac{1}{12} e^3 \right) \cos l + \left(1 - \frac{5}{2} e^2 + \frac{41}{8} e^4 \right) \cos 2l + \right. \\ &+ \left(\frac{7}{2} e - \frac{123}{16} e^3 \right) \cos 3l + \left(\frac{17}{2} e^2 - \frac{115}{6} e^4 \right) \cos 4l + \\ &+ \frac{845}{48} e^3 \cos 5l + \frac{533}{16} e^5 \cos 6l \Big], \\ r^{-3} \sin 2u &= a^{-3} \left[\left(-\frac{1}{2} e + \frac{1}{24} e^3 \right) \sin l + \left(1 - \frac{5}{2} e^2 + \frac{37}{8} e^4 \right) \sin 2l + \right. \\ &+ \left(\frac{7}{2} e - \frac{123}{16} e^3 \right) \sin 3l + \left(\frac{17}{2} e^2 - \frac{115}{6} e^4 \right) \sin 4l + \\ &+ \frac{845}{48} e^3 \sin 5l + \frac{533}{16} e^5 \sin 6l \Big], \end{aligned} \quad (1.14)$$

¹ Или аналитических таблиц в курсе М. Ф. Субботина (1937).

где u — истинная, а l — средняя аномалии. Через a обозначена большая полуось орбиты частицы (не путать с большой полуосью эллипсоида). Учитывая, что $u = v + \omega$, где ω — расстояние перигелия от узла, окончательно получаем

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{\lambda + \mu}{2a^3} \left[(1 - 6e^2 + 6e^4) \left[1 + \frac{3}{2} e^2 + \frac{15}{8} e^4 + \left(3e + \frac{27}{8} e^3 \right) \cos l + \right. \right. \\ &+ \left. \left(\frac{9}{2} e^2 + \frac{7}{2} e^4 \right) \cos 2l + \frac{53}{8} e^2 \cos 3l + \frac{77}{8} e^4 \cos 4l \right] + \\ &+ \kappa(1 - e^2)^2 \left[\left(-\frac{1}{2} e + \frac{1}{12} e^3 \right) \cos(l + 2\omega + 2\Omega) + \frac{1}{48} e^3 \cos(l - 2\omega - 2\Omega) + \right. \\ &+ \left(1 - \frac{5}{2} e^2 + \frac{13}{16} e^4 \right) \cos(2l + 2\omega + 2\Omega) + \frac{1}{24} e^4 \cos(2l - 2\omega - 2\Omega) + \\ &+ \left(\frac{7}{2} e - \frac{123}{16} e^3 \right) \cos(3l + 2\omega + 2\Omega) + \left(\frac{17}{2} e^2 - \frac{115}{6} e^4 \right) \cos(4l + 2\omega + 2\Omega) + \\ &+ \frac{845}{48} e^3 \cos(5l + 2\omega + 2\Omega) + \frac{533}{16} e^5 \cos(6l + 2\omega + 2\Omega) \Big] + \\ &+ \kappa e^2 \left[\left(-\frac{1}{2} e + \frac{1}{12} e^3 \right) \cos(l + 2\omega - 2\Omega) + \frac{1}{48} e^3 \cos(l - 2\omega + 2\Omega) + \right. \\ &+ \left(1 - \frac{5}{2} e^2 + \frac{13}{16} e^4 \right) \cos(2l + 2\omega - 2\Omega) + \frac{1}{24} e^4 \cos(2l - 2\omega + 2\Omega) + \\ &+ \left(\frac{7}{2} e - \frac{123}{16} e^3 \right) \cos(3l + 2\omega - 2\Omega) + \left(\frac{17}{2} e^2 - \frac{115}{6} e^4 \right) \cos(4l + 2\omega - 2\Omega) + \\ &+ \frac{845}{48} e^3 \cos(5l + 2\omega - 2\Omega) + \frac{533}{16} e^5 \cos(6l + 2\omega - 2\Omega) \Big] + \\ &+ 2\kappa e^2(1 - e^2) \left[\left(1 + \frac{3}{2} e^2 + \frac{15}{8} e^4 \right) \cos 2\Omega + \left(\frac{3}{2} e + \frac{27}{16} e^3 \right) \cos(l - 2\Omega) + \right. \\ &+ \cos(l + 2\Omega) + \left(\frac{9}{4} e^2 + \frac{7}{4} e^4 \right) \{ \cos(2l - 2\Omega) + \cos(2l + 2\Omega) \} + \\ &+ \frac{53}{16} e^2 \{ \cos(3l + 2\Omega) + \cos(3l - 2\Omega) \} + \\ &+ \frac{77}{16} e^4 \{ \cos(4l + 2\Omega) + \cos(4l - 2\Omega) \} + \\ &+ 6e^2(1 - e^2) \left[\left(-\frac{1}{2} e + \frac{1}{12} e^3 \right) \cos(l + 2\Omega) + \frac{1}{48} e^3 \cos(l - 2\Omega) + \right. \\ &+ \left(1 - \frac{5}{2} e^2 + \frac{13}{16} e^4 \right) \cos(2l + 2\Omega) + \frac{1}{24} e^4 \cos(2l - 2\Omega) + \\ &+ \left(\frac{7}{2} e - \frac{123}{16} e^3 \right) \cos(3l + 2\Omega) + \left(\frac{17}{2} e^2 - \frac{115}{6} e^4 \right) \cos(4l + 2\Omega) + \\ &+ \frac{845}{48} e^3 \cos(5l + 2\Omega) + \frac{533}{16} e^5 \cos(6l - 2\Omega) \Big] \Big]. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Разложение (1.15) понадобится нам в дальнейшем.

§ 2. Поверхность нулевых скоростей и точки либрации

Уравнения движения точки в окрестности гравитирующего эллипсоида (1.8) допускают интеграл Якоби

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = n^2(x^2 + y^2) + \frac{2k^2M}{r^3} + 2\theta \frac{\lambda x^2 + \mu y^2 + \nu z^2}{r^3} + \dots = C. \quad (2.1)$$

Пологая $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$, получаем уравнение поверхности нулевых скоростей, ограничивающей области возможных движений. Это уравнение с точностью до членов первого порядка относительно θ имеет вид

$$2\Omega = n^2(x^2 + y^2) + \frac{2k^2M}{r^3} + 2\theta \frac{\lambda x^2 + \mu y^2 + \nu z^2}{r^3} = C. \quad (2.2)$$

Так как x, y, z входят в Ω только посредством квадратов, то поверхность нулевых скоростей обладает тремя плоскостями симметрии, совпадающими с координатными плос-

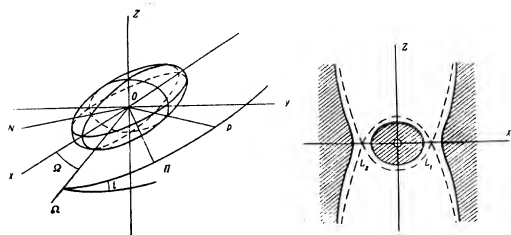


Рис. 1.

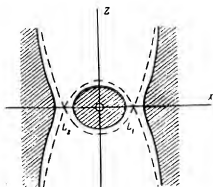


Рис. 2.

костями. Если постоянная C достаточно велика, то поверхность $2\Omega = C$ имеет вид, представленный на рис. 2, где заштрихованы области возможного движения. По мере уменьшения C внешняя и внутренняя области возможного движения сближаются и при некотором C соприкасаются в двойных точках. Двойные точки поверхности нулевых скоростей обычно называются точками либрации.

Чтобы определить координаты точек либрации, необходимо положить $\frac{\partial \Omega}{\partial x} = \frac{\partial \Omega}{\partial y} = \frac{\partial \Omega}{\partial z} = 0$ и определить x, y, z , удовлетворяющие этим уравнениям. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial x} &= x \left(n^2 - \frac{k^2M}{r^3} + \frac{2\theta\lambda}{r^3} - 5\theta \frac{\lambda x^2 + \mu y^2 + \nu z^2}{r^5} + \dots \right) = 0, \\ \frac{\partial \Omega}{\partial y} &= y \left(n^2 - \frac{k^2M}{r^3} + \frac{2\theta\mu}{r^3} - 5\theta \frac{\lambda x^2 + \mu y^2 + \nu z^2}{r^5} + \dots \right) = 0, \\ \frac{\partial \Omega}{\partial z} &= z \left(-\frac{k^2M}{r^3} + \frac{2\theta\nu}{r^3} - 5\theta \frac{\lambda x^2 + \mu y^2 + \nu z^2}{r^5} + \dots \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Из уравнений (2.3) видно, что единственные возможные решения будут при $x=0$, если только θ достаточно мало. Пологая $z=0$, имеем два случая:

$$\begin{aligned} 1) \quad y=0, \quad z=0, \quad n^2 - \frac{k^2M}{|x|^3} - \frac{2\theta\lambda}{|x|^3} + \dots &= 0, \\ 2) \quad x=0, \quad z=0, \quad n^2 - \frac{k^2M}{|y|^3} - \frac{2\theta\mu}{|y|^3} + \dots &= 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Отсюда окончательно получаем:

$$\begin{aligned} 1) \quad y=0, \quad z=0, \quad x &= \pm \left(a_0 + \frac{\theta\lambda}{n^2 a_0^3} + \dots \right), \\ 2) \quad x=0, \quad z=0, \quad y &= \pm \left(a_0 + \frac{\theta\mu}{n^2 a_0^3} + \dots \right), \end{aligned} \quad (2.5)$$

где для краткости обозначено

$$a_0 = \sqrt[3]{\frac{k^2M}{n^2}}. \quad (2.6)$$

Таким образом, имеются четыре точки либрации, расположенные на продолжении осей эллипсоида в экваториальной плоскости симметрично относительно начала координат. Частица, помещенная в любую из этих точек будет находиться в состоянии покоя относительно вращающейся системы координат.

Вычислим еще значения постоянной C для каждой из этих точек. С точностью до малых выше первого порядка будем иметь:

$$\begin{aligned} 1) \quad C &= \frac{3k^2M}{a_0^3} + \frac{2\theta\lambda}{a_0^3}, \\ 2) \quad C &= \frac{3k^2M}{a_0^3} + \frac{2\theta\mu}{a_0^3}. \end{aligned}$$

Исследование устойчивости движения в найденных точках либрации проведено в работе В. К. Абалякина (1957), опубликованной в этом же номере "Бюллетея". Там же получены периодические решения в окрестности этих точек.

§ 3. Периодические решения третьего сорта

Приведем уравнения движения частицы к форме, удобной для исследования, взяв в качестве переменных канонические элементы Делоне:

$$\begin{aligned} L &= k\sqrt{M}\sqrt{a}, & l &= n(t - t_0), \\ G &= k\sqrt{M}\sqrt{a(1-e^2)}, & g &= \omega, \\ H &= k\sqrt{M}\sqrt{a(1-e^2)} \cos i, & h &= \Omega, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где a — большая полуось орбиты частицы, e — эксцентриситет, i — наклонность орбиты к экваториальной плоскости, n — среднее движение, ω — расстояние перигея от узла, Ω — расстояние от узла до направления оси OX вращающейся системы координат (долгота узла). Тогда, как легко показать, уравнения движения принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial t}, & \frac{dl}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial L}, \\ \frac{dG}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial g}, & \frac{dg}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial G}, \\ \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial h}, & \frac{dh}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial H}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где

$$F = F_0 + \theta F_1 + \theta^2 F_2 + \dots, \quad (3.3)$$

$$F_0 = \frac{k^2 M^2}{2L^2} + nH, \quad F_1 = \frac{\lambda x^2 + \mu y^2 + \nu z^2}{r^5}, \dots$$

Здесь F_1, F_2, \dots являются периодическими функциями переменных l, g, h вида

$$\sum_{i,j,k} K(L, G, H) \cos(il + jg + 2kh), \quad (3.4)$$

где $K(L, G, H)$ — коэффициент, аналитическим образом зависящие от L, G, H .

Правые части уравнений (3.2) не зависят явно от времени, и сами эти уравнения аналогичны уравнениям движения в ограниченной задаче трех тел. Но периодические решения третьего сорта ограниченной задачи изучались в нашей более ранней работе (Батраков, 1955). Поэтому некоторыми результатами, полученными в этой работе, можно воспользоваться для получения периодических решений третьего сорта в поле тяготения трехосного эллипсоида.

Напомним, в чем состоит метод Пуанкаре (Poincaré, 1892) для нахождения периодических решений.

При $\theta=0$ система (3.2) имеет решение:

$$\begin{aligned} L &= L_0, & \dot{l} &= nt + l_0, \\ G &= G_0, & g &= g_0, \\ H &= H_0, & h &= -nt + h_0, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где $L_0, G_0, H_0, l_0, g_0, h_0$ — произвольные постоянные, а $n = -\frac{\partial F_0}{\partial L_0}$. Если n и π соизмеримы, т. е. отношение $\frac{n}{\pi}$ равно отношению двух целых взаимно простых чисел, то (3.5) является периодическим решением и носит название порождающего решения. Обозначим период этого решения через T_0 .Для того чтобы найти периодические решения системы (3.2) при $\theta \neq 0$, близкие к (3.5) и обращающиеся в нуль при $t=0$, полагаем

$$\begin{aligned} L &= L_0 + \psi_1 + \psi_2, & l &= nt + l_0 + \gamma_1 + \gamma_2, \\ G &= G_0 + \psi_2 + \psi_3, & g &= g_0 + \gamma_2 + \gamma_3, \\ H &= H_0 + \psi_3 + \psi_4, & h &= -nt + h_0 + \gamma_3 + \gamma_4, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где ψ_i, γ_i — начальные отклонения решения (3.5) от порождающего решения, а ψ_i, γ_i — функции времени, обращающиеся в нуль при $t=0$, и составляем уравнения

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1(T) &= 0, & \dot{\psi}_1(T) &= n\Delta T + \gamma_1(T) = 0, \\ \dot{\psi}_2(T) &= 0, & \dot{\psi}_2(T) &= \gamma_2(T) = 0, \\ \dot{\psi}_3(T) &= 0, & \dot{\psi}_3(T) &= -n\Delta T + \gamma_3(T) = 0, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где T — период искомого решения, вообще говоря отличный от T_0 на величину ΔT порядка малого параметра θ .Разлагая левые части уравнений (3.7) по степеням $\psi_i, \gamma_i, \Delta T, \theta$, получаем уравнения для определения $\psi_i, \gamma_i, \Delta T$, соответствующих периодическому решению в виде функций θ . В этих уравнениях члены нулевой степени относительно $\psi_i, \gamma_i, \Delta T$ зависят от начальных значений порождающего решения (3.5) и, вообще говоря, отличны от нуля. Между тем определение $\psi_i, \gamma_i, \Delta T$ в виде голоморфных функций θ , обращающихся в нуль при $\theta=0$, возможно только в том случае, когда эти свободные члены отсутствуют. Приравняв нулю свободные члены разложений ψ_i, γ_i по степеням

530

 $\psi_i, \gamma_i, \Delta T$, получаем условия, которым должны удовлетворять величины $L_0, G_0, H_0, l_0, g_0, h_0$ для того, чтобы в окрестности (3.5) существовали искомые периодические решения. В нашем случае эти условия имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial [F]}{\partial L_0} &= \frac{\partial [F]}{\partial G_0} = \frac{\partial [F]}{\partial H_0} = 0, \\ \frac{\partial [F]}{\partial l_0} &= 0, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где обозначено

$$[F] = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} F_1 dt, \quad (3.9)$$

причем при вычислении (3.9) вместо L, G, H, l, g, h нужно подставить их значения из порождающего решения (3.5).Если $\psi_i, \gamma_i, \Delta T$ известны, то тем самым известно и искомое периодическое решение, так как его легко получить со сколь угодно большой точностью фактическим разложением в ряд или численным интегрированием. Таким образом, все дело сводится к определению $\psi_i, \gamma_i, \Delta T$ из уравнений (3.7).

В силу того, что правые части уравнений движения (3.2) не зависят явно от времени, начало отсчета времени всегда можно выбрать так, что будет

$$l_0 = \gamma_1 = 0. \quad (3.10)$$

Кроме того, в силу существования интеграла Якоби $F = \text{const}$ одно из уравнений (3.7) должно быть следствием остальных, и шесть величин $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \Delta T$ связаны лишь пятью независимыми соотношениями (3.7). Так как производная $\frac{\partial F}{\partial L_0}$ отлична от нуля, то зависимым можно считать уравнение $\gamma_1(T) = 0$. Что же касается вопроса о том, какое из начальных отклонений считать произвольным, то он решается рассмотрением всевозможных якобианов пятого порядка от функций $\psi_2, \psi_3, \gamma_2, \gamma_3, \Delta T$ по величинам $\psi_i, \gamma_i, \Delta T$. Если, например, якобиан

$$\frac{\partial (\psi_2, \psi_3, \gamma_2, \gamma_3, \Delta T)}{\partial (\psi_2, \psi_3, \gamma_2, \gamma_3, \Delta T)} \neq 0, \quad (3.11)$$

при $\psi_1 = \gamma_1 = \Delta T = 0$ отличен от нуля, то из уравнений (3.7) при условиях (3.8) можно определить $\psi_2, \psi_3, \gamma_2, \gamma_3, \Delta T$ в виде голоморфных функций ψ_2 и ψ_3 и, следовательно, ψ_2 можно считать произвольным.

В нашем случае якобиан (3.11) имеет вид (Батраков, 1955, стр. 115)

$$\frac{\partial F_0}{\partial H_0} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial L_0^2} \cdot \frac{\partial^2 [F]}{\partial L_0^2} \cdot \frac{\partial^2 [F]}{\partial G_0^2} \cdot \frac{\partial^2 [F]}{\partial G_0 \partial H_0} \cdot \frac{\partial^2 [F]}{\partial H_0^2}. \quad (3.12)$$

Таким образом, определение $\psi_i, \gamma_i, \Delta T$ как функций θ возможно, и периодические решения системы (3.7) в окрестности порождающих решений существуют, если начальные значения порождающих решений удовлетворяют уравнениям (3.8) и если для этих начальных значений один из якобианов типа (3.11), в нашем случае (3.12), отличен от нуля. Вопрос о существовании периодических решений сводится к исследованию уравнений (3.8) и якобиан (3.12).Рассмотрим сначала первые три уравнения (3.8). Как видно из (1.15), разложение F_1 имеет вид

$$\sum K(L, G, H) \cos(il + 2jg + 2kh)(j, k = -1, 0, +1). \quad (3.13)$$

531

Если вместо l, g, h подставить их значения в порождающем решении, то аргументы в (3.13) примут вид

$$(in + 2kn')t + il_0 + 2jg_0 + 2kh_0 \quad (j, k = -1, 0, 1). \quad (3.14)$$

Отсюда видно, что критические члены могут быть только при условии

$$in + 2n' = 0 \quad \text{или} \quad \frac{n}{n'} = \pm \frac{2}{i}. \quad (3.15)$$

Придавая последовательно значения $i = 1, 2, \dots$, получим для критических аргументов следующие возможные случаи:

$$1) \frac{n}{n'} = \pm \frac{2}{1}, \quad 2) \frac{n}{n'} = \pm \frac{2}{1}, \quad 3) \frac{n}{n'} = \pm \frac{2}{3}, \quad 4) \frac{n}{n'} = \pm \frac{1}{2}, \dots \quad (3.16)$$

Следовательно, периодические решения третьего сорта, для существования которых требуется, чтобы n и n' были соизмеримы, возможны только в случаях (3.16), где верхний знак соответствует прямому движению частицы, т. е. в том же направлении, в каком происходит движение эллипсоида, а нижний — обратному движению. Но обратное движение можно рассматривать как прямое по орбите с наклонностью, большей 90° . Это позволяет ограничиться рассмотрением только прямых движений.

Допустим, что между n и n' имеет место соотношение $\frac{n}{n'} = \frac{2}{q}$, где $q = 1$ целое число. Тогда для $[F_1]$ получаем разложение вида

$$\sum_{j=-1, 0, 1} K(L_0, G_0, H_0) \cos(ql_0 + 2jg_0 + 2h_0). \quad (3.17)$$

Отсюда сразу видно, что $\frac{\partial[F_1]}{\partial l_0}$ и $\frac{\partial[F_1]}{\partial h_0}$ разлагаются только постоянным множителем и, следовательно, из первых трех уравнений (3.8) независимыми являются только два. В силу этого одну из величин l_0, h_0 можно выбрать произвольно. Положим $l_0 = 0$. Тогда из (3.8), учитывая (3.17), получим

$$g_0 = k_1 \frac{\pi}{2}, \quad h_0 = k_2 \frac{\pi}{2} \quad (k_1, k_2 = 0, 1, 2, 3). \quad (3.18)$$

Значит, если $l_0 = 0$, а g_0 и h_0 удовлетворяют (3.18), то первые три уравнения (3.8) будут удовлетворены.

Теперь обратимся к последнему уравнению (3.8). Переходя к кеплеровским переменным, это уравнение можно переписать так (Батраков, 1955, стр. 116):

$$\frac{1 - e^2}{e} \frac{\partial[F_1]}{\partial e} - \frac{1 - 2e^2}{4e^2} \frac{\partial[F_1]}{\partial \varepsilon} = 0. \quad (3.19)$$

Соотношение (3.19) представляет собой связь между эксцентриситетом и наклонностью порождающего решения, в окрестности которого возможно существование орбит третьего сорта.

Нас могут интересовать только такие порождающие решения, которые достаточно близки к кругам, так как только в этом случае, применяя разложение (1.15), можно получить более или менее точные результаты. Но если составить уравнение (3.19) для соизмеримостей $2/1$ и $2/3$, то легко убедиться, что оно имеет вид

$$\frac{2a(\tau)}{e} + b(\tau) + c(\tau)e + \dots = 0$$

¹ Мы рассматриваем здесь только тот случай, когда в F_1 имеются критические члены. Случай, когда в F_1 критические члены отсутствуют, нуждается в дополнительном исследовании.

и при ε нулевого порядка относительно e удовлетворяется только сравнительно большими значениями e . Поэтому соизмеримости $2/1$ и $2/3$ мы рассматривать не будем, и вопрос о существовании в них решений третьего сорта оставим открытым. Обратимся к изучению других соизмеримостей.

$$\text{Соизмеримость } \frac{n}{n'} = 1$$

Если, как мы условились выше, положить $l_0 = 0$, то функция $[F_1]$ в этой соизмеримости имеет вид

$$[F_1] = \frac{\lambda + \mu}{2a^2} \left\{ (1 - 6e^2 + 6e^4) \left(1 + \frac{3}{2}e^2 + \frac{15}{8}e^4 \right) + \right. \\ \left. + \varepsilon (1 - 6e^2) \left(1 - \frac{5}{2}e^2 + \frac{13}{16}e^4 \right) \cos(2g_0 + 2h_0) + \frac{\varepsilon^2}{24} e^4 \cos(2g_0 - 2h_0) + \right. \\ \left. + \varepsilon^2 (1 - 6e^2) \left(\frac{9}{2}e^2 + \frac{7}{2}e^4 \right) \cos 2h_0 + \dots \right\}, \quad (3.20)$$

где g_0, h_0 имеют значения (3.18). При помощи (3.20) из (3.19) получаем

$$6(1 - 5e^2 + 5e^4) + \varepsilon \{ (-4 + 7e^2 - 3e^4) \cos(2g_0 + h_0) + (9e^2 - 9e^4) \cos 2h_0 \} + \\ + e^2 \{ 9(1 - 5e^2 + 5e^4) - \frac{33}{5} \varepsilon (9 - 28e^2 + 19e^4) \cos(2g_0 + 2h_0) + \\ + \frac{1}{6} \varepsilon^2 \cos(2g_0 - 2h_0) - \frac{9}{4} \varepsilon (1 - 56e^2 + 56e^4) \cos 2h_0 \} + \dots = 0. \quad (3.21)$$

Уравнение (3.21) удовлетворяется малыми значениями e только в том случае, когда свободный член достаточно мал. Приравняв этот свободный член нулю, получаем условие существования круговых порождающих решений в соизмеримости $1/1$

$$6(1 - 5e^2 + 5e^4) + \varepsilon \{ (-4 + 7e^2 - 3e^4) \cos(2g_0 + 2h_0) + (9e^2 - 9e^4) \cos 2h_0 \} = 0. \quad (3.22)$$

В зависимости от значений g_0, h_0 могут иметь место четыре случая:

- 1) $g_0 = h_0 = 0$; $g_0 = \pi$, $h_0 = 0$; $g_0 = 0$, $h_0 = \pi$; $g_0 = \pi$, $h_0 = \pi$;
- 2) $g_0 = 0$, $h_0 = \frac{\pi}{2}$; $g_0 = \pi$, $h_0 = \frac{\pi}{2}$; $g_0 = 0$, $h_0 = \frac{3}{2}\pi$; $g_0 = \pi$, $h_0 = \frac{3}{2}\pi$;
- 3) $g_0 = \frac{\pi}{2}$, $h_0 = 0$; $g_0 = \frac{\pi}{2}$, $h_0 = \pi$; $g_0 = \frac{3}{2}\pi$, $h_0 = 0$; $g_0 = \frac{3}{2}\pi$, $h_0 = \pi$;
- 4) $g_0 = \frac{\pi}{2}$, $h_0 = \frac{\pi}{2}$; $g_0 = \frac{3}{2}\pi$, $h_0 = \frac{\pi}{2}$; $g_0 = \frac{\pi}{2}$, $h_0 = \frac{3}{2}\pi$; $g_0 = \frac{3}{2}\pi$, $h_0 = \frac{3}{2}\pi$;

для которых из (3.21) получаем

$$x = \pm \frac{3}{2} \frac{1 - 5e^2 + 5e^4}{1 - 4e^2 + 3e^4}, \quad (3.23)$$

$$x = \pm \frac{3}{2} \frac{1 - 5e^2 + 5e^4}{3e^4 - e^2 - 2}, \quad (3.24)$$

причем (3.23), (3.24) с верхним знаком относятся соответственно к случаям 1 и 3, а с нижним знаком — к случаям 2 и 4.

В табл. 1 даны значения χ в зависимости от σ^2 , причем через χ_1 обозначены χ из (3.23), а через χ_2 — значения из (3.24). В обоих случаях ват верхний знак. На рис. 3, 4 представлены графики кривых $\chi = \chi_1(\sigma^2)$, $\chi = \chi_2(\sigma^2)$. Графики зависимостей (3.23), (3.24) с нижним знаком получаются из графиков на рис. 3, 4 поворотом плоскости чертежа вокруг оси σ^2 на 180° .

Таблица 1

| σ^2 | χ_1 | χ_2 |
|------------|-----------|-----------|
| 0 | 1.5030 | -1.5030 |
| 0.1 | 1.3095 | -0.7971 |
| 0.2 | 0.9375 | -0.2885 |
| 0.3 | -1.0714 | 0.0739 |
| 0.4 | -2.5000 | 0.3125 |
| 0.5 | 1.5000 | 0.4235 |
| 0.6 | 0.9375 | 0.3947 |
| 0.7 | 0.2775 | 0.1220 |
| 0.8 | -1.0714 | -0.4818 |
| 0.9 | -4.8529 | -3.5106 |
| 1.0 | $-\infty$ | $-\infty$ |

Величина χ является мерой отклонения эллипсоида от эллипсоида вращения, круговое сечение которого совпадает с экваториальной плоскостью. Этому эллипсоиду вращения соответствует значение $\chi = 0$. Как видно из рис. 3, 4, в случаях 1, 3 круговые порождающие решения возможны при любых χ . Что же касается случаев 2, 4, то для них круговые порождающие решения возможны лишь при $\chi \leq 0.43 \dots$ для случая 2 и при $\chi \geq 0.43 \dots$ для случая 4. Если $\sigma^2 < 0.5$, то порождающее решение является прямым, при $\sigma^2 > 0.5$ оно будет обратным.

Допустим теперь, что для некоторого χ имеется σ_0^2 , соответствующее круговому порождающему решению. Тогда уравнение (3.19) дает возможность определить σ^2 как голоморфную функцию e^2 , обращающуюся в нуль при $e = 0$. Для этого достаточно, чтобы частная производная по σ^2 от левой части (3.22) была отлична от нуля. Получим следующие при достаточно малых e разложение

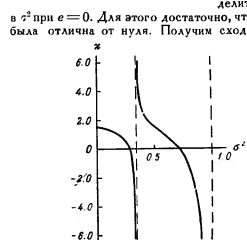


Рис. 3.

$$\sigma^2 = \sigma_0^2 + \sigma_0^{(2)} e^2 + \sigma_0^{(3)} e^3 + \dots, \quad (3.25)$$

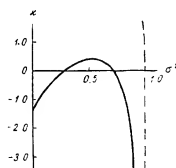


Рис. 4.

которое дает связь между наклонностью и эксцентриситетом для некруговых допустимых, порождающих решений.

Чтобы доказать существование периодических решений системы уравнений (3.2) в окрестности допустимых порождающих решений, остается проверить, что якобиан (3.12) в соизмеримости $1/1$ отличен от нуля. Вычисление $\frac{\partial^2 [F_1]}{\partial \sigma^2}$ показывает, что эта производная может обратиться в нуль при $e = 0$ только в том случае, когда χ, σ^2 удовлетворяют соотношению

$$\chi = \pm \frac{1 - 6\sigma^2 + 6\sigma^4}{(1 - \sigma^2)^2}, \quad (3.26)$$

¹ Допустимыми мы называем порождающие решения, удовлетворяющие (3.18) и (3.19).

где верхний знак соответствует случаю $2g_0 + 2h_0 = (2k+1)\pi$, а нижний — случаю $2g_0 + 2h_0 = 2k\pi$. Точно также имеем

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial \sigma_0^2} & \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial \sigma_0^2 \partial h_0} \\ \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial h_0 \partial \sigma_0^2} & \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial h_0^2} \end{vmatrix} = N e^2 e^2 \{ \sigma^2 (1 - \sigma^2)^2 \cos 2h_0 \cos (2g_0 + 2h_0) + A(\sigma^2) e^2 + \dots \}, \quad (3.27)$$

где N — постоянная, зависящая от L_{00} , а $A(\sigma^2)$ — некоторая функция, зависящая от σ, g_0, h_0 . При достаточно малых e определитель (3.27) может обратиться в нуль только в следующих случаях:

$$1) \chi = 0, \quad 2) e = 0, \quad 3) \sigma = 0, \quad 4) \sigma = 1. \quad (3.28)$$

Если эти случаи исключить и, кроме того, рассматривать χ, σ_0 не удовлетворяющие уравнению (3.26), то при достаточно малых e определитель (3.12) будет отличен от нуля, и можно сделать заключение о существовании в окрестности допустимого порождающего решения с наклонностью (3.25) периодических решений системы уравнений (3.2), обращающихся в порождающие при $e = 0$.

В зависимости от порождающего решения эти периодические решения могут быть как прямыми, так и обратными.

Таким образом, существование периодических решений третьего сорта в соизмеримости $1/1$ нашей задачи можно считать доказанным.

$$\text{Соизмеримость } \frac{\pi}{\pi} = \frac{1}{2}$$

В этой соизмеримости имеем

$$\begin{aligned} [F_1] = & \frac{\lambda + \mu}{2\sigma^2} \left\{ (1 - 6\sigma^2 + 6\sigma^4) \left(1 + \frac{3}{2} e^2 + \frac{15}{8} e^4 \right) + \right. \\ & + \chi (1 - \sigma^2)^2 \left(\frac{17}{2} e^2 - \frac{115}{6} e^4 \right) \cos (2g_0 + 2h_0) + \\ & \left. + \frac{77}{8} \chi \sigma^2 (1 - \sigma^2) e^4 \cos 2h_0 + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Уравнение (3.19) принимает тогда вид

$$\begin{aligned} & 6 \left(1 + \frac{3}{2} e^2 \right) (1 - 5\sigma^2 + 5\sigma^4) + [17\chi (1 - \sigma^2)^2 + \\ & + \chi (-511 + 971\sigma^2 - 460\sigma^4) e^2] \cos (2g_0 + 2h_0) + \\ & + \frac{77}{2} (\sigma^2 - \sigma^4) e^2 \cos 2h_0 + \dots = 0. \end{aligned} \quad (3.30)$$

При $e = 0$ уравнение (3.30) дает

$$6(1 - 5\sigma^2 + 5\sigma^4) + 17\chi(1 - \sigma^2)^2 \cos(2g_0 + 2h_0). \quad (3.31)$$

Отсюда

$$\chi = \pm \frac{6}{17} \frac{1 - 5\sigma^2 + 5\sigma^4}{(1 - \sigma^2)^2}, \quad (3.32)$$

где верхний знак соответствует случаю $2g_0 + 2h_0 = (2k+1)\pi$, а нижний — случаю $2g_0 + 2h_0 = 2k\pi$ (k — целое число).

Равенство (3.32) определяет связь между параметром χ , характеризующим форму эллипсоида, и наклонностью кругового порождающего решения. Значения χ в зависи-

мости от значений σ^2 приводятся в табл. 2, причем ват верхний знак. На рис. 5 дан график зависимости (3.32) с верхним знаком. График этой зависимости с нижним знаком может быть получен на рис. 5 поворотом плоскости чертежа на 180° вокруг оси σ^2 .

Таблица 2

| σ^2 | x |
|------------|----------|
| 0 | 0.5529 |
| 0.1 | 0.2397 |
| 0.2 | 0.1103 |
| 0.3 | -0.0500 |
| 0.4 | -0.1961 |
| 0.5 | -0.3530 |
| 0.6 | -0.4412 |
| 0.7 | -0.1961 |
| 0.8 | 1.7646 |
| 0.9 | 19.411 |
| 1.0 | ∞ |

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial g_0^2} & \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial g_0 \partial h_0} \\ \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial h_0 \partial g_0} & \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial h_0^2} \end{pmatrix} = N_2 x^2 e^2 \left\{ (1 - \sigma^2)^2 \cos(2g_0 + 2h_0) + C(\sigma, x) e^2 + \dots \right\}, \quad (3.33)$$

где N_1, N_2 — постоянные, зависящие от L_0 , а $B(\sigma, x), C(\sigma, x)$ — некоторые непрерывные функции от σ, x, g_0, h_0 .

Отсюда видно, что если выполнены условия $x \neq 0, e \neq 0, \sigma \neq 1$ и, кроме того, σ_0 не является корнем уравнения

$$1 - 6\sigma^2 + 6\sigma^4 = 0,$$

то при достаточно малых e якобиан (3.12) отличен от нуля. Тем самым существование решений третьего сорта в окрестности допустимых некруговых порождающих решений в соизмеримости $1/2$ можно также считать доказанным. В этой соизмеримости, как и в предыдущей, нельзя доказать существование решения третьего сорта в следующих двух случаях: 1) когда эллипсoids является эллипсoids вращения ($x=0$), 2) когда порождающее решение является строго круговым ($e=0$).

Эти случаи можно рассматривать как вырожденные. В случае $\sigma_0=1$ существование периодических решений искомого вида не исключено, но для доказательства необходимо дополнительное исследование, которого мы здесь проводить не будем.

Соизмеримость $\frac{n}{m} = \frac{2}{5}$ и другие соизмеримости

В соизмеримости $\frac{2}{5}$ имеем

$$[F_1] = \frac{\lambda + \mu}{2a^2} \left\{ (1 - 6\sigma^2 + 6\sigma^4) \left(1 + \frac{3}{2} e^2 + \frac{15}{8} e^4 \right) + \frac{845}{48} x (1 - \sigma^2)^2 e^2 \cos(2g_0 + 2h_0) + \dots \right\}, \quad (3.34)$$

и уравнение (3.19) принимает вид

$$6 \left(1 + \frac{3}{2} e^2 \right) (1 - 5\sigma^2 + 5\sigma^4) + \frac{845}{16} x (1 - \sigma^2)^2 e \cos(2g_0 + 2h_0) + \dots = 0. \quad (3.35)$$

При $e=0$ получаем

$$1 - 5\sigma^2 + 5\sigma^4 = 0. \quad (3.36)$$

Приблизженные значения корней (3.36) равны

$$\sigma_1^2 = 0.525732, \quad \sigma_2^2 = 0.850651.$$

Этим значениям корней соответствуют следующие наклоны порождающего кругового решения:

$$l_1^0 = 63^\circ 26' 06'', \quad l_2^0 = 116^\circ 33' 54''. \quad (3.37)$$

Допустимые некруговые порождающие решения, независимо от значений x , должны теперь иметь наклон, близкий к значениям (3.37). Этот наклон определяется из (3.35) разложением по степеням эксцентриситета

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &= \sigma_1^{(0)} + D_1 e + \dots, \\ \sigma_2^2 &= \sigma_2^{(0)} + D_2 e + \dots, \end{aligned} \quad (3.38)$$

где D_1, D_2 — коэффициенты, зависящие от $\sigma_1^{(0)}, \sigma_2^{(0)}$ соответственно, а также от x, g_0, h_0 . В данном случае разложение (3.34) оказывается уже недостаточным для исследования якобиана (3.12), так как с принятой точностью этот якобиан тождественно равен нулю. Однако, продолжив это разложение до более высоких степеней эксцентриситета, нетрудно убедиться в том, что при достаточно малых e , отличных от нуля, и при $x \neq 0$ якобиан (3.12) будет отличен от нуля, и, следовательно, решения третьего сорта в данном случае существуют.

Точно такая же картина, как и в соизмеримости $2/5$ будет иметь место и в остальных соизмеримостях $1/3, 2/7, \dots$. Во всех этих соизмеримостях решения третьего сорта, близкие к кругам, существуют и имеют наклонности, мало отличающиеся от (3.37). Таким образом, соизмеримость $2/5$ является типической.

§ 4. Решения второго сорта

Рассмотрим движение частицы в экваториальной плоскости. Так как движение является плоским, то $z=0$ и будем иметь

$$V_1 = \frac{\lambda x^2 + \mu y^2}{r^2}. \quad (4.1)$$

Введем вместо прямоугольных координат канонические элементы Делоне

$$\begin{aligned} L &= k \sqrt{M} \sqrt{a}, & l &, \\ G &= k \sqrt{M} \sqrt{a(1-e^2)}, & g &, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где a — большая полуось, e — эксцентриситет, l — средняя аномалия, а g — расстояние перигея от оси OX вращающейся системы координат. Если расстояние перигея от оси OZ неподвижной системы координат обозначить через g' , то

$$g = -a'l + g'. \quad (4.3)$$

Тогда уравнения движения частицы принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial l}, \quad \frac{dl}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial L}, \\ \frac{dG}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial g}, \quad \frac{dg}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial G}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

где

$$F = F_0 + \eta F_1 + \eta^2 F_2 + \dots, \quad (4.5)$$

$$F_0 = \frac{kM^2}{2L^2} + nG, \quad F_1 = \frac{v^2 + w^2}{r^2}, \dots$$

Разложение F_1 по степеням эксцентриситетов в данном случае имеет вид

$$\begin{aligned} F_1 = & \frac{\lambda + \mu}{2a^2} \left\{ 1 + \frac{3}{2} e^2 + \frac{15}{8} e^4 + \left(3e + \frac{27}{8} e^3 \right) \cos l + \left(\frac{3}{2} e^2 + \frac{7}{2} e^4 \right) \cos 2l + \right. \\ & + \frac{53}{8} e^3 \cos 3l + \frac{77}{8} e^4 \cos 4l + \left[\left(-\frac{1}{2} e + \frac{1}{16} e^3 \right) \cos(l+2g) + \frac{1}{48} e^3 \cos(l-2g) + \right. \\ & + \left(1 - \frac{5}{2} e^2 + \frac{13}{16} e^4 \right) \cos(2l+2g) + \frac{1}{24} e^4 \cos(2l-2g) + \\ & + \left(\frac{7}{2} e - \frac{123}{16} e^3 \right) \cos(3l+2g) + \left(\frac{17}{2} e^2 - \frac{115}{6} e^4 \right) \cos(4l+2g) + \\ & \left. \left. - \frac{845}{48} e^3 \cos(5l+2g) + \frac{533}{16} e^4 \cos(6l+2g) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

При $\eta=0$ система (4.4) имеет порождающее решение

$$\begin{aligned} L &= L_0, \quad l = nt + l_0, \\ G &= G_0, \quad g = -n't + g_0, \end{aligned} \quad (4.7)$$

где L_0, G_0, l_0, g_0 — произвольные постоянные и где $n = \frac{kM^2}{L_0^3}$. Мы будем предполагать, что $L_0 \neq G_0$, т. е. порождающее решение не является круговым. Пусть n и n' соизмеримы между собой, тогда решение (4.7) является периодическим. Его период обозначим через T_0 .

При $\eta \neq 0$ можно написать

$$\begin{aligned} L &= L_0 + \eta_1 + \eta_2, \quad l = nt + l_0 + \eta_1 + \eta_2, \\ G &= G_0 + \eta_3 + \eta_4, \quad g = -n't + g_0 + \eta_3 + \eta_4, \end{aligned} \quad (4.8)$$

где η_i — начальные отклонения, а η_i — функции времени, постоянных η_i и параметра η , обращающиеся в нуль при $t=0$. Среди всех решений (4.8) нам нужны периодические с периодом $T = T_0 + \Delta T$, где ΔT — величина такого же порядка, как и η . Условия периодичности можно записать в виде

$$\begin{aligned} \eta_1(T) &= 0, \quad \eta_2(T) = n\Delta T + \eta_1(T) = 0, \\ \eta_3(T) &= 0, \quad \eta_4(T) = -n'\Delta T + \eta_3(T) = 0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Раскладывая левые части (4.9) по степеням η , ΔT , получаем уравнения, которым должны удовлетворять эти величины в случае периодического решения. В силу существования интеграла Якоби, на которого возможно определение $\eta_1(T)$ в виде функции от остальных η_i , уравнение $\eta_1(T)=0$ является следствием остальных и его можно

исключить из рассмотрения. Кроме того, в силу независимости правых частей (4.4) от времени начала отсчета времени, можно выбрать так, что $l_0 = \eta_1 = 0$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \eta_1(T) = & \frac{\partial F_1}{\partial g_0} - \frac{\eta_1}{T_0} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial L_0} \left\{ \frac{\partial F_1}{\partial L_0} \frac{\partial F_1}{\partial g_0} dt + \eta_2 \frac{\partial^2 F_1}{\partial g_0 \partial L_0} + \eta_3 \frac{\partial^2 F_1}{\partial g_0^2} + \right. \\ & + \eta_4 \frac{\partial^2 F_1}{\partial L_0^2} + \frac{\Delta T}{T_0} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial g_0} \left. \right\} + \frac{\eta}{T_0} \left\{ \frac{\partial F_1}{\partial g_0} \right\} + \dots = 0, \end{aligned}$$

$$\eta_2(T) = n \frac{\Delta T}{T_0} - \eta_1 \frac{\partial^2 F_0}{\partial L_0^2} - \frac{\eta}{T_0} \cdot \frac{\partial^2 F_0}{\partial L_0^2} \int_0^T \frac{\partial F_1}{\partial g_0} dt dt - \eta \frac{\partial^2 F_1}{\partial L_0^2} + \dots = 0, \quad (4.10)$$

$$\eta_3(T) = -n' \frac{\Delta T}{T_0} - \eta \frac{\partial^2 F_1}{\partial g_0^2} + \dots = 0,$$

где через $\left\{ \frac{\partial^2 F_1}{\partial g_0^2} \right\}$ обозначена некоторая известная постоянная, зависящая от начальных значений порождающего решения (Батраков, 1955, стр. 124).

Для определения четырех неизвестных $\eta, \Delta T$ имеем лишь три уравнения (4.10), следовательно, одно из этих неизвестных можно выбрать произвольно. Выберем $\eta_2=0$, что равносильно выбору начального эксцентриситета решения в качестве произвольной постоянной.

Определим $\eta, \Delta T$ как голоморфных функций η , обращающихся в нуль при $\eta=0$, из уравнений (4.10), возможно только в том случае, когда

$$\frac{\partial F_1}{\partial g_0} = 0. \quad (4.11)$$

Так как функция F_1 имеет вид

$$\sum K(L, G) \cos(il + 2jg) \quad \begin{pmatrix} i=0, 1 \\ j=-1, 0, 1 \end{pmatrix}$$

то единственными соизмеримостями, где появляются критические члены, являются соизмеримости вида (3.15). Следовательно, периодические решения второго сорта, как и решения третьего сорта, возможны только в этих соизмеримостях.¹ Полагая $l_0=0$, имеем

$$\frac{\partial F_1}{\partial g_0} = - \sum 2jK(L_0, G_0) \sin 2jg_0, \quad (4.12)$$

причем в силу свойств разложения (4.6) в правой части (4.12) все слагаемые, кроме одного, равны нулю. Отсюда единственным решением уравнения (4.11) будет

$$g_0 = \frac{k\pi}{2} \quad (k=0, 1, 2, 3). \quad (4.13)$$

Из последних двух уравнений (4.10) можно определить $\eta, \Delta T$ как голоморфные функции η , η_2 обращающиеся в нуль, при $\eta=\eta_2=0$. Подставляя их выражения через η, η_2 в первое уравнение (4.10) и учитывая, что $\eta_2=0$, получим уравнение, разрешимое относительно η_2 , если

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial g_0^2} \neq 0. \quad (4.14)$$

¹ Если учитывать только те критические члены, которые входят в F_1 .

Но мы уже отмечали, что разложение (4.12) сводится к одному члену. Следовательно, (4.14) при достаточно малых ϵ выполняется и решения второго сорта существуют во всех соотношениях типа (3.15). Особыми будут случаи, когда эллипсоид является эллипсоидом вращения ($\kappa=0$), а также, когда порождающее решение является строго круговым. В этих случаях $\frac{\partial^2 F_1}{\partial g_0^2}$ тождественно равно нулю и определение γ_1 невозможно. Эти случаи, как и в предыдущих параграфах, будут вырожденными, и периодические решения второго сорта в этих случаях не существуют. Исключением является лишь соотношение 1/1, где при $\kappa=0$ круговые порождающие решения возможны. Периодические решения в этом случае рассмотрены в работе В. К. Абалакина (1957).

§ 5. Решения первого сорта

Для того чтобы показать существование решений первого сорта в нашей задаче, введем вместо переменных Делоне канонические переменные Пуанкаре L, λ, ξ, χ по формулам

$$L = k \sqrt{M} \sqrt{a}, \quad \lambda = l + g = (n - n')t + \tilde{\lambda}, \quad (5.1)$$

$$\xi = \sqrt{2(L - G)} \cos g, \quad \eta = \sqrt{2(L - G)} \sin g.$$

Тогда уравнения движения примут вид

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \lambda}, \quad \frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial L}, \quad (5.2)$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \eta}, \quad \frac{d\eta}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial \xi},$$

где

$$F = F_0 + \eta F_1 + \eta^2 F_2 + \dots, \quad (5.3)$$

$$F_0 = \frac{k^2 M^2}{2L^3} + n' \left(L + \frac{3}{2} + \frac{\eta^2}{2} \right), \quad F_1 = \frac{1}{2} \lambda^2 + \frac{1}{2} \eta^2, \dots$$

Функции F_i разлагаются в ряды по степеням ξ, η вида

$$\sum K_{jkl}(L) \xi^j \eta^k \cos \lambda l.$$

причем нужно брать $\cos \lambda l$ при j четном и $\sin \lambda l$ — при j нечетном. При $\eta=0$ система (4.2) имеет порождающее решение

$$L = L_0, \quad \lambda = (n_0 - n')t + \lambda_0, \quad (5.4)$$

$$\xi = 0, \quad \eta = 0,$$

представляющее движение с угловой скоростью $n_0 - n'$ по кругу радиуса a_0 лежащему в экваториальной плоскости. Это порождающее решение является периодическим и имеет период $T_0 = \frac{2\pi}{n_0 - n'}$.

Будем искать решения системы (4.2) при $\eta \neq 0$ периода $T = T_0 + \Delta T$, где ΔT — величина такого же порядка, как и η , близкие к (5.4) и обращающиеся в (5.4) при $\eta=0$. Эти решения можно записать в виде

$$L = L_0 + \xi_1 + \xi_2, \quad \lambda = (n_0 - n') \frac{T_0}{T} t + \lambda_0 + \gamma_1 + \gamma_2, \quad (5.5)$$

$$\xi_2 = \xi_2 + \xi_2, \quad \eta = \eta_2 + \eta_2,$$

где ξ, η — начальные отклонения искомого решения от (5.4), а γ_1, γ_2 — функции времени с периодом T , обращающиеся в нуль при $t=0$ и разлагающиеся по степеням ξ, η . Условия периодичности

$$\gamma_i(T) = 0, \quad \dot{\gamma}_i(T) = 0 \quad (i=1, 2) \quad (5.6)$$

дают уравнения, которым должны удовлетворять $\xi, \eta, \Delta T, \eta$. При этом уравнение $\gamma_1(T)$ является следствием трех остальных, так как система (4.2) имеет интеграл Якоби, разрывный относительно L .

Ограничиваясь первыми степенями неизвестных и параметра η , выписем оставшиеся три уравнения в явном виде

$$\frac{\dot{\gamma}_1(T)}{T_0} = \lambda(T) - \lambda(0) - 2n = (n_0 - n') \frac{\Delta T}{T_0} - \frac{3k^2 M^2}{L_0^3} \xi_1 +$$

$$+ \frac{3\eta k^2 M^2}{L_0^3 (n_0 - n')} \sum K_{100} \cos \lambda l - \eta \frac{\partial K_{100}}{\partial L_0} + \dots = 0, \quad (5.7)$$

$$\gamma_2(T) = \xi(T) - \xi(0) = \xi_2 (\cos n' T_0 - 1) - \gamma_2 \sin n' T_0 + \eta F_2 + \dots = 0,$$

$$\dot{\gamma}_2(T) = \eta(T) - \eta(0) = \eta_2 \sin n' T_0 + \gamma_2 (\cos n' T_0 - 1) + \eta F_2 + \dots = 0,$$

где F_0, F_1, \dots — известные функции начальных значений порождающего решения, не равные одновременно нулю.

Пять величин $\xi, \eta, \Delta T$ связаны только тремя уравнениями (5.7), и, следовательно, две из этих величин можно выбрать произвольно. Так как правые части (5.2) не зависят от времени, то γ_1 вместе с λ_0 являются произвольными величинами, и можно положить $\gamma_1 = \lambda_0 = 0$. Кроме того, положим $\xi_1 = 0$. Тогда уравнения (5.7) определяют $\Delta T, \xi_2, \eta_2$ единственным образом как голоморфные функции η , обращающиеся в нуль при $\eta=0$, если только отличен от нуля определитель

$$\begin{vmatrix} \cos n' T_0 & 1 & -\sin n' T_0 \\ \sin n' T_0 & \cos n' T_0 - 1 & 2(1 - \cos n' T_0) \end{vmatrix} \quad (5.8)$$

и, кроме того, $n_0 \neq n'$.

Но (5.8) обращается в нуль только при

$$\frac{n_0}{n'} = \frac{1+m}{m} \quad (m = \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (5.9)$$

Таким образом, периодические решения первого сорта существуют во всех случаях, кроме (5.9) и случая $n_0 = n'$. При этом мы предполагаем, что $n' \neq 0$.

Если же $n'=0$, т. е. рассматривается случай покоящегося трехосного эллипсоида, то определитель (5.8) тождественно равен нулю, но одновременно будем иметь $F_2 = T_0 = 0$; следовательно, необходимо провести дополнительные исследования.

Отметим, что определитель (5.8) не зависит от λ , точно так же не зависит от λ и коэффициент при ΔT в первом уравнении (5.7). Следовательно, периодические решения первого сорта по вращающейся системе координат существуют и в случае $\lambda=0$, т. е. в случае эллипсоида вращения.

Подведем некоторые итоги. В работе рассматривается задача о периодических движениях частицы в поле тяготения трехосного эллипсоида. При этом предполагается, что эллипсоид мало отличается от сферы того же объема и его отклонения от этой сферы в направлении осей являются малыми первого порядка. Эллипсоид считается однородным.

В § 1 даны дифференциальные уравнения движения частицы в поле тяготения вращающегося эллипсоида. В эти уравнения, посредством равенств (1.9), введен малый

параметр θ . Равенства (1.9) означают, что отношения $\frac{\lambda}{\mu}$, $\frac{\mu}{\nu}$, $\frac{\nu}{\lambda}$ являются фиксированными. Проводится разложение пертурбационной функции по степеням эксцентриситетов с точностью до членов четвертого порядка включительно.

В § 2 получено уравнение поверхности нулевых скоростей и определены координаты точек либрации.

В § 3 методом Пуанкаре доказывается существование решений третьего сорта в случае, когда имеют место соотношения $\frac{n}{n'} = \frac{1}{i}$ или $\frac{1}{2}$, где n — среднее движение частицы, а n' — угловая скорость вращения эллипсоида. Изучаются условия существования почти круговых порождающих решений. Зависимость между параметром λ , характеризующим форму эллипса, и наклонностью круговых порождающих решений для решений третьего сорта представлена на рис. 3, 4, 5. В соизмеримостях $\frac{n}{n'} = \frac{2}{i}$ ($i = 5, 6, \dots$) наклонности почти круговых порождающих решений должны быть близки к $63^\circ 26' 06''$ или же к дополнению этой величины до 180° .

В § 4 доказывается существование решений второго сорта во всех соизмеримостях. В § 5 рассматривается вопрос о существовании решений первого сорта и доказывается, что они существуют при всех n и n' , кроме $\frac{n}{n'} = \frac{1+k}{k}$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) и $n = n'$.

Имеется также сомнительный случай $n' = 0$. В заключение отметим, что выводы, сделанные в работе, справедливы и в том случае, когда гравитирующий эллипсоид не будет однородным. Необходимо лишь, чтобы слой одинаковой плотности располагался гомотетично, т. е. были бы ограничены эллипсоидами, подобными поверхности эллипсоида.

ЛИТЕРАТУРА

- Абабаки В. К. 1957. К вопросу об устойчивости точек либрации в окрестности вращающегося гравитирующего эллипсоида. Бюлл. ИТА, 6, 8.
Батраков Ю. В. 1955. Периодические решения типа Шварцшильда в ограниченной задаче трех тел. Бюлл. ИТА, 6, 2.
Дубовский Г. Н. 1945. О периодических движениях в системе спутников Сатурна. Труды ГАИШ, 15, вып. 1.
Субботин М. Ф. 1937. Курс небесной механики. 2. ОНТИ. М.—А.
Cayley A. 1859. Tables of the developments of Functions in the theory of elliptic motion. Memoirs of the RAS, 29, стр. 191—306.
Moulton F. 1920. Periodic orbits. Washington.
Poincaré H. 1892. Méthodes nouvelles de la mécanique céleste. 1. Paris.

Поступило в Редакцию
15 июня 1956 г.

Бюллетень Института Теоретической Астрономии

Т. VI

1957

№ 8 (81)

К вопросу об устойчивости точек либрации в окрестности вращающегося гравитирующего эллипсоида

В. К. Абабакин

Исследуются устойчивость точек либрации в случае движения частицы в поле тяготения вращающегося эллипсоида. Точки либрации, лежащие на продолжении малой оси инвариантного сечения эллипсоида, устойчивы в первом приближении; точки либрации, расположенные в направлении большой оси, неустойчивы. Найдены три семейства периодических орбит, размеры которых зависят от одного параметра.

ON THE STABILITY OF LIBRATION POINTS NEAR THE GRAVITATING ELLIPSOID IN ROTATION, by V. K. Ababakin. — In the present paper the stability of the libration points in the case of a particle moving under the gravitational attraction of a rotating ellipsoid has been discussed. The libration points which lie on the extensions of the minor axis of the equatorial section of the ellipsoid have been found to be stable by the first approximation while those displacing in direction of the major axis are unstable. Three families of periodic orbits are obtained, the sizes of which depending on one parameter. In addition the one-parametric family of asymptotic solutions has been also derived.

В работе „Периодические движения частицы в поле тяготения вращающегося трехосного эллипсоида“ (Батраков, 1957) были найдены положения относительного равновесия — точки либрации — в случае движения материальной частицы нулевой массы под действием притяжения вращающегося эллипсоида.

В настоящей статье мы ставим целью исследование устойчивости движения в точках либрации и получение периодических решений в окрестности этих точек. При этом мы будем считать положение относительного равновесия устойчивым в первом приближении, если система уравнений в вариациях такова, что соответствующее ей характеристическое уравнение имеет своими корнями чисто мнимые величины. Если же некоторые из корней характеристического уравнения имеют не равные нулю вещественные части, то положение относительного равновесия считается неустойчивым. Метод исследования в данной задаче такой же, что и в ограниченной задаче трех тел (см., например, в руководстве Мутьона (Moulton, 1923)).

Уравнения движения материальной частицы в гравитационном поле эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

вращающегося с постоянной угловой скоростью ω вокруг одной из главных осей, в данном случае вокруг оси OZ , могут быть записаны в виде

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} - 2\omega\dot{y} &= \frac{\partial U}{\partial x} \\ \ddot{y} + 2\omega\dot{x} &= \frac{\partial U}{\partial y} \\ \ddot{z} &= \frac{\partial U}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где обозначено

$$2U = \omega^2 (x^2 + y^2) + 2kM \left(\frac{1}{r} + \frac{\lambda x^2 + \mu y^2 + \nu z^2}{r^3} \right) + \dots \quad (2)$$

Полуоси a , b и c эллипсоида связаны с радиусом R сферы того же объема и той же средней плотности (сфера сравнения) соотношениями

$$\begin{aligned} a^3 &= R^3 + m\lambda, \\ b^3 &= R^3 + m\mu, \\ c^3 &= R^3 + m\nu, \end{aligned}$$

где m — некоторый числовой коэффициент, зависящий от распределения плотности эллипсоида; для однородного эллипсоида $m = \frac{10}{3}$. Параметры λ , μ и ν , входящие в (2), пропорциональны квадратам отклонений эллипсоида от сферы сравнения и удовлетворяют условию $\lambda + \mu + \nu = 0$.

Отклонения эллипсоида от сферы сравнения, а значит и величины λ , μ и ν считаем малыми, причем разности параметров λ , μ , ν принимаем за величины того же порядка малости. Кроме того, можно отметить, что величины λ , μ , ν могут характеризовать неоднородность эллипсоида при гомотетическом расположении слоев одинаковой плотности, благодаря чему в известной степени увеличивается общность рассматриваемой задачи.

Значение остальных, входящих в (2) величин не нуждается в пояснениях. В случае движения частицы в окрестности вращающегося эллипсоида существуют положения относительного равновесия L_1, \dots, L_4 — точки либрации, лежащие на продолжениях главных осей эллипсоида $2a$ и $2b$ симметрично относительно его центра (Ватраков, 1957). Координаты точек либрации L_1 и L_2 в наших обозначениях имеют вид

$$x_0 = \pm \left(a_0 + \frac{\lambda}{a_0} \right), \quad y_0 = 0, \quad z_0 = 0,$$

а координаты точек L_3 и L_4 определяются формулами

$$x_0 = 0, \quad y_0 = \pm \left(a_0 + \frac{\mu}{a_0} \right), \quad z_0 = 0,$$

где $a_0^3 = k^2 M \omega^{-2}$.

В силу симметричного расположения точек либрации L_1 и L_3 , L_2 и L_4 относительно начала системы координат и независимости их от способа обозначений координатных осей достаточно все рассуждения в дальнейшем провести для одной из точек, например, для точки $L_1(x_0, 0, 0)$.

Выберем точку либрации L_1 за начало новой системы координат с осями, параллельными осям старой системы отсчета. Тогда система уравнений в вариациях (с точностью до малых первого порядка) примет вид

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\omega \dot{y} &= \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \xi \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \eta \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y} + \nu \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial z}, \\ \ddot{y} + 2\omega \dot{x} &= \frac{\partial \Omega}{\partial y} + \xi \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y \partial x} + \eta \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y \partial z}, \\ \ddot{z} &= \frac{\partial \Omega}{\partial z} + \xi \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z \partial x} + \eta \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z \partial y} + \nu \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2}, \end{aligned} \quad (3)$$

где обозначено $\xi = \frac{\lambda}{a_0^3}$, $\eta = \frac{\mu}{a_0^3}$, $\nu = \frac{\nu}{a_0^3}$ и где при вычислениях частных производных $\frac{\partial \Omega}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2}$, ... необходимо положить $x = x_0$, $y = 0$, $z = 0$.

Тогда тождественно имеем

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} = \frac{\partial \Omega}{\partial y} = \frac{\partial \Omega}{\partial z} = 0.$$

Вычисление производных второго порядка при указанных выше значениях x , y , z дает следующие выражения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} &= \omega^2 + 2(A+B), \quad \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y} = 0, \\ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} &= \omega^2 - (A-2B), \quad \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y \partial z} = 0, \\ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} &= -(A-2B), \quad \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z \partial x} = 0, \end{aligned}$$

где для краткости обозначено

$$\begin{aligned} A &= k^2 M \left(\frac{1}{x_0^3} + \frac{5\nu}{x_0^5} + \dots \right), \\ B &= k^2 M \left(\frac{1}{x_0^3} + \dots \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Потому система (3) приводится к виду

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\omega \dot{y} &= [\omega^2 + 2(A+B)]x, \\ \ddot{y} + 2\omega \dot{x} &= [\omega^2 - (A-2B)]y, \\ \ddot{z} &= -(A-2B)z. \end{aligned} \quad (5)$$

Очевидно, что третье уравнение системы (5), независимое от первых двух, имеет решение

$$z = C_1 \sin \sqrt{A-2B}t + C_2 \cos \sqrt{A-2B}t,$$

где $\sqrt{A-2B} < \frac{A}{2B}$.

Решение первых двух уравнений системы (5) будем искать в виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P e^{it}, \\ y &= R e^{it}. \end{aligned} \quad (6)$$

Подстановка (6) в (5) дает следующие соотношения для определения постоянных P и R :

$$\begin{aligned} \{z^2 - [\omega^2 + 2(A+B)]\} P - 2\omega z R &= 0, \\ 2\omega z P + \{z^2 - [\omega^2 - (A-2B)]\} R &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Система уравнений (7) может иметь ненулевые решения относительно P и R только в том случае, когда детерминант ее равен нулю, т. е.

$$\begin{aligned} z^2 - [\omega^2 + 2(A+B)] &= -2\omega z, \\ z^2 - [\omega^2 - (A-2B)] &= 2\omega z. \end{aligned} \quad (8)$$

Уравнение (8), являющееся характеристическим уравнением системы первых двух дифференциальных уравнений из (5), при помощи (4) и равенства $x_0 = a_0 + \frac{\lambda}{a_0}$ преобразуется к виду

$$z^4 + \left(1 - \frac{4\lambda + 2\nu}{a_0^3}\right) z^2 + \frac{6(\mu - \lambda)}{a_0^3} = 0, \quad (9)$$

где положено $\dot{z} = \frac{z}{a_0}$.

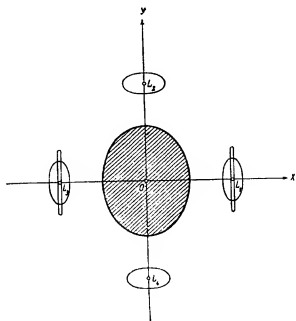
При $\lambda < \mu$ уравнение (9) имеет четыре попарно сопряженных чисто мнимых корня. Если параметры $\sqrt{|\lambda|}$ и $\sqrt{|\mu|}$ принять за малые первого порядка, то с точностью до величин второго порядка малости эти корни имеют вид

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= +\frac{i}{a_0} \sqrt{6(\mu - \lambda)}, & \lambda_2 &= -\frac{i}{a_0} \sqrt{6(\mu - \lambda)}, \\ \lambda_3 &= +i, & \lambda_4 &= -i. \end{aligned}$$

Таким образом, при $\lambda < \mu$ точка либрации L_1 является устойчивым в первом приближении положением относительного равновесия; однако это соответствует тому критическому случаю, когда для строгого решения вопроса об устойчивости первого приближения недостаточно.

При $\lambda > \mu$ уравнение (9) имеет два вещественных и два сопряженных чисто мнимых корня

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{a_0} \sqrt{6(\lambda - \mu)}, & \lambda_2 &= -\frac{1}{a_0} \sqrt{6(\lambda - \mu)}, \\ \lambda_3 &= +i, & \lambda_4 &= -i. \end{aligned}$$



В этом случае точка либрации L_1 неустойчива (Липунов, 1950, стр. 128); однако, ввиду наличия отрицательного вещественного корня, здесь имеет место условие устойчивости в смысле Липунова. Соответствующие условия, связывающие начальные данные, приведены ниже. Вследствие симметричного расположения точек либрации L_1 и L_2 относительно начала координат можно сделать вывод о том, что устойчивость точки L_1 при $\lambda < \mu$ означает одновременно и устойчивость точки L_2 . Так как наши рассуждения не зависят от обозначений осей координат, то при $\lambda < \mu$ имеем неустойчивость точек либрации L_2 и L_3 ; поворотом оси Ox на $\frac{\pi}{2}$ мы приходим к случаю $\lambda > \mu$, когда точки либрации, лежащие на этой оси, неустойчивы. В этом, впрочем, легко убедиться непосредственными вычислениями.

Таким образом, мы получали, что при $\lambda < \mu$ точки либрации L_1 , L_3 и L_5 , L_4 являются положениями соответственно устойчивого и неустойчивого равновесия. При $\lambda > \mu$ устойчивостью обладают точки L_2 и L_4 , точки либрации L_1 и L_3 при этом условии неустойчивы.

В случае $\lambda = \mu$, соответствующем сферонду, понятие "точки либрации" теряет смысл. Перейдем теперь к отысканию периодических решений в окрестности точек либрации L_1, \dots, L_5 . В силу равноправности этих точек ограничимся рассмотрением одной из них, например L_1 .

Как известно, система дифференциальных уравнений имеет периодические решения, если соответствующее ей характеристическое уравнение имеет, по крайней мере, одну пару чисто мнимых корней (Липунов, 1950, стр. 240—246, 259—261).

Поскольку система (5) удовлетворяет условиям существования периодических решений, то в окрестности точки $L_1(x_0, 0, 0)$ существуют периодические решения, которые мы получим, выбирая определенным образом начальные данные — началь-

ные координаты ξ_0, η_0, ζ_0 и компоненты скорости $\dot{\xi}_0, \dot{\eta}_0, \dot{\zeta}_0$. Так как при $\lambda < \mu$ характеристическое уравнение (9) имеет две пары сопряженных чисто мнимых корней, то в данном случае существуют два семейства периодических решений, которые с принятой точностью имеют вид

$$\begin{aligned} \xi &= P_1 e^{i\lambda_1 t} + P_2 e^{-i\lambda_1 t}, \\ \eta &= R_1 e^{i\lambda_1 t} + R_2 e^{-i\lambda_1 t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi &= P_3 e^{i\lambda_3 t} + P_4 e^{-i\lambda_3 t}, \\ \eta &= R_3 e^{i\lambda_3 t} + R_4 e^{-i\lambda_3 t} \end{aligned}$$

Их периоды равны соответственно $\frac{2\pi a_0}{a_0 \sqrt{6(\mu - \lambda)}}$ и $\frac{2\pi}{a_0}$ с точностью до малых первого порядка.

При $\lambda > \mu$ имеется одна пара чисто мнимых корней, и, следовательно, существует одно семейство периодических решений вида (с той же точностью)

$$\begin{aligned} \xi &= P_5 e^{i\lambda_1 t} + P_6 e^{-i\lambda_1 t}, \\ \eta &= R_5 e^{i\lambda_1 t} + R_6 e^{-i\lambda_1 t} \end{aligned}$$

с периодом $\frac{2\pi}{a_0}$ (с точностью до малых первого порядка).

Подставив выражения A и B из (4) при $x_0 = a_0 + \frac{\lambda}{a_0}$ в систему (7) и учитывая, что $\lambda = \frac{\lambda}{a_0}$, запишем (7) в виде

$$\begin{aligned} \left[\lambda^2 - 3 \left(1 + \frac{2\mu}{a_0^2} \right) \right] P - 2\lambda R &= 0, \\ 2\lambda P + \left[\lambda^2 - 1 + \frac{2(\lambda - \mu)}{a_0^2} \right] R &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Последовательная подстановка в (10) значений $\lambda_1, \dots, \lambda_4$ дает для случая $\lambda < \mu$

$$P_1 = -\frac{2i}{3a_0} \sqrt{6(\lambda - \mu)} R_1, \quad P_2 = i \frac{2i}{3a_0} \sqrt{6(\lambda - \mu)} R_2,$$

$$P_3 = -\frac{i}{2} R_3, \quad P_4 = i \frac{i}{2} R_4$$

и для случая $\lambda > \mu$

$$P_1 = -\frac{2}{3a_0} \sqrt{6(\lambda - \mu)} R_1, \quad P_2 = i \frac{2}{3a_0} \sqrt{6(\lambda - \mu)} R_2,$$

$$P_3 = -\frac{i}{2} R_3, \quad P_4 = i \frac{i}{2} R_4.$$

Положим $\xi = 0$ и $\dot{\xi} = 0$, тогда $C_1 = C_2 = 0$, т. е. движение материальной частицы происходит в плоскости. Для получения периодического решения долгого периода определим начальные данные условиями $R_3 = R_4 = 0$.

Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} \xi &= P_1 e^{i\lambda_1 t} + P_2 e^{-i\lambda_1 t}, \\ \eta &= R_1 e^{i\lambda_1 t} + R_2 e^{-i\lambda_1 t}. \end{aligned}$$

Подставляя выражения P_1 и P_2 через произвольные постоянные R_1 и R_2 и заменяя показательные функции тригонометрическими, получим

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \frac{2}{3} q \Delta_2 \cos \frac{\omega \Delta_1}{\gamma} t + \frac{2}{3} q \Delta_1 \sin \frac{\omega \Delta_1}{\gamma} t, \\ \gamma &= \Lambda_1 \cos \frac{\omega \Delta_1}{\gamma} t - \Lambda_2 \sin \frac{\omega \Delta_1}{\gamma} t, \end{aligned}$$

где обозначено $q = \frac{1}{a_0} \sqrt{6(\mu - \lambda)}$, $\Lambda_1 = R_1 + R_2$, $\Lambda_2 = -i(R_1 - R_2)$.

Исключая из выражений для \dot{z} и γ время t , получим уравнение орбиты периодического движения с периодом $\frac{2\pi a_0}{\omega \sqrt{6(\mu - \lambda)}}$ в виде

$$\frac{z^2}{4} + \frac{\gamma^2}{C^2} = 1, \quad (11)$$

где $C^2 = \Lambda_1^2 + \Lambda_2^2$.

Уравнение (11) представляет эллипс с полуосями $\frac{2}{3} q C$ и C , параллельными координатным осям, и с эксцентриситетом $e = 1 - \frac{2}{9} q^2$.

Периодическое решение короткого периода получим, полагая $R_1 = R_2 = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \dot{z} &= -\frac{i}{2} R_2 e^{i\omega t} + \frac{i}{2} R_1 e^{-i\omega t}, \\ \gamma &= R_2 e^{i\omega t} + R_1 e^{-i\omega t}. \end{aligned}$$

Аналогично предыдущему случаю получаем

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \frac{1}{2} \Lambda_1 \cos \omega t + \frac{1}{2} \Lambda_2 \sin \omega t, \\ \gamma &= \Lambda_3 \cos \omega t - \Lambda_4 \sin \omega t, \end{aligned}$$

где $\Lambda_3 = R_3 + R_4$, $\Lambda_4 = -i(R_3 - R_4)$.

Уравнение траектории этого периодического движения с периодом $\frac{2\pi}{\omega}$, совпадающим с периодом вращения эллипсоида, имеет вид

$$\frac{z^2}{C^2} + \frac{\gamma^2}{C^2} = 1, \quad (12)$$

где $C^2 = \Lambda_3^2 + \Lambda_4^2$.

Эллипс (12) имеет полуоси $\frac{C}{2}$ и C и эксцентриситет $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

В случае $\lambda > \mu$ получается только одно семейство периодических решений короткого периода, совпадающее с рассмотренным выше короткопериодическим семейством. Уравнение орбиты соответствующего периодического движения идентично уравнению (12).

Расположение периодических орбит при $\lambda < \mu$ представлено на рисунке. Отметим, что размеры орбиты зависят от одной произвольной постоянной.

Можно заметить, что при $\lambda > \mu$, выбирая начальные условия так, чтобы выполнялось $R_1 = R_3 = R_4 = 0$, получим семейство асимптотических решений, имеющее с принятой точностью вид

$$\begin{aligned} \dot{z} &= P_1 e^{i\omega t}, \\ \gamma &= R_2 e^{i\omega t}. \end{aligned}$$

и соответствующее отрицательному вещественному корню $\frac{1}{2}$ характеристического уравнения. Траектория этого асимптотического движения (с принятой точностью) есть прямая, проходящая через точку либрации и уравнение которой имеет вид (с той же точностью)

$$\dot{z} = \frac{2}{3a_0} \sqrt{6(\lambda - \mu)} \gamma.$$

Как уже было отмечено выше, в этом случае имеет место условие (в смысле Ляпунова) устойчивости соответствующих положений относительного равновесия.

Таким образом, в нашей статье получены следующие результаты:

- 1) доказана в первом приближении устойчивость движения материальной частицы в точках либрации, лежащих на продолжениях малой оси экваториального сечения эллипсоида;
 - 2) в точках либрации, расположенных в направлении большой оси эллипсоида, движение частицы неустойчиво;
 - 3) в окрестности устойчивых положений относительного равновесия существуют два семейства периодических орбит долгого и короткого периодов;
 - 4) в окрестности неустойчивых положений относительного равновесия существуют одно семейство периодических орбит короткого периода и одно семейство асимптотических орбит.
- Периодические движения в обоих случаях происходят по орбитам, близким к эллипсам, размеры которых зависят от одного существенного параметра.

ЛИТЕРАТУРА

- Батраков Ю. В. 1957. Периодические движения частиц в поле тяготения вращающегося трехосного эллипсоида. Бюлл. ИТА, 6, 8 (81).
 Липунов А. М. 1950. Общая задача об устойчивости движения. 3-е изд. ГИИТА, М.—А.
 Мoulton F. R. 1925. An Introduction to Celestial Mechanics. New York.

Поступило в Редакцию
15 июня 1956 г.

О траекториях полета ракеты вокруг Луны

М. С. Лисовская

В работе указываются условия существования орбит ракет, охватывающих Землю и Луну и проходящих на произвольно малом расстоянии от Луны. Разработан метод графического интегрирования, с помощью которого построено 5 симметричных орбит указанного типа.
 ÜBER DIE RAKETENBAHNEN, DIE DEN MOND UMFASSEN, VON M. S. LISOVSKAJA. — In dieser Arbeit werden die Existenzbedingungen der Raketenbahnen, die die Erde und den Mond umfassen und oben dem letzteren einen willkürlich kleinen Minimalabstand haben, ausgelegt. Mittels der vom Autor gegebenen grafischen Methode werden 5 solchen symmetrischen Raketenbahnen konstruiert.

Введение

Целью настоящей работы является выяснение качественной картины траекторий, по которым может двигаться ракета, запускаемая с Земли или с искусственного спутника, облетающая на небольшом расстоянии Луну и возвращающаяся обратно.

Существует целый ряд работ, в которых рассматривается построение траекторий ракет.

Для ракеты, снабженной реактивным двигателем, разрешена общая задача о выборе направления мгновенных импульсов, сообщаемых двигателем при условии минимума расхода горючего. Так, например, выведены формулы, определяющие траекторию с минимальным расходом горючего, связывающую круговые орбиты вокруг двух планет (Lawden, 1955).

Что касается построения траектории ракеты, целиком предоставленной действию сил притяжения, задача решалась, как правило, без учета возмущений (Кой, 1950; Эно-Пекури, 1950), а именно: в сферах действия Земли и Луны строились две невозмущенные круговые орбиты, причем переход с одной орбиты на другую фактически не рассматривался.

Лишь в нескольких работах были определены траектории полета ракеты методом численного интегрирования уравнений возмущенного движения.

В одной из них (Goldstein, Fröberg, 1952) решается наиболее легкая задача — полет на Луну без последующего возвращения на Землю. В недавно вышедшей работе Г. А. Чеботарева (Чеботарев, 1956) строится траектория полета вокруг Луны с возвращением на Землю без дополнительного импульса. Автор строит эту орбиту последовательными приближениями так, чтобы в результате удовлетворить двум условиям:

- 1) скорость ракеты в момент ее соединения с Луной принимается равной нулю;
- 2) траектория должна касаться поверхности Земли (см. § 2), но при этом ограничивает минимальное расстояние ракеты от центра Луны (оно оказывается весьма значительным — 31 600 км).

Как будет показано в настоящей работе, это расстояние может быть сделано, вообще говоря, любым, без нарушения симметрии траектории, если не связывать себя нулевым значением скорости в момент соединения с Луной. Именно мы заданым определенным (небольшим) расстоянием ракеты от центра Луны в момент соединения и будем

выбирать величину начальной скорости таким образом, чтобы траектория пересекала поверхность Земли или прошла вблизи нее.

В работе построено 6 орбит, охватывающих более или менее полно интересующую нас область движения. Из них 5 орбит построено особым методом графического интегрирования.

§ 1. Об условиях, которым должна удовлетворять траектория ракет без расхода горючего

Наиболее простой (с вычислительной точки зрения) способ построения траектории ракеты, которая проходила бы на заданном расстоянии от Луны, состоит в сообщении ракете дополнительного импульса вблизи Луны, там, где ее движение относительно Луны становится невозмущенным.

Гораздо труднее выбрать начальные условия движения ракеты, если она на своем пути не получает дополнительного импульса.

Среди задач, которые будут поставлены при облете Луны, можно предвидеть фото-

графирование части Луны, которая не видна с Земли. При этом ракета должна приблизиться к Луне на некоторое минимальное расстояние ϵ .

Таким образом, наша задача будет решена, если траектория ракеты будет удовлетворять двум условиям:

- 1) ракета пересечет линию Земля—Луна со стороны невидимой части поверхности Луны на расстоянии ϵ от ее центра;
- 2) ракета вернется на Землю, т. е. пройдет на небольшом расстоянии от центра Земли.

В тот момент, когда будет выполняться первое условие, расстояние ракеты от центра Земли будет равно $r_2 = a' + \epsilon$, где a' — среднее значение большой полуоси Луной орбиты. (Движение Луны считаем круговым).

Заданым начальными условиями движения ракеты. Пусть в начальный момент ракеты находится на малом расстоянии r_1 от центра Земли. Рассмотрим эллиптическое движение относительно Земли, определенное минимальным расстоянием от центра Земли, равным r_1 , и максимальным, равным r_2 , где $r_2 = a' + \epsilon$. Элементы эллипса a , ϵ и e_0 определяются из соотношений

$$\begin{aligned} r_1 &= a_0(1 - e_0), \\ r_2 &= a_0(1 + e_0). \end{aligned} \quad (1)$$

Пусть v_0 — эллиптическая скорость, соответствующая расстоянию r_1 . Сообщим эту скорость ракете в начальный момент.

Пока ракета не попадет в сферу действия Луны, она будет двигаться по эллиптической орбите с элементами a_0 и e_0 , определяемыми соотношениями (1).

Вблизи Луны движение ракеты становится невозмущенным относительно Луны. Скорость ее при этом с удалением от Земли увеличивается под влиянием Луны, в то время как эллиптическая скорость с удалением от Земли уменьшается.

Итак, в области тесного сближения с Луной истинная скорость больше эллиптической. Кроме того, очевидно, что r (расстояние от Земли) с течением времени возрастает. Учи эти два обстоятельства, покажем, что для оскулирующей орбиты относительно Земли в рассматриваемый момент тесного сближения с Луной минимальное расстояние от Земли r_1 будет, вообще говоря, больше, чем исходное расстояние r_1 , являющееся минимальным для исходной эллиптической орбиты.

Действительно, как видно из соотношения $v^2 = k^2 m_1 \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a_{\text{оск}}} \right)$, при одновременном увеличении v и r большая полуось оскулирующих орбит $a_{\text{оск}}$ будет с течением времени увеличиваться; в частности, $a_{\text{оск}} > a_0$.

Пожалуйста, теперь, что $e_{\text{оск}} < e_0$. Как было сказано, нас интересует случай, когда ракета приближается к Луне на минимальное расстояние ϵ при пересечении ею линии

Земля-Луна. Так как r_2 — минимальное расстояние от Луны, то скорость ракеты относительно Луны будет в этот момент перпендикулярна линии TLR (рис. 1).

Скорость Луны \vec{v}_L тоже перпендикулярна к линии TLR , следовательно, скорость ракеты относительно Земли, равная $\vec{v}_R = \vec{v}_L + \vec{v}_{RL}$, тоже перпендикулярна к этой линии. Тогда TR будет афелийным расстоянием для оскулирующей орбиты, соответствующей этому моменту времени. Расстояние TR , равное $a + \epsilon$ и, следовательно, равное r_2 , будет равно

$$TR = r_2 = a_{\text{оск}}(1 + e_{\text{оск}}).$$

Для исходной эллиптической орбиты мы имели $r_2 = a_0(1 - e_0)$. Так как $a_{\text{оск}} > a_0$, то будем иметь $e_{\text{оск}} < e_0$.

Видим, что перигелийное расстояние для оскулирующей орбиты $r_1 = a_{\text{оск}}(1 - e_{\text{оск}})$, следовательно, будет больше $r_1 = a_0(1 - e_0)$.

Значит, для того чтобы могла быть $r_1 \approx r_1$ (т. е. для обеспечения возвращения ракеты на Землю) необходимо, чтобы после сближения с Луной последующие возмущения от Луны уменьшали бы в достаточной степени скорость ракеты.

Обозначим через θ угол между скоростью ракеты и ее радиусом-вектором. В зависимости от направления скорости ракеты вблизи Луны могут представиться четыре случая: 1) $0 < \theta < 90^\circ$; 2) $90^\circ \leq \theta < 180^\circ$; 3) $180^\circ < \theta \leq 270^\circ$; 4) $270^\circ < \theta < 360^\circ$ (скорость Луны образует с радиусом-вектором угол $\theta = 90^\circ$).

Рассмотрим движение ракеты с момента t_0 , когда она находится на линии Луна-Земля на расстоянии Δ_0 от центра Луны, где Δ_0 близко к минимальному расстоянию от центра Луны, равному ϵ (в идеальном случае $\Delta_0 = \epsilon$). Тогда углы будут близки к 90 или к 270° .

На рис. 2 представлен случай 2, на рис. 3 — случай 3, на рис. 4 — случай 1 и на рис. 5 — случай 4.

Рассмотрим изменение скорости ракеты v_R^0 начиная с момента t_0 .

Если Δ — расстояние ракеты от центра Луны, то ускорение, сообщаемое Луной, равно $w = \frac{K^2 m_L}{\Delta^2}$. Пусть w_0 — ускорение, сообщаемое Луной в момент t_0 . Тогда $w_0 = \frac{K^2 m_L}{\Delta_0^2}$. Изменение скорости v_R^0 за малый промежуток времени Δt будет равно

$\Delta v_R^0 = w_0 \cdot \Delta t$ и направлено к Луне. Построим для каждого случая скорости v_R^0 , равные $v_R^0 = v_R^0 + \Delta v_R^0$. За время Δt Луна, движущаяся со скоростью v_L , переместится в точку L_1 , а ракета за этот же промежуток времени переместится в точку R_1 , причем $LL_1 = v_L \cdot \Delta t$, а $RR_1 = v_R^0 \cdot \Delta t$.

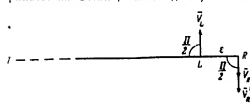
Из построения видно, что в случае 2 (рис. 2) скорость ракеты продолжает увеличиваться (т. е. $v_R^0 > v_R^0$ и т. д.), так как она в момент t_1 образует острый угол с направлением на Луну, и с течением времени этот угол уменьшается.

В случае 3 (рис. 3) через малый промежуток времени скорость ракеты начнет образовывать тупой угол с направлением на Луну. Это поведет к тому, что скорость v_R начнет уменьшаться.

Из построения v_R^0 для случая 1 (рис. 4) мы видим, что на малом промежутке времени (малом, так как θ близко к 90°) скорость ракеты уменьшается, но затем начинает увеличиваться в связи с тем, что угол между v_R и направлением на Луну становится острым и в дальнейшем увеличивается.

Наконец, в случае 4 (рис. 5) скорость ракеты сразу же начинает уменьшаться.

Рис. 1.



Заметим, что случаи 1 и 2, с одной стороны, и случаи 3 и 4, с другой, отличаются величиной угла между скоростью ракеты и скоростью Луны. В случаях 1 и 2 этот угол острый, а в 3 и 4 — тупой.

Таким образом, в результате построения мы видим, что в случаях 3 и 4, т. е. когда угол между скоростью ракеты и Луны тупой, возмущения со стороны Луны после сближения благоприятствуют уменьшению скорости ракеты, т. е. возвращению ракеты на Землю.

В конечном счете вероятность возвращения ракеты на Землю с некоторого минимального расстояния ϵ от Луны определяется скоростью относительно Луны, с которой она

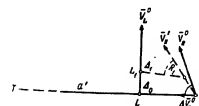


Рис. 2 (случай 2).

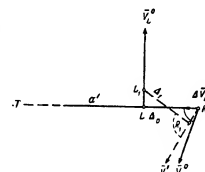


Рис. 3 (случай 3).

проходит вблизи последней. Можно сказать, что различие между разобранными случаями при фиксированном ϵ состоит в разнице величины этой скорости.

Чем меньше ϵ , тем больше должна быть относительная скорость. Однако при решении задачи в первом приближении мы по существу ничего не знаем об оптимальной величине этой скорости и тем более о величине начальной скорости ракеты относительно Земли.

В первом приближении мы исходим из невозмущенной эллиптической орбиты с заданными перигелийным и афелийным расстояниями.

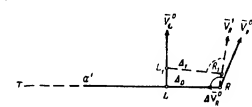


Рис. 4 (случай 1).

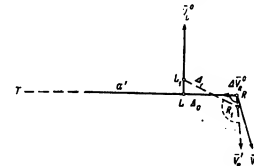


Рис. 5 (случай 4).

Дальнейшие приближения строим таким образом, чтобы величина и направление скорости ракеты относительно Луны оказались бы наиболее благоприятными (в указанном выше смысле) для возвращения на Землю.

§ 2. Об условиях существования симметричных орбит

В работе использована известная идея о симметричных траекториях, нашедшая свое применение в работах Копенгагенской школы при построении периодических орбит в задаче трех тел и примененная Г. А. Чеботаревым в задаче о ракетах (Чеботарев, 1956).

Пусть движение по орбите задается уравнениями $x=f(t)$, $y=\varphi(t)$. Будем говорить, что орбита симметрична, если

$$\begin{aligned} f(t) &= f(-t), \\ \varphi(t) &= -\varphi(-t). \end{aligned}$$

Из этого определения следует, что траектория движения симметрична относительно оси x , а голограф скоростей симметричен относительно оси y .

Потому достаточно построить только половину орбиты (соответствующую, например, $y > 0$ или $y < 0$). Кроме того, симметричные орбиты имеют еще и то преимущество, что начальные и конечные координаты и скорости симметричны в указанном выше смысле. Это создает известные удобства, так как при своем возвращении ракета снова коснется орбиты спутника, с которой она была запущена, и сможет перейти на эту орбиту с помощью такого же по величине толчка, с каким она запускалась для полета вокруг Луны.

Пусть движение ракеты определяется следующими дифференциальными уравнениями:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= F(x, y, t), \\ \frac{dy}{dt} &= \Phi(x, y, t). \end{aligned} \quad (2)$$

Можно доказать, что если правые части уравнений (2) обладают свойством

$$\begin{aligned} F(x, -y, -t) &= F(x, y, t), \\ \Phi(x, -y, -t) &= -\Phi(x, y, t) \end{aligned} \quad (3)$$

и если в начальный момент $\frac{dx}{dt} = y = 0$ (т. е. в начальный момент ракета находится на оси x , а скорость ее перпендикулярна оси x), то траектория будет симметричной. Доказательство.

Пусть $x = f(t)$ и $y = \varphi(t)$ (4)

частное решение уравнений (2).

В соответствии с этим имеем тождества

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= F[f(t), \varphi(t), t], \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \Phi[f(t), \varphi(t), t]. \end{aligned}$$

Возьмем две следующие функции $\xi = -f(-t)$ и $\eta = -\varphi(-t)$. Дифференцируя их дважды и принимая во внимание (3), получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} &= \frac{d^2f(-t)}{d(-t)^2} = F[f(-t), \varphi(-t), -t] = F[f(-t), -\varphi(-t), -t] = F(\xi, \eta, t), \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} &= \frac{d^2\varphi(-t)}{d(-t)^2} = -\Phi[f(-t), \varphi(-t), -t] = -\Phi[f(-t), -\varphi(-t), -t] = \Phi(\xi, \eta, t). \end{aligned}$$

Таким образом, ξ и η также являются решением уравнений (2).

Для того чтобы это решение совпало с решением (4), необходимо и достаточно в силу единственности решения системы дифференциальных уравнений (2), чтобы их начальные условия совпадали:

$$x_0 = \xi_0, \quad y_0 = \eta_0, \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = \left(\frac{d\xi}{dt}\right)_0, \quad \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = \left(\frac{d\eta}{dt}\right)_0. \quad (5)$$

При $t=0$ имеем

$$\begin{aligned} x_0 &= f(0), \quad y_0 = \varphi(0), \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = \left(\frac{df}{dt}\right)_0, \quad \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0, \\ \xi_0 &= f(0), \quad \eta_0 = -\varphi(0), \quad \left(\frac{d\xi}{dt}\right)_0 = -\left(\frac{df}{dt}\right)_0, \quad \left(\frac{d\eta}{dt}\right)_0 = \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0. \end{aligned} \quad (6)$$

В случае $y_0 = \varphi(0) = 0$ и $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = \left(\frac{df}{dt}\right)_0 = 0$ будет иметь место (5).

Но тогда $f(-t) \equiv f(t)$ и $\varphi(-t) \equiv -\varphi(t)$. Это означает симметрию кривой $x=f(t)$, $y=\varphi(t)$ относительно оси x .

§ 3. Особенности численного интегрирования дифференциальных уравнений задачи

При решении задачи вводим следующие упрощения:

- 1) рассматриваем движение ракеты под действием сил притяжения Земли, Луны и Солнца, пренебрегая возмущениями других тел Солнечной системы;
- 2) движение Луны и годичное движение Солнца рассматриваем в одной плоскости;
- 3) считаем движения Луны и Солнца круговыми;
- 4) массой ракеты пренебрегаем.

Систему координат выбираем следующим образом.

Начало помещаем в центр Земли. Оси сохраняют постоянное направление относительно неподвижных звезд.

Ось x направлена в начальное положение центра Солнца. Ось y составляет угол $+\frac{\pi}{2}$ с осью x .

В нашей системе движения Луны и Солнца будут описываться уравнениями

$$\begin{aligned} x_L &= a' \cos(\vartheta_0 - n't), & x_S &= a'' \cos n''t, \\ y_L &= -a' \sin(\vartheta_0 - n't), & y_S &= a'' \sin n''t, \end{aligned} \quad (7)$$

где a' и a'' — средние расстояния до Луны и Солнца; n' и n'' — соответствующие средние движения; ϑ_0 — угловое расстояние Луны от оси x в момент $t=0$.

Дифференциальные уравнения относительного движения ракеты записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -k^2 m_L \frac{x}{r_L^3} + k^2 m_L \left(\frac{x_L - x}{\Delta_{LL}^3} - \frac{x_L}{r_L^3} \right) + k^2 m_S \left(\frac{x_S - x}{\Delta_{SS}^3} - \frac{x_S}{r_S^3} \right), \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -k^2 m_L \frac{y}{r_L^3} + k^2 m_L \left(\frac{y_L - y}{\Delta_{LL}^3} - \frac{y_L}{r_L^3} \right) + k^2 m_S \left(\frac{y_S - y}{\Delta_{SS}^3} - \frac{y_S}{r_S^3} \right), \end{aligned}$$

где x, y, x_L, y_L, x_S, y_S — декартовы координаты ракеты, Луны и Солнца,

$$\Delta_{LL}^2 = (x - x_L)^2 + (y - y_L)^2,$$

$$\Delta_{SS}^2 = (x - x_S)^2 + (y - y_S)^2,$$

$$r^2 = x^2 + y^2,$$

k^2 — постоянная тяготения; m_L, m_S — массы Земли, Луны и Солнца.

Учитывая (7), имеем

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2 m_L \frac{x}{r_L^3} - k^2 m_L \left[\frac{\cos(\vartheta_0 - n't)}{a'^3} + \frac{x - a' \cos(\vartheta_0 - n't)}{\Delta_{LL}^3} \right] - k^2 m_S \left[\frac{\cos n''t}{a''^3} + \frac{x - a'' \cos n''t}{\Delta_{SS}^3} \right],$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -k^2 m_r \frac{y}{r^3} - k^2 m_L \left[\frac{-\sin(\vartheta_0 - n't)}{a'^2} + \frac{y + a' \sin(\vartheta_0 - n't)}{\Delta_{RL}^3} \right] -$$

$$- k^2 m_s \left[\frac{\sin n't}{a'^2} + \frac{y - a' \cos n't}{\Delta_{RS}^3} \right],$$

где

$$\Delta_{RL}^2 = [x - a' \cos(\vartheta_0 - n't)]^2 + [y + a' \sin(\vartheta_0 - n't)]^2,$$

$$\Delta_{RS}^2 = [x - a' \cos n't]^2 + [y - a' \sin n't]^2,$$

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

При переносе начала координат в центр Луны с сохранением направления осей координат уравнения относительного движения принимают вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2 m_r \frac{x}{r^3} - k^2 m_L \left[\frac{x + a' \cos(\vartheta_0 - n't)}{\Delta_{RL}^3} - \frac{\cos(\vartheta_0 - n't)}{a'^2} \right] -$$

$$- k^2 m_s \frac{\cos(\vartheta_0 - n't)}{a'^2} - k^2 m_s \left[\frac{x + a' \cos(\vartheta_0 - n't) - a' \cos n't}{\Delta_{RS}^3} + \frac{\cos n't}{a'^2} \right],$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -k^2 m_r \frac{y}{r^3} - k^2 m_L \left[\frac{y - a' \sin(\vartheta_0 - n't)}{\Delta_{RL}^3} + \frac{\sin(\vartheta_0 - n't)}{a'^2} \right] +$$

$$+ k^2 m_s \frac{\sin(\vartheta_0 - n't)}{a'^2} - k^2 m_s \left[\frac{y - a' \sin(\vartheta_0 - n't) - a' \sin n't}{\Delta_{RS}^3} + \frac{\sin n't}{a'^2} \right],$$

(8)

где x, y — координаты ракеты относительно Луны,

$$\Delta_{RL}^2 = [x + a' \cos(\vartheta_0 - n't)]^2 + [y - a' \sin(\vartheta_0 - n't)]^2,$$

$$\Delta_{RS}^2 = [x + a' \cos(\vartheta_0 - n't) - a' \cos n't]^2 + [y - a' \sin(\vartheta_0 - n't) - a' \sin n't]^2,$$

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

Формулами (8) пользуемся, когда влияние Луны становится преобладающим. При численном интегрировании приведенных выше уравнений пользуемся следующими формулами метода квадратур, соответствующего методу Коулла (Субботин, 1937):

$$x_n = f_n^2 + \frac{1}{12} f_n - \frac{1}{240} f_n^2 + \frac{31}{60480} f_n^3 - \dots,$$

$$f_n^2 = x_0 - \frac{1}{12} f_0 + \frac{1}{240} f_0^2 - \frac{31}{60480} f_0^3 + \dots,$$

$$f_{-n}^2 = \omega x_0 - \frac{1}{12} f_0 + \frac{1}{240} f_0^2 - \frac{11}{720} f_0^3 + \dots,$$

где ω — шаг интегрирования.

Формулы для y_n аналогичны.

При интегрировании уравнений движения ракеты вблизи Луны вводим подстановку Сундмана (Sundman, 1913)

$$dt = r du, \quad (9)$$

где u — новая независимая переменная интегрирования вместо t .

Эта подстановка значительно облегчает вычисления.

556

В формулах (8) члены $k^2 m_L \frac{x}{r^3}$, $k^2 m_L \frac{y}{r^3}$ сильно возрастают с убыванием r , что для сохранения точности потребует частого уменьшения шага.

С заменой независимой переменной по формуле (9) будем иметь уравнения:

$$\frac{d^2x}{du^2} = \frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{du} \cdot \frac{dx}{du} - k^2 m_L \left(\frac{x}{r} \right) - r^2 \frac{\partial R}{\partial x},$$

$$\frac{d^2y}{du^2} = \frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{du} \cdot \frac{dy}{du} - k^2 m_L \left(\frac{y}{r} \right) - r^2 \frac{\partial R}{\partial y},$$

где

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{d^2x}{dt^2} + k^2 m_L \frac{x}{r^3},$$

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{d^2y}{dt^2} + k^2 m_L \frac{y}{r^3}. \quad (10)$$

В области тесного сближения с Луной влияние последней настолько сильно по сравнению с действием Земли и Солнца, что для приближенной оценки правых частей можно пользоваться формулами невозмущенного движения.

Оценим каждый член в правой части (10).

Члены $r^2 \frac{\partial R}{\partial x}$, $r^2 \frac{\partial R}{\partial y}$ уменьшаются по мере приближения к Луне. Члены $k^2 m_L \left(\frac{x}{r} \right)$ и $k^2 m_L \left(\frac{y}{r} \right)$ ограничены. Оценим выражения $\frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{du} \cdot \frac{dx}{du}$ и $\frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{du} \cdot \frac{dy}{du}$.

Из уравнения Кеплера имеем

$$(1 - e \cos E) dE = ndt,$$

$$rdE = nadu.$$

Сравнивая последнее равенство с (9), получаем $du = \frac{dE}{na}$. Но $\frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{dE} \cdot \frac{dx}{dE}$ и $\frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{dE} \cdot \frac{dy}{dE}$ ограничены. Действительно

$$\frac{dx}{dE} = -a \sin E, \quad \frac{dy}{dE} = a \sqrt{1 - e^2} \cos E, \quad \frac{dr}{dE} = ae \sin E,$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{dE} \cdot \frac{dx}{dE} = \frac{ae \sin^2 E}{1 - e \cos E} = \frac{ae \sin E}{\sqrt{1 - e^2}} \sin E,$$

где $\left| \frac{y}{r} \right| < 1$, $|\sin E| < 1$.

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{dE} \cdot \frac{dy}{dE} = \frac{ae \sqrt{1 - e^2} \cos E \sin E}{1 - e \cos E} = \frac{ae \sin E}{\sqrt{1 - e^2}} \cos E,$$

где $\left| \frac{x}{r} \right| < 1$, $|\cos E| < 1$.

Видим, что после замены независимой переменной $\frac{d^2x}{du^2}$ и $\frac{d^2y}{du^2}$ становятся ограниченными и

$$\frac{d^2x}{du^2} \approx \frac{ae \sin E}{\sqrt{1 - e^2}} \sin E,$$

$$\frac{d^2y}{du^2} \approx \frac{ae}{\sqrt{1 - e^2}} y \cos E.$$

57

Преобразуем теперь уравнения (10). Выразим $\frac{dx}{du}$ через $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{du}$ через $\frac{dy}{dt}$, x , y , t . Будем иметь

$$\begin{aligned}\frac{dx}{du} &= \frac{x}{r^2} \left(\frac{dx}{du} \right)^2 + \frac{y}{r^2} \frac{dx}{du} \cdot \frac{dy}{du} + r^2 \frac{d^2x}{dt^2}, \\ \frac{dy}{du} &= \frac{y}{r^2} \left(\frac{dy}{du} \right)^2 + \frac{x}{r^2} \frac{dy}{du} \cdot \frac{dx}{du} + r^2 \frac{d^2y}{dt^2}.\end{aligned}\quad (11)$$

Правые части уравнений (11) теперь содержат первые производные. Поэтому для численного интегрирования формула Коулла для непосредственного употребления теперь не годится. Сведя нашу систему двух уравнений к системе четырех уравнений 1-го порядка, мы можем воспользоваться затем соответствующей формулой квадратур. Но мы поступим несколько иначе, а именно: оставим в силе формулу Коулла, причем входящие в правую часть первые производные выразим через разности.

Будем иметь

$$\omega \left(\frac{dx}{du} \right)_n = f_n - \frac{1}{12} f'_n + \frac{11}{720} f''_n - \frac{191}{60480} f'''_n + \dots = (),$$

$$\omega \left(\frac{dy}{du} \right)_n = g_n - \frac{1}{12} g'_n + \frac{11}{720} g''_n - \frac{191}{60480} g'''_n + \dots = (),$$

$$f_n = \omega^2 \left[\frac{x}{r^2} \left(\frac{dx}{du} \right)_n^2 + \frac{y}{r^2} \left(\frac{dy}{du} \right)_n \left(\frac{dx}{du} \right)_n + r^2 \frac{d^2x}{dt^2} \right],$$

$$g_n = \omega^2 \left[\frac{y}{r^2} \left(\frac{dy}{du} \right)_n^2 + \frac{x}{r^2} \left(\frac{dx}{du} \right)_n \left(\frac{dy}{du} \right)_n + r^2 \frac{d^2y}{dt^2} \right],$$

$$f'_n = \omega^2 \left(\frac{d^2x}{du^2} \right)_n,$$

$$g'_n = \omega^2 \left(\frac{d^2y}{du^2} \right)_n.$$

Начальные значения $\left(\frac{dx}{du} \right)_0$, $\left(\frac{dy}{du} \right)_0$, $\left(\frac{d^2x}{du^2} \right)_0$, $\left(\frac{d^2y}{du^2} \right)_0$, $\left(\frac{dx}{dt} \right)_0$, $\left(\frac{dy}{dt} \right)_0$, x_0 , y_0 , t_0 , взятые из таблиц численного интегрирования по переменной t .

При интегрировании уравнений (11) несколько значений $r^2 \frac{d^2x}{dt^2}$ и $r^2 \frac{d^2y}{dt^2}$ были проинтерполированы для новых значений времени, соответствующих равным интервалам переменной u . При этом была использована формула Ньютона для неравных промежутков аргумента (Уиттекер и Робинсон, 1935). Если известны значения функций $f(u_0)$, $f(u_1)$, $f(u_2)$, ..., $f(u_n)$ и разделение разности k -го порядка исчезает или незначительно, то значение функции $f(u)$ для некоторого промежуточного значения аргумента u может быть найдено по формуле

$$\begin{aligned}f(u) &= f(u_0) + (u - u_0)f(u_1) + (u - u_0)(u - u_1)f(u_2) + \dots + \\ &+ (u - u_0)(u - u_1)(u - u_2)f(u_3) + \dots + \\ &+ (u - u_0)(u - u_1) \dots (u - u_{n-1})f(u_n),\end{aligned}$$

где $f(u_0)$, $f(u_1)$, $f(u_2)$, ... — разделение разности. В нашем случае известны четыре значения аргумента, и разделение разности 4-го порядка равно 0.

§ 4. Исходная орбита

За единицы измерения приняты: экваториальный радиус Земли, равный 6378 км, сутки и масса Земли.

Приняты следующие значения астрономических постоянных: средний радиус Лунной орбиты $a' = 60.270$ радиусов Земли; средний радиус Солнечной орбиты $a'' = 23440$ радиусов Земли; масса Луны $m_L = 0.012265$ массы Земли; радиус Луны $R_L = 1738$ км; среднее движение Луны $n' = 13.17643$; среднее движение Солнца $n'' = 0.98561$.

Ракета запускается с искусственного спутника, период обращения которого равен $P_{ис.} = 2^h$, или 0.083333 суток. Радиус орбиты спутника соответственно равен $R_{ис.} = 1.2673$ радиусов Земли (8083 км). Минимальное расстояние ракеты от центра Земли тоже будет равно $r_1 = 1.2673$. Максимальное расстояние от центра Земли принимаем

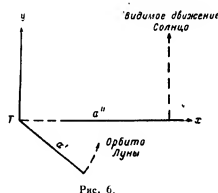


Рис. 6.

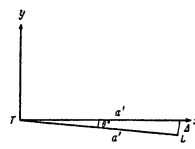


Рис. 7.

равным $r_2 = a' + 0.3136$ (0.3136 составляет 2000 км, а минимальное расстояние от поверхности Луны составляет около 200 км).

Имеем $r_2 = 60.5836$, $r_1 = 1.2673$.

По формуле (1) получим элементы эллиптической орбиты — большую полуось a , эксцентриситет e , период P :

$$a = 30.9259, \quad e = 0.95902, \quad P = 10.2071.$$

Начальная скорость ракеты v_0 равна эллиптической скорости на расстоянии $r_1 = 1.2673$, а именно: $v_0 = 133.70$. Направления движения Луны и Солнца показаны на рис. 6.

Из двух возможных направлений начальной скорости $v_0 = + \left(\frac{dy}{dt} \right)_0$ и $v_0 = - \left(\frac{dy}{dt} \right)_0$ выбираем первое.

Определим угол ϕ_0 , который составляет радиус-вектор Луны с осью x в начальный момент. На рис. 7 угол $\phi_0 = \angle RTL$ — угол, который составляет направление на Луну с осью x в тот момент, когда ракета пересекает ось x . Пусть Δ есть радиус сферы действия Луны. Он может быть определен соотношением

$$\frac{k^2 m_L}{(TR)^2} = \frac{k^2 m_L}{\Delta^2} \quad (12)$$

(условие равенства ускорений, создаваемых протяжением Земли и Луны).

¹ Проект Брауна (Haskins, 1953).

Преобразуем теперь уравнения (10). Выразим $\frac{dx}{du}$ через $\frac{dx}{du}$, $\frac{dy}{du}$, x , y , r . Будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{dx}{du} &= \frac{x}{r^2} \left(\frac{dx}{du} \right)^2 + \frac{y}{r^2} \cdot \frac{dx}{du} \cdot \frac{dy}{du} + r^2 \frac{d^2x}{du^2}, \\ \frac{dy}{du} &= \frac{y}{r^2} \left(\frac{dy}{du} \right)^2 + \frac{x}{r^2} \cdot \frac{dy}{du} \cdot \frac{dx}{du} + r^2 \frac{d^2y}{du^2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Правые части уравнений (11) теперь содержат первые производные. Поэтому для численного интегрирования формула Коуэлла для непосредственного употребления теперь не годится. Сведя нашу систему двух уравнений к системе четырех уравнений 1-го порядка, мы можем воспользоваться затем соответствующей формулой Коуэлла. Но мы поступим несколько иначе, а именно: оставим в силе формулу Коуэлла, причем входящие в правую часть первые производные выразим через разности.

Будем иметь

$$\omega \left(\frac{dx}{du} \right)_n = f_n^{(1)} - \frac{1}{12} f_n^{(2)} + \frac{11}{720} f_n^{(3)} - \frac{191}{60480} f_n^{(4)} + \dots, \quad (12)$$

$$\omega \left(\frac{dy}{du} \right)_n = g_n^{(1)} - \frac{1}{12} g_n^{(2)} + \frac{11}{720} g_n^{(3)} - \frac{191}{60480} g_n^{(4)} + \dots, \quad (13)$$

$$f_n = \omega^2 \left[\frac{x}{r^2} \left(\frac{dx}{du} \right)^2 + \frac{y}{r^2} \left(\frac{dx}{du} \right) \left(\frac{dy}{du} \right) + r^2 \frac{d^2x}{du^2} \right],$$

$$g_n = \omega^2 \left[\frac{y}{r^2} \left(\frac{dy}{du} \right)^2 + \frac{x}{r^2} \left(\frac{dy}{du} \right) \left(\frac{dx}{du} \right) + r^2 \frac{d^2y}{du^2} \right],$$

$$f_n = \omega^2 \left(\frac{d^2x}{du^2} \right)_n,$$

$$g_n = \omega^2 \left(\frac{d^2y}{du^2} \right)_n.$$

Начальные значения $\left(\frac{d^2x}{du^2} \right)_0$, $\left(\frac{d^2y}{du^2} \right)_0$, $\left(\frac{dx}{du} \right)_0$, $\left(\frac{dy}{du} \right)_0$ были вычислены по $\left(\frac{d^2x}{du^2} \right)_0$, $\left(\frac{d^2y}{du^2} \right)_0$, $\left(\frac{dx}{du} \right)_0$, $\left(\frac{dy}{du} \right)_0$, x_0 , y_0 , r_0 , взятым из таблицы численного интегрирования по переменной u .

При интегрировании уравнений (11) несколько значений $r^2 \frac{d^2x}{du^2}$ и $r^2 \frac{d^2y}{du^2}$ были проинтерполированы для новых значений времени, соответствующих равным интервалам переменной u . При этом была использована формула Ньютона для неравных промежутков аргумента (Уиттекер и Робинсон, 1935). Если известны значения функций $f(u_0)$, $f(u_1)$, $f(u_2)$, $f(u_3)$, и разделение разности k -го порядка исчезающе малое, то значение функции $f(u)$ для некоторого промежуточного значения аргумента u может быть найдено по формуле

$$\begin{aligned} f(u) &= f(u_0) + (u - u_0)f(u_0, u_1) + (u - u_0)(u - u_1)f(u_0, u_1, u_2) + \\ &+ (u - u_0)(u - u_1)(u - u_2)f(u_0, u_1, u_2, u_3) + \dots + \\ &+ (u - u_0)(u - u_1) \dots (u - u_{k-1})f(u_0, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}), \end{aligned}$$

где $f(u_0)$, $f(u_1)$, $f(u_2)$, $f(u_3)$, \dots — разделение разности. В нашем случае известны четыре значения аргумента, и разделение разности 4-го порядка равно 0.

§ 4. Исходная орбита

За единицы измерения приняты: экваториальный радиус Земли, равный 6378 км, сутки и масса Земли.

Приняты следующие значения астрономических постоянных: средний радиус Луной орбиты $a' = 60.270$ радиусов Земли; средний радиус Солнечной орбиты $a'' = 23440$ радиусов Земли; масса Луны $m_l = 0.012265$ масс Земли; радиус Луны $R_l = 1738$ км; среднее движение Луны $n' = 13.17643$; среднее движение Солнца $n'' = 0.98561$.

Ракета запускается с искусственного спутника, период обращения которого равен $P_{сп.} = 2^h$, или 0.083333 суток. Радиус орбиты спутника соответственно равен $P_{сп.} = 1.2673$ радиусов Земли (8083 км). Минимальное расстояние ракеты от центра Земли тоже будет равно $r_1 = 1.2673$. Максимальное расстояние от центра Земли принимаем

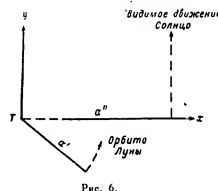


Рис. 6.

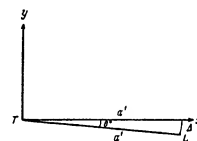


Рис. 7.

равным $r_2 = a' + 0.3136$ (0.3136 составляет 2000 км, а минимальное расстояние от поверхности Луны составляет около 200 км).

Имеем $r_2 = 60.5836$, $r_1 = 1.2673$.

По формуле (1) получим элементы эллиптической орбиты — большую полуось a , эксцентриситет e , период P :

$$a = 30.9259, \quad e = 0.95902, \quad P = 10.2071.$$

Начальная скорость ракеты v_0 равна эллиптической скорости на расстоянии $r_1 = 1.2673$, а именно: $v_0 = 133.70$. Направления движения Луны и Солнца показаны на рис. 6.

Из двух возможных направлений начальной скорости $v_0 = +\left(\frac{dy}{dt}\right)_0$ и $v_0' = -\left(\frac{dy}{dt}\right)_0$ выбираем первое.

Определим угол θ_0 , который составляет радиус-вектор Луны с осью x в начальный момент. На рис. 7 угол $\theta_0 = \angle RTL$ — угол, который составляет направление на Луну с осью x в тот момент, когда ракета пересекет ось x . Пусть Δ есть радиус сферы действия Луны. Он может быть определен соотношением

$$\frac{k^2 m_l}{(TR)^2} = \frac{k^2 m_l}{\Delta^2} \quad (12)$$

(условие равенства ускорений, создаваемых притяжением Земли и Луны).

¹ Проект Брауна (Haskins, 1953).

Возьмем $TR \approx a'$. Тогда соотношение (12) позволит определить Δ и из равнобедренного треугольника TRL — угол θ_0 . Будем иметь

$$\frac{km_p}{a^3} = \frac{km_s}{\Delta^3},$$

откуда $\Delta = 6.6747$, $\angle \theta_0 = 6.3486$.

Угол θ_0 возьмем равным $\theta_0 = n' \frac{P}{2} + \theta_0$, где $\frac{P}{2} = 5.1035$ — полупериод эллиптической орбиты.

Исходную орбиту, таким образом, строим с начальными условиями:

$$x_0 = 1.2673, \quad y_0 = 0, \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = 133.70, \quad \theta_0 = 73.5952.$$

Вычисления ведутся с четырьмя десятичными знаками. Шаг выбираем так, чтобы четвертыми разностями можно было пренебречь. На разных участках интегрирования шаг меняется от $\omega_0 = 0.001$ до $\omega = 0.128$. Всего было сделано около 200 шагов.

Общий вид исходной орбиты показан на рис. 8. Отметим, что вблизи Луны ракета движется относительно Луны по гиперболе, большая полуось которой имеет небольшой наклон к оси x . Элементы гиперболы: $a = 0.5276$, $e = 2.8116$. Ракета проходит на минимальном расстоянии от Луны, равном 0.9574 (6100 км). Оно соответствует моменту $t = 5.4628$. Вблизи Луны скорость ракеты относительно Земли остается эллиптической, порядка скорости Луны (около 1.1 км). Элементы оскулирующей орбиты ракеты в конечный момент $t = 7.23304$ следующие: $a = 47.8698$, $e = 0.9918$. Ракета обязательно достигнет поверхности Земли, так как $a(1-e) = 0.3920$. Скорость ракеты на поверхности Земли будет составлять около 11.169 км/сек.

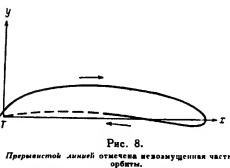


Рис. 8.

Примерный вид исходной эллиптической части орбиты.

§ 5. Метод графического интегрирования

Как было сказано во введении, наша задача состоит в выяснении качественной картины движения ракеты. Но так как не существует теории, с помощью которой можно было бы решить эту задачу в общем виде, то остается другой путь, а именно: исследование качественной картины движения на основании построения достаточно большого числа примеров орбит.

При решении дифференциальных уравнений возмущенного движения пользуются, как правило, методом численного интегрирования. Но, как известно, численное интегрирование — процесс трудоемкий. В некоторых задачах для сохранения точности в процессе интегрирования приходится менять шаг. При этом необходимое число шагов может стать очень большим.

При численном интегрировании исходной орбиты нам пришлось сделать около 200 шагов, причем шаг менялся более 10 раз. Однако цель данной работы не требует высокой точности. Мы постараемся найти метод, который кратчайшим путем повел бы к нашей цели — получению геометрической картины распределения интегральных кривых. Таким методом является графическое интегрирование. Сущность его состоит в следующем.

1. Как известно, при численном интегрировании дифференциальных уравнений, мы разбиваем траекторию движения на малые участки. При этом шаг интегрирования мы выбираем таким образом, чтобы при данной точности разности определенного порядка были бы постоянными. В результате интегрирования получаем линию, которая с уменьшением шага приближается к действительной траектории движения.

В частности, если мы примем разности 1-го порядка равными нулю, то это значит, что на малом промежутке Δt , равном шагу интегрирования, мы считаем ускорение постоянным.

2. Введем в рассмотрение вектор ускорения \vec{w} , вектор изменения скорости $\Delta \vec{v}$, вектор скорости \vec{v} , вектор перемещения $\Delta \vec{S}$. Так как на графике можно изображать направления, то мы сможем строить эти вектора, откладывая в определенном масштабе их численные величины. При этом для каждого вектора \vec{r} , \vec{v} масштаб может быть своим.

Тогда вместо двух дифференциальных уравнений движения

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}(x, y, t), \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\Phi}(x, y, t)$$

мы можем интегрировать одно уравнение движения в векторной форме

$$\vec{w} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}(\vec{r}, t),$$

где \vec{r} — радиус-вектор ракеты.

Отсюда становится ясной последовательность операций, необходимых для графического метода:

- 1) пусть для некоторого момента t_i известны вектора \vec{w}_i , \vec{v}_i ;
- 2) определяем изменение скорости $\Delta \vec{v}_i$ за малый промежуток времени Δt , на котором считаем постоянным. Будем иметь $\Delta \vec{v}_i = \vec{w}_i \Delta t$;
- 3) скорость в момент времени $t_i + \Delta t = t_{i+1}$ составит $\vec{v}_{i+1} = \vec{v}_i + \Delta \vec{v}_i$;
- 4) вектор перемещения $\Delta \vec{S}_i$, соответствующий промежутку времени Δt_i , будет равен $\Delta \vec{S}_i \approx \vec{v}_{i+1} \Delta t_i$;

5) в момент $t_{i+1} = t_i + \Delta t_i$ радиус-вектор \vec{r}_{i+1} будет равен $\vec{r}_{i+1} = \vec{r}_i + \Delta \vec{S}_i$.

Далее все операции повторяются сначала в той же последовательности, т. е. по \vec{r}_{i+1} находим \vec{w}_{i+1} , затем находим $\Delta \vec{v}_{i+1}$, \vec{v}_{i+2} , $\Delta \vec{S}_{i+1}$ и т. д.

В нашем случае $\vec{w} = \vec{F} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2$, где: $\vec{w}_1 = -\frac{A_1}{r^3} \vec{r}$; $\vec{w}_2 = -\frac{A_2}{\Delta^3} \vec{\Delta}$; A_1 , A_2 — константы; r , Δ — расстояния ракеты соответственно до центра Земли и до центра Луны, \vec{r}_0 , $\vec{\Delta}^0$ — соответствующие орты, показывающие, в каком направлении надо откладывать на графике отрезки $\frac{A_1}{r^3}$ и $\frac{A_2}{\Delta^3}$.

Таким образом, мы видим, что при графическом интегрировании количество работы значительно уменьшается: во-первых, за счет того, что фактически мы имеем дело не с двумя, а с одним (векторным) уравнением. Кроме того, вместо вычисления выражений типа $\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$ нам нужно только измерить на чертеже r , r_1 , ... и вычислить r^{-3} , r_1^{-3} , ...

Графический метод используется нами при построении симметричных траекторий ракеты. Он дает готовую качественную картину, наглядное представление о характере траекторий в отдельности и в зависимости от начальных условий движения и картину всего семейства в целом.

Точность результата при интегрировании графическим методом зависит как от числа шагов, так и от выбора масштаба. Для одного и того же числа шагов можно подобрать такой масштаб, что точность результата будет удовлетворительной.

Для выяснения точности графического метода мы построили «орбиту сравнения», а именно: мы проинтегрировали графическим методом часть исходной орбиты, заключенную в сфере действия Луны с тем же шагом, что и при численном интегрировании исходной орбиты.

При этом был выбран следующий масштаб: для расстояний в 1 см — 0.2 радиусов Земли, для скоростей в 1 см — 0.5 радиус Земли/сутки, для ускорений в 1 см — 0.5 радиус Земли/сутки².

В табл. 1 даны координаты орбиты сравнения параллельно с координатами, полученными численным интегрированием. Графическое интегрирование орбиты сравнения велось с точностью до двух десятичных знаков (напомним, что при численном интегрировании точность равнялась четырем десятичным знакам).

Таблица 1

| t | Координаты, полученные численным интегрированием | | Координаты, полученные графическим интегрированием | |
|---------|--|---------|--|-------|
| | x | y | x | y |
| 5.67304 | 58.3664 | -2.4192 | 58.37 | -2.42 |
| 5.71304 | 57.8334 | -2.3793 | 57.83 | -2.38 |
| 5.75304 | 57.2988 | -2.3308 | 57.30 | -2.32 |
| 5.79304 | 56.7636 | -2.2756 | 56.77 | -2.25 |
| 5.83304 | 56.2256 | -2.2149 | 56.24 | -2.18 |
| 5.87304 | 55.6848 | -2.1504 | 55.70 | -2.10 |
| 5.91304 | 55.1402 | -2.0826 | 55.16 | -2.03 |
| 5.95304 | 54.5914 | -2.0118 | 54.62 | -1.96 |
| 6.03304 | 53.4802 | -1.8632 | 53.50 | -1.78 |
| 6.11304 | 52.3404 | -1.7068 | 52.37 | -1.60 |
| 6.19304 | 51.1937 | -1.5447 | 51.22 | -1.42 |
| 6.27304 | 50.0143 | -1.3775 | 50.06 | -1.22 |
| 6.35304 | 47.5731 | -1.0314 | 47.67 | -0.87 |
| 6.43304 | 45.0091 | -0.6736 | 45.10 | -0.50 |
| 6.51304 | 42.3043 | -0.3070 | 42.38 | -0.20 |
| 6.59304 | 39.4254 | 0.0658 | 39.46 | 0.00 |
| 7.07304 | 36.3850 | 0.4428 | 36.35 | 0.58 |
| 7.23304 | 33.1096 | 0.8201 | 33.04 | 0.90 |

При построении орбиты сравнения ошибка для минимального расстояния от центра Земли $r_1 = a(1 - e)$ составила 0.04 единицы измерения, т. е. около 240 км, ошибка в скорости $v_1^2 = k^2 m_1 (2 - \frac{1}{a})$ — около 0.005 км/сек., где v_1 — скорость ракеты на поверхности Земли.

Такой результат можно считать для наших целей удовлетворительным.

§ 6. Графическое построение симметричных орбит

Будем строить описанным выше графическим методом симметричные траектории движения ракеты.

Определим неподвижную систему координат следующим образом. Начало поместим в центр Земли. Ось x направим в точку, которую занимает центр Луны в начальный момент движения ракеты. Покажем, что при таком выборе системы координат правые части дифференциальных уравнений движения будут удовлетворять первому условию симметрии траекторий [§ 2, формулы (3)].

Действительно, в нашем случае дифференциальные уравнения движения ракеты относительно Земли имеют вид

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = F(x, y, t) = -k^2 m_L \left[\frac{x - a' \cos n' t}{\Delta_{LZ}^3} + \frac{\cos n' t}{a'^3} \right] - k^2 m_T \frac{x}{r^3},$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \Phi(x, y, t) = -k^2 m_L \left[\frac{y - a' \sin n' t}{\Delta_{LZ}^3} + \frac{\sin n' t}{a'^3} \right] - k^2 m_T \frac{y}{r^3},$$

где $\Delta_{LZ}^2 = (x - a' \cos n' t)^2 + (y - a' \sin n' t)^2$ (притяжением Солнца пренебрежем).

Видим, что при замене t на $-t$ и y на $-y$ будет выполняться условие (3). Тогда для симметрии траектории ракеты должно выполняться еще второе условие — относительно начальных координат и скоростей. Поэтому возьмем в начальный момент $(\frac{dx}{dt})_0 = y_0 = 0$.

Построим несколько траекторий, проходящих на одном и том же минимальном расстоянии от центра Луны, равном $\Delta_0 = 1$ радиусу Земли (6378 км), которое в то же время равно минимальному расстоянию от центра Луны для исходной орбиты. Тогда в начальный момент будем иметь $x_0 = a' - 1 - \Delta_0$.

При интегрировании исходной орбиты оказалось, что на минимальном расстоянии от центра Луны, равном 1 радиусу Земли, скорость ракеты направлена под тупым углом к скорости Луны, что подтверждает рассуждения, приведенные в § 1 относительно условий, благоприятствующих возвращению ракеты на Землю.

Поэтому при построении симметричных траекторий мы будем выбирать начальные скорости ракеты $v_{0x} = |y_0|$ направленными противоположно скорости Луны, т. е. $y_{0x} < 0$ (рис. 9), но разными по величине. Строим пять симметричных траекторий со скоростями v_{0x} , равными в наших единицах $v_{0x} = 3 (= 0.222 \text{ км/сек.})$, $v_{0x} = 6 (= 0.444 \text{ км/сек.})$, $v_{0x} = 7.5 (= 0.554 \text{ км/сек.})$, $v_{0x} = 9 (= 0.666 \text{ км/сек.})$, $v_{0x} = 10.5 (= 0.775 \text{ км/сек.})$.

Построение выполняем в таком же масштабе, с той же точностью, приблизительно с тем же (немного меньшим) числом шагов, что и в орбите сравнения. Поэтому можно ожидать, что ошибки построенных орбит будут близки к ошибкам орбиты сравнения.

Построение исходной орбиты показало, что в непосредственной близости от Луны шаг интегрирования $\omega = 0.01$ является достаточным малым. Тем более этот шаг будет удовлетворительным при менее точном графическом методе интегрирования, где точность ограничивается двумя десятичными знаками (при численном интегрировании — четырьмя десятичными знаками).

Построение осуществляется по принципу, изложенному в § 5 (см. графики 1—5). Интегрирование ведется до того момента, когда движение ракеты становится невозможным относительно Земли.

В табл. 2 помещены основные характеристики симметричных траекторий, при этом введены следующие обозначения: v_0 — начальная скорость ракеты, соответствующая минимальному расстоянию от центра Луны, равному 1 радиусу Земли (6378 км); v_1 — скорость ракеты в момент $t = 0.84$, когда притяжение Луны становится незначительным; a, e — большая полуось и эксцентриситет, соответствующие этому моменту; r_1 — минимальное расстояние от центра Земли; v_2 — скорость ракеты на этом расстоянии; Δ_0 — минимальное расстояние от поверхности Земли; v_{0z} — соответствующая скорость.

Из полученных результатов можно заключить, что в промежутке от $v_0 = 6$ до $v_0 = 10.5$ находится множество орбит, для которых наибольшее минимальное расстояние от поверхности Земли составляет 10 000 км, а минимальное расстояние от центра Луны составляет 6378 км (радиус Земли). Все орбиты со скоростями от $v_0 = 3$ до $v_0 = 7.5$ образуют петлю, а именно: кривая пересекает сама себя в двух точках по разные стороны от Земли. С увеличением скорости v_0 точки самопересечения орбит приближаются к Земле. Наконец, некоторой скорости v_0 , заключенной в интервале $7.5 < v_0 < 9$, будет соответствовать орбита, для которой обе точки самопересечения сливаются в одну, совпадающую с центром Земли. (Соответствующая невозможная орбита является вырожденным эллипсом с $e = 1$, т. е. прямой линией).

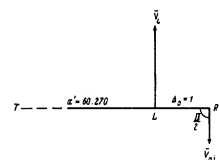


Рис. 9.



Рис. 10.

Таблица 2

| № орбит | Единицы: радиус Земли, сутки | | | | | r_0 (в км) | v_0 (в км/сек.) | v_{Δ} (в км/сек.) | Тип |
|---------|------------------------------|------------|--------|--------|--------|-----------------|----------------------|-----------------------------|-----|
| | α_0 | α_1 | a | c | r_1 | | | | |
| 1 | 3 | 13,45 | 48,100 | 0,9115 | 4,2568 | 21000 | 5,52 | — | II |
| 2 | 6 | 10,12 | 35,912 | 0,9236 | 2,7432 | 10000 | 6,48 | — | II |
| 3 | 7,5 | 9,27 | 34,423 | 0,9333 | 0,5701 | — | — | 11,147 | II |
| 4 | 9 | 8,70 | 33,647 | 0,9418 | 0,2759 | — | — | 11,537 | I |
| 5 | 10,5 | 8,30 | 34,037 | 0,9510 | 1,6678 | 4000 | 8,59 | — | I |

Орбиты со скоростями $v_0=9'$ и $v_0=10,5$ пересекают сами себя в одной точке, причем Земля оказывается в замкнутой части траектории.

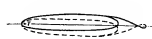


Рис. 11.



Рис. 12.

На рис. 10 изображены полуэллиптические орбиты симметричных орбит. Стрелками ограничена часть траектории, пройденная графическим интегрированием.

На рис. 11 изображена траектория типа II, на рис. 12 — траектория типа I. Симметричные полуэллиптические орбиты изображены прерывистой линией.

Выводы

Учитывая, что при построении симметричных траекторий минимальное расстояние ракеты от Луны взято малым, но произвольным, и обобщая результаты построения, мы можем сделать следующие выводы.

1. Возможно построение симметричной орбиты без дополнительного импульса, проходящих на любом малом расстоянии от Луны, как касающихся поверхности Земли, так и проходящих вблизи ее поверхности.

2. Построение симметричных траекторий зависит от двух существенных параметров: от скорости ракеты в сфере действия Луны v_0 и от минимального расстояния ракеты от центра Луны r_0 . Рассмотрим каждую из этих зависимостей.

а) Фиксируем r_0 (в нашем случае $r_0=1$ радиусу Земли). Полагая, что при $v_0 \leq 3$ ракета будет настолько слабо увлекаться притяжением Луны, что возвращение на Землю станет невозможным. Очевидно, тот же результат получится и при $v_0 \geq 10,5$, так как при этом скорость ракеты относительно Земли будет приближаться к гиперболической.

б) Фиксируем v_0 таким образом, чтобы при $r_0=1$ радиусу Земли осуществлялось возвращение ракеты (в нашем случае v_0 направлено в сторону, противоположную скорости Луны, и по величине выделено в интервале $6 \leq v_0 \leq 10,5$). Очевидно, что при уменьшении r_0 к Луне возрастает, и при достаточно малом r_0 возвращение ракеты на Землю станет невозможным. При достаточно большом r_0 величина скорости v_0 почти не испытывает возмущений от Луны (в сторону уменьшения), поэтому будет близка к гиперболической, т. е. такой случай оказывается также неблагоприятным с точки зрения возможности возвращения на Землю.

Из этих рассуждений следует, что если мы зададимся целью построить траекторию ракеты, возвращающуюся на Землю, то между r_0 и v_0 должна существовать обратная

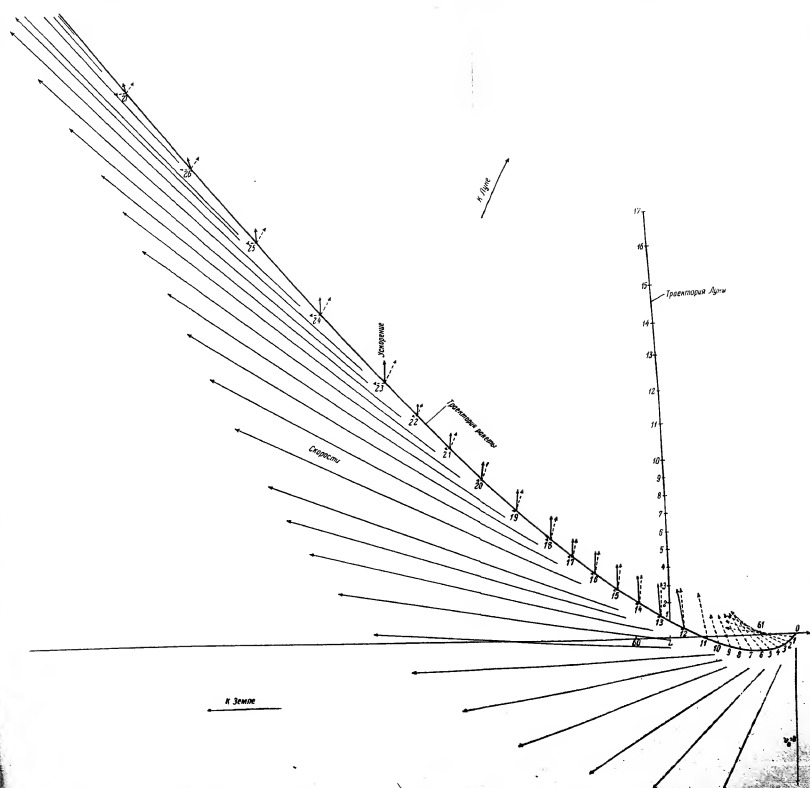


График № 1. Графическое построение симметричной траектории $V_0=3$ (0,22 км/сек.).

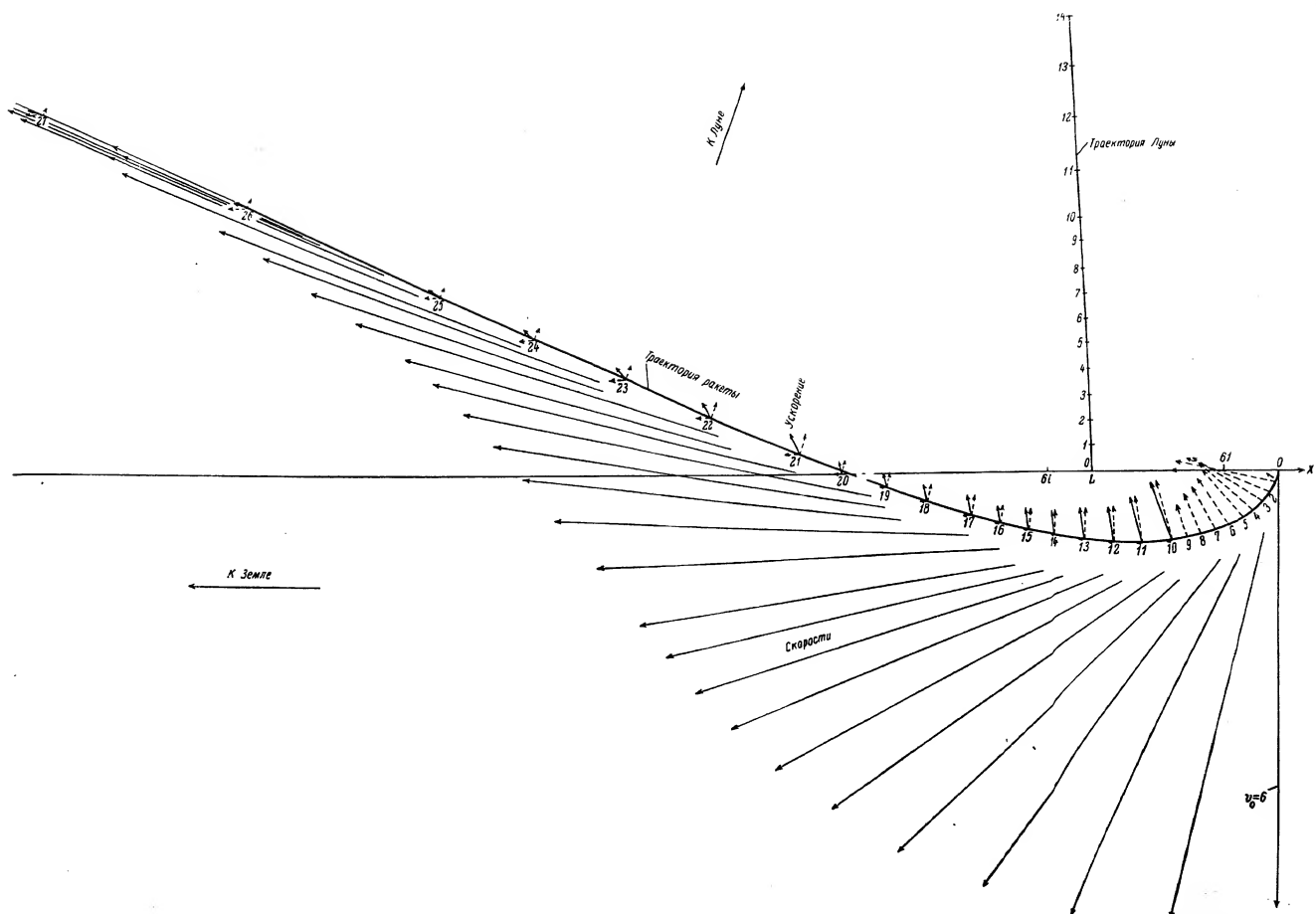


График № 2. Графическое построение симметричной траектории $V_0 = 6$ (0.44 км/сек.).

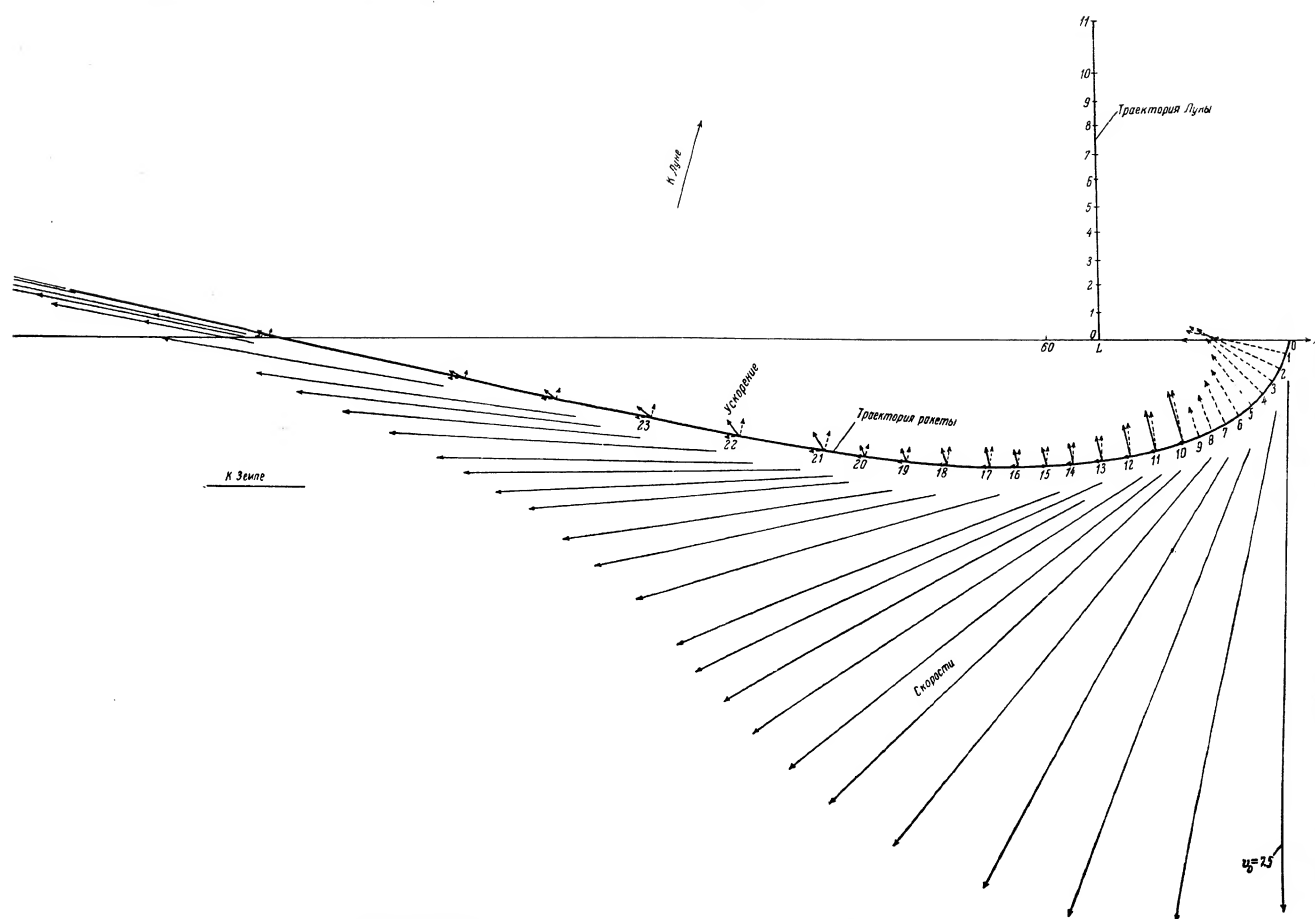


График № 3. Графическое построение симметричной траектории $V_{01} = 7.5$ (0.55 км сек.).

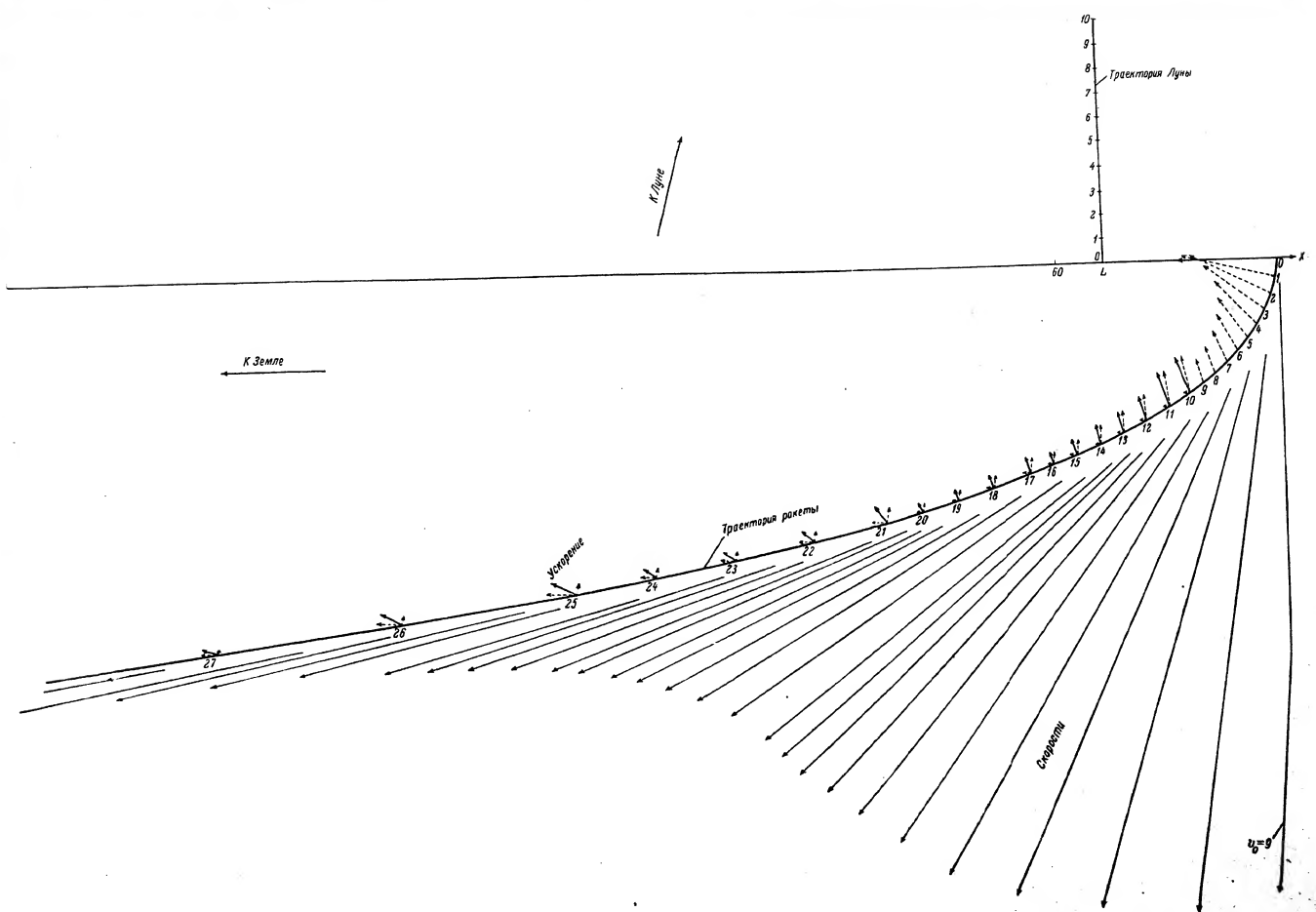


График № 4. Графическое построение симметричной траектории $V_0 = 9$ (0.66 км.сек.).

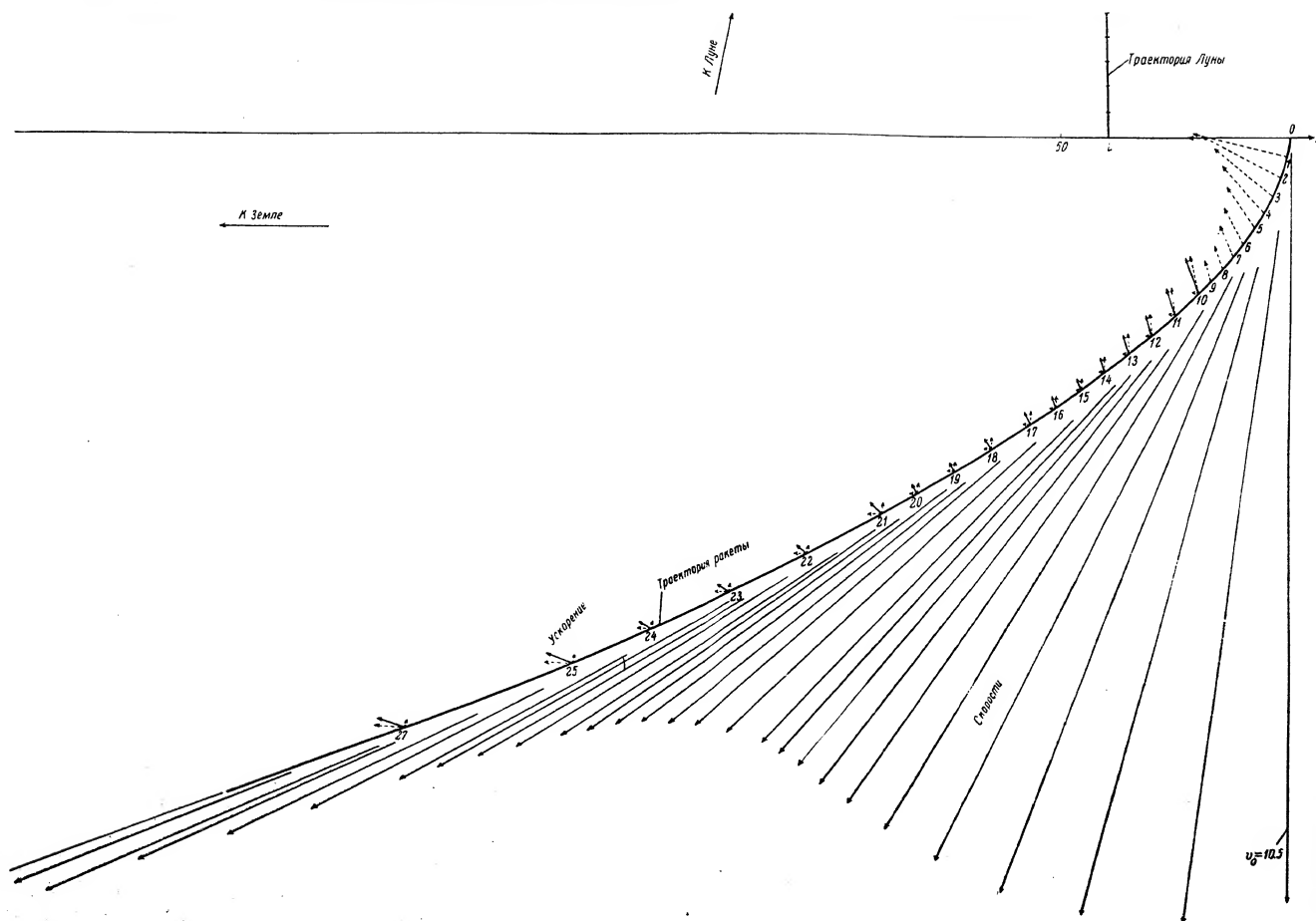


График № 5. Графическое построение симметричной траектории $V_0 = 10.5$ (0.77 км/сек.).

зависимость. С увеличением ε следует уменьшить u_0 , так что при некотором $\varepsilon = \varepsilon_0$, $u_0 = 0$, а при $\varepsilon > \varepsilon_0$ скорость u_0 следует направить в сторону движения Луны.

Орбита, построенная Г. А. Чеботаревым (Чеботарев, 1956), соответствует этому частному случаю u_0 ($\varepsilon_0 = 31\,600$ км).

3. Построенные орбиты могут быть двух типов: орбиты пересекающие себя в одной точке (тип I) и пересекающие себя в двух точках (тип II). Угловая скорость на орбитах I типа в начальный момент (т. е. в сфере действия Земли) противоположна по знаку угловой скорости Луны. Угловая скорость ракеты на орбитах типа II направлена одинаково с угловой скоростью Луны.

4. Орбиты типа II при одинаковых по величине с орбитами типа I начальных скоростях являются более выгодными, так как:

а) для орбит типа II представляется возможность использования скорости суточного вращения Земли (в какой мере — это зависит от угла между радиусом-вектором и скоростью в начальный момент);

б) кроме того, если иметь в виду задачу фотографирования невидимой части поверхности Луны, то на одинаковом с орбитой типа I минимальном расстоянии от центра Луны ракета движется по орбите типа II с меньшей скоростью (в нашем случае орбите типа I соответствует скорость относительно Луны, равная $7.5 + 13 = 20.5$, а орбите типа II — скорость $9 + 13 = 22$ в наших единицах, т. е. для орбит типа I скорость относительно Луны на 0.14 км/сек. больше, чем для орбиты типа II).

ЛИТЕРАТУРА

- Кооп. 1950. Динамика ракет.
 Субботин М. Ф. 1937. Курс небесной механики. II.
 Уиттекер Е. Т. и Г. Н. Робинсон. 1935. Математическая обработка наблюдений.
 Чеботарев Г. А. 1956. Симметричная траектория ракеты для полета вокруг Луны. Бюлл. ИТА, 6, 7 (80).
 Энзельс, 1950. Космические полеты.
 Goldstein A., C. E. Fröberg. 1952. A Collision path from the Earth to the Moon in the restricted problem of three bodies.
 Haskins E. 1953. A mathematical interpretation of crossing the last frontier.
 Lawden D. E. 1954. Fundamentals of space navigation. Journ. of the Brit. Interpl. Soc. 13, 2, 87—101.
 Lawden D. E. 1955. Optimal transfer between circular orbits about two planets, Astronaut. Acta, 1, 2.
 Sundman K. F. 1913. Mémoire sur le problème des trois corps. Acta Mathematica, 36.

Поступило в Редакцию
 11 июля 1956 г.

Постоянная лунного параллакса

Ф. Х. Перлин

В статье дается краткий обзор результатов определения постоянной лунного параллакса, а также вывод численного значения этой величины в соответствии с новыми данными о некоторых фундаментальных постоянных астрономии.
DIE KONSTANTE DER MONDPARALLAXE, von F. H. Perlin. — Es wird kurze Zusammenstellung der Ergebnisse einer Bestimmung der Konstante der Mondparallaxe gegeben, sowie der numerische Werth dieser Grösse, entsprechend den neuen Daten für einige fundamentale Konstanten der Astronomie.

Введение

Постоянными астрономии принято называть величины, полученные прямо или косвенно из наблюдений и составляющие численную основу редуцированных вычислений, как, например, прецессионные постоянные, постоянная солнечного параллакса и т. д. Некоторые из этих величин связаны между собой определенными соотношениями, вытекающими из теоретических соображений. Постоянная лунного параллакса, методом определения и численному значению которой посвящена настоящая работа, относится к астрономическим постоянным, в значительной степени зависящим от элементов, характеризующих фигуру и размер Земли. Вопрос о постоянной лунного параллакса является одним из дискуссионных вопросов. Во-первых, употребляемое теперь значение этой величины недостаточно согласуется с другими современными данными о некоторых фундаментальных постоянных. Во-вторых, значение этой постоянной, полученное из астрономических наблюдений, недостаточно хорошо совпадает со значением, полученным из теоретических соотношений, основанных на свойствах гравитации. Новые данные о фундаментальных постоянных, связанных с Землей, полученные в последние годы (Жонголович, 1952, 1956) позволяют внести некоторые уточнения в принятое теперь значение постоянной лунного параллакса.

§ 1. Краткий исторический обзор определений постоянной лунного параллакса

Определение постоянной лунного параллакса, как и других астрономических постоянных, имеет длинную историю. Мы остановимся кратко лишь на главнейших работах, характеризующих состояние вопроса в настоящее время.

Один из методов определения постоянной лунного параллакса, получивший название теоретического или динамического метода, основан на гравитационной теории, позволяющей установить соотношение между параллаксом Луны, ее средним суточным движением, размерами Земли и силой тяжести на ее поверхности (см. далее § 2).

Мысль об использовании тождества земной гравитации с силой, обуславливающей движение Луны вокруг Земли, для определения параллакса Луны была высказана Иоганном Генрихом Ламбертом еще в середине XVIII в.¹ Первое известное численное

¹ Как сообщает Зейделя (Seidel, 1859), Ламберт предложил такую задачу в качестве конкурсной в одном из писем к секретарю Берлинской академии.

значение постоянной лунного параллакса, полученное этим методом, принадлежит Лапласу (Laplace, 1844, III, стр. 285—286). Со времени Лапласа все таблицы Луны от Бюрга (Bürg) до Брауна (Brown E. W.) основаны на значениях постоянной параллакса, полученных динамическим методом.

В табл. 1 приводятся значения постоянной экваториального горизонтального параллакса Луны (π_c),² выведенные этим методом Ганzenом, Адамсом, Ньюкомбом, Брауном, Де-Ситтером и Клемменсом, а также принятые при этих выводах значения массы Луны, сжатия Земли, ее среднего радиуса и ускорения силы тяжести на ее средней широте.

Таблица 1

| Автор | 1/m | 1/x | R_1 (в см. сек. ⁻²) | R_1 (в м) | π_c | Источники |
|------------|-------|---------|--------------------------------------|----------------|---------|--|
| Ганзен. | 80 | 300 | 979.772 | 6370063 | 3422.25 | Данные, приведенные в обработке Ньюкомба (Newcomb, 1892, стр. 79). |
| Адамс. | 80 | 300 | 979.772 | 6370063 | 3422.28 | |
| Ньюкомб. | 81.45 | 292.5 | 979.770 | 6371004 | 3422.68 | Newcomb, 1895, стр. 192—194. |
| Браун. | 81.53 | 294 | 979.743 | 6370843 | 3422.70 | Newcomb, 1914, стр. 42. |
| Де-Ситтер. | 81.53 | 296.75 | 979.770 | 6371260 | 3422.68 | Brown, 1915, стр. 516. |
| Клемменс. | 81.79 | 296.202 | 979.770 | 6371248 | 3422.76 | De-Sitter, 1938, стр. 213—231. Clemence, 1948, стр. 169—179. |

Здесь m — масса Луны в единицах массы Земли; x — сжатие Земли; R_1 — средний радиус Земли (в м); g_1 — ускорение силы тяжести на средней широте (в см. сек.⁻²); π_c — постоянная экваториального горизонтального параллакса Луны.

Другой метод³ определения экваториального горизонтального параллакса Луны, который иногда называется тригонометрическим методом, основан на сравнении склонений Луны, полученных из соответственных меридианных наблюдений Луны в двух пунктах земной поверхности, достаточно отдаленных по широте. Такие наблюдения выполнялись неоднократно на мысе Доброй Надежды и соответственно в Гринвиче, а также на некоторых других европейских обсерваториях.

В 1751—1753 гг. Лакей (Lacaille) выполнил на мысе Доброй Надежды ряд наблюдений, послуживших затем материалом для вывода постоянной лунного параллакса целому ряду астрономов (Lacaille, Laland, Du Séjour, Гринов).⁴ Эти же наблюдения Лакей был переработаны в 1837 г. Оулуфсеном (Oulufsen, 1837) совместно с наблюдениями Брайля в Гринвиче, Кассини в Париже, Алаида в Берлине и Зенотти в Болонье. В 1838 г. была опубликована Хендерсоном (Henderson, 1838) обработка новых наблю-

² Современные авторы дают вместо величины π_c — постоянной параллакса Луны — величину $\pi_c' = \frac{\sin \pi_c}{\sin 1''}$ и называют π_c' постоянной синуса параллакса Луны. Эти две величины необходимо различать, так как $\pi_c' = \sin \pi_c + \dots$ и $\pi_c' = \frac{\sin \pi_c}{\sin 1''} = \pi_c - 0.157$.

³ Ньюкомб, как и Ганзен и Адамс, называют среднюю геоцентрическую широту, синус которой равен $1/\sqrt{3}$. Де-Ситтер и Клемменс понимают под средней широтой географическую широту, синус которой равен $1/\sqrt{3}$. R_1 и g_1 соответственно этим двум определениям средней широты совпадают с точностью до величин второго порядка малости относительного сжатия.

⁴ Более общий метод определения параллакса Луны может, очевидно, заключаться в определении обобщенных геоцентрических координат Луны в различных пунктах земной поверхности. Разработанный в настоящее время метод фотографического определения таких координат повышает точность определения параллакса Луны из наблюдений.

⁵ Интересно отметить работу акад. А. Н. Гришова (1761), использовавшего работу Лакей для определения параллакса Луны по соответствующим наблюдениям в Петербурге.

дений, выполненных в течение 1832—1833 гг. в Гринвиче, Кембридже и на мысе Доброй Надежды. Последующие соответственные наблюдения, поставленные с целью определения постоянной лунного параллакса, были выполнены в 1830—1837 гг. и в 1856—1861 гг. и обработаны Брингом (Breen 1864) и Стоуном (Stone, 1866). Все наблюдения обрабатывались по формулам сферической астрономии, выведенным в предположении, что поверхность Земли точно представляет собой сжатый эллипсоид.¹ Мы приводим в табл. 2 значения постоянной экваториального горизонтального параллакса Луны, полученные тригонометрическим методом Олуфсеном, Хендерсоном, Брингом и Стоуном при двух предположениях о сжатии Земли ($\alpha = 1/293.5$, $\alpha = 1/300$), в обработке Харкнесса (Harkness, 1891, 20—21).

Таблица 2

| Автор | π_{ϵ} ($\alpha = 1/293.5$) | π_{ϵ} ($\alpha = 1/300$) | Источники | Примечания |
|------------|--|--|-------------------------------|--|
| Олуфсен. | 3423.28 | 3422.91 | Olufsen, 1837. | Наблюдения выполнены в Гринвиче, Париже, Берлине, Бомбее и на мысе Доброй Надежды в 1751—1753 гг. (55 наблюдений). |
| Хендерсон. | 3422.85 | 3422.46 | Henderson, 1838, стр. 283—294 | Наблюдения выполнены в Гринвиче, Кембридже и на мысе Доброй Надежды в 1832—1833 гг. |
| Брин. | 3423.08 | 3422.70 | Breen, 1864, стр. 115—178 | Наблюдения выполнены в Гринвиче, Кембридже и на мысе Доброй Надежды в 1830—1837 гг. (123 наблюдения). |
| Стоун. | 3423.08 | 3422.71 | Stone, 1866, стр. 11—16. | Наблюдения выполнены в Гринвиче и на мысе Доброй Надежды в 1856—1861 гг. (239 наблюдений). |

Сравнение значений π_{ϵ} , полученных тригонометрическим методом, со значением, полученным динамическим методом, при одной и той же величине сжатия, как, например, значение Стоуна (табл. 2, $\alpha = 1/293.5$) со значением Ньюкомба (табл. 1, $\alpha = 1/293.5$), показывает довольно большое расхождение (0.4). Это может быть объяснено как ошибками наблюдений, так и неточностью принятых при вычислениях величин, связанных с фигурой и размерами Земли.

В 1906—1910 гг. была поставлена ряд наблюдений на обсерваториях в Гринвиче и на мысе Доброй Надежды для получения более точного значения постоянной параллакса Луны. Чтобы уменьшить ошибку отсчетов, наблюдался не лунный край, а кратер Mösting A. Дискуссия этих наблюдений была опубликована в 1911 г. Кроммеленом (Strommelin, 1911, стр. 526—540). Обработка наблюдений производилась по формулам для эллипсоидальной Земли, но была также учтена высота пунктов наблюдений над уровнем моря. Полученный Кроммеленом результат представлен в виде поправки к среднему параллаксу Ганвена к постоянной синуса параллакса $\pi_{\epsilon} = \frac{\sin \epsilon}{\sin 1''}$, который следует принять равным 3422.11, так как параллакс, взятый для соответствующих моментов наблюдения из „Berliner Jahrbuch“ основан именно на этом значении постоянной (Bauschinger, 1919, стр. 872; De-Sitter, 1927, § 10). Кроммелен получил следующий результат:

$$d\pi_{\epsilon} = 0.49 - 0.057 \left(\frac{1}{\alpha} - 293.5 \right).$$

Он провел также сравнение величин π_{ϵ} , полученных из наблюдений кратера Mösting A при разных значениях α , с величинами, полученными при тех же значениях α

¹ Подробное изложение этого метода можно найти, например, в „Руководстве к сферической астрономии“ А. Шаляковского (1866), т. 1, стр. 220—225.

динамическим методом, и пришел к выводу, что наилучшее согласие достигается при $\alpha = 294.4$. Этот именно вывод побудил Брауна принять при вычислении постоянной синуса горизонтального экваториального параллакса Луны динамическим методом сжатие Земли, равным $1/294$. Однако значение $\alpha = 1/294$, при котором согласовались значения π_{ϵ} , полученные разными методами, существенно отличается от той величины, которая получается из современных гравиметрических и других астрономо-геодезических исследований. Кроммелен (Strommelin, 1911) указывает как на одну из возможных причин такого расхождения на трехосность Земли и отличие сжатия гринвичского меридиана, на котором производились наблюдения, от среднего сжатия Земли.¹

В дальнейшем вопросом о согласовании значений постоянной лунного параллакса, полученных разными методами, занимались Ламберт (Lambert, 1928), Де-Ситтер (De-Sitter, 1927) и Джеффрис (Jeffreys, 1948). Работы Де-Ситтера и Ламберта в этом вопросе почти идентичны по содержанию. Мы приведем численные данные Де-Ситтера, так как на них основана дальнейшая дискуссия Джеффриса. Де-Ситтер, как и Ламберт, вводит в рассмотрение различные поправки к постоянной параллакса, полученной Кроммеленом, в частности поправки за отклонение геоида от эллипсоида; он дает следующее выражение для разности между значениями π_{ϵ} (набл.) полученными из наблюдений, и π_{ϵ} (динам.) вычисленными динамическим методом:

$$\pi_{\epsilon} \text{ (набл.)} - \pi_{\epsilon} \text{ (динам.)} = -0.012 + 0.006 - 0.018 dR_1 + 1.16 d g_1 - 0.044 d \left(\frac{1}{\alpha} \right) - 0.170 d \left(\frac{1}{m} \right) - 0.422 h_1 - 0.301 h_2 - 0.0104 i_1 + 0.0138 i_2 + 0.0168 h,$$

где dR_1 , $d g_1$, $d \left(\frac{1}{\alpha} \right)$, $d \left(\frac{1}{m} \right)$ — небольшие изменения к принятым при вычислениях π_{ϵ} динам. значениям: $R_1 = 6371.238$ км, $g_1 = 979.770$ см-сек.⁻², $\frac{1}{\alpha} = 296.96$, $\frac{1}{m} = 81.53$, а h_1 , h_2 — поправки к принятым радиусам Земли в Гринвиче и на мысе Доброй Надежды (в км); i_1 , i_2 — поправки за уклонение отвесных линий в пунктах наблюдений (в сек. дуги); h — поправка к принятому семеноцентрическому расстоянию наблюдаемого кратера Mösting A. Вероятная ошибка наблюдаемого значения ± 0.06 выведена из невязок и может считаться хорошим критерием точности наблюдений, так как распределение невязок находится в хорошем согласии с нормальным законом распределения ошибок. По подсчетам Де-Ситтера можно, например, объяснить разность $\pi_{\epsilon} \text{ (набл.)} - \pi_{\epsilon} \text{ (динам.)}$ понижением геоида в Гринвиче на 400 м или же на Мысе — на 280 м, но более вероятным он считает объяснение такой разности систематическими ошибками в наблюдаемом положении кратера Mösting A.

По мнению Ламберта, можно отнести разность $\pi_{\epsilon} \text{ (набл.)} - \pi_{\epsilon} \text{ (динам.)}$ за счет случайных ошибок наблюдаемого значения в сочетании с ошибками в данных, принятых при вычислениях $\pi_{\epsilon} \text{ (динам.)}$. Как на одну из возможных причин такой разности, Ламберт указывает неучтенное уклонение отвеса в пунктах наблюдений и на то, что сжатие гринвичского меридиана отклоняется от среднего сжатия Земли. Следует, однако, заметить, что Де-Ситтер и Ламберт не располагали данными о положении геоида относительно эллипсоида, принятого при обработке наблюдений, и их оценки влияния отклонения геоида от эллипсоида на величину $\pi_{\epsilon} \text{ (набл.)}$ весьма приближены.

Приведенное Джеффрисом (Jeffreys, 1948) исследование внешнего гравитационного поля Земли позволяет ему оценить влияние величин h_1 , h_2 , i_1 , i_2 на наблюдаемое значение

¹ Такое же предположение высказывал впоследствии Ламберт (Lambert, 1928). Но по подсчетам самого Ламберта, чтобы объяснить существующую разность $\pi_{\epsilon} \text{ (динам.)}$ и $\pi_{\epsilon} \text{ (набл.)}$, достаточно предположить, что сжатие гринвичского меридиана равно 0.003465, по современным данным о трехосности Земли (Жонгольевич, 1952, § 14) сжатие Гринвичского меридиана равно 0.003386.

чение π'_c . По оценке Джеффриса, влияние всех этих членов выражается очень малой величиной — 0,008.

Джеффрис принимает следующие поправки к значениям Де-Ситтера (см. стр. 569 настоящей работы): $dR_1 = -0.301 \pm 0.116$, $dg_1 = -0.014 \pm 0.002$, $d(\frac{1}{a}) = +1.14 \pm 0.36$, $d(\frac{1}{a^2}) = -0.261 \pm 0.025$ и получает соответственно: $\pi'_c \text{ (теор.)} = 3422'422 \pm 0'024$, $\pi'_c \text{ (набл.)} = 3422'34 \pm 0'09$ (в $\pi'_c \text{ (набл.)}$ не учтены поправки за отклонение геоида от эллипсоида).

Разность $\pi'_c \text{ (набл.)} - \pi'_c \text{ (теор.)}$ не выходит теперь за пределы средней ошибки, при этом изменения в R_1 и $\frac{1}{a}$ уменьшили ее, а изменения в $\frac{1}{a^2}$ увеличили. Джеффрис предлагает принять для постоянной экваториального горизонтального параллакса Луны значение $\pi_c = 3422'419$ — уравновешенное среднее $\pi'_c \text{ (набл.)}$ и $\pi'_c \text{ (теор.)}$. Это значение соответствует $\frac{1}{a} = 297.10$, $\frac{1}{a^2} = 81.279$, экваториальному радиусу Земли $R_0 = 6378.099$ км, ускорению сил тяжести на экваторе $g_0 = 978.0373$ см·сек.⁻²

§ 2. Динамический метод определения постоянной лунного параллакса

Движение Луны вокруг Земли подвержено сильному возмущающему действию Солнца. Поэтому, прежде чем говорить о методах определения постоянной лунного параллакса, необходимо строго определить само понятие этой постоянной.

Мы будем называть постоянной синуса экваториального горизонтального параллакса Луны ($\sin \pi_c$) постоянный член в полном разложении синуса возмущенного параллакса Луны ($\sin \pi_c$). Этот член выражается различно в разных теориях Луны. Например, в теории Луны Ганзена вычисления ведутся с аномалистическим средним движением и среднее расстояние Луны в теории Ганзена отличается от среднего расстояния, определенное другими теориями, где вычисления ведутся с сидерическим средним движением. В наиболее современной теории движения Луны, теории Хилла—Брауна, возмущения Луны от действия Солнца учитываются относительно так называемой вариационной орбиты.

Вариационную орбиту можно определять как периодическое решение уравнений движения Луны, если в них пренебречь членами, зависящими от наклонности, эксцентриситета солнечной орбиты и параллакса Солнца, и положить равным нулю эксцентриситет лунной орбиты. Вследствие большого возмущающего действия Солнца на движение Луны для вариационной орбиты не существует большой полуоси в ее обычном понимании и нельзя применить к Луне третий закон Кеплера. В вариационной орбите рассматривают аналог большой полуоси — некоторую постоянную величину a — общий множитель прямоугольных координат Луны (Субботин, 1937, гл. XVIII). В теории Хилла—Брауна постоянный член в разложении синуса возмущенного экваториального горизонтального параллакса Луны равен

$$\sin \pi_c = \frac{R_0}{a}, \quad (1)$$

где R_0 — экваториальный радиус Земли.

Введем в рассмотрение величину a , формально удовлетворяющую третьему закону Кеплера

$$a^3 = fM(1+m); \quad (2)$$

здесь μ — наблюдаемое среднее суточное движение Луны; M — масса Земли, включая массу атмосферы; m — масса Луны в единицах массы Земли; f — постоянная тяготения.

1 Все значения Джеффриса даны со средней ошибкой.

Величина a , формально удовлетворяющая третьему закону Кеплера для Луны, связана с величиной a — аналогом большой полуоси — числовым соотношением (3), установленным в теории Брауна (Brown, 1906):

$$\frac{1}{a} = +1.00090768 \frac{1}{a} \quad (3)$$

Соотношения (1), (2) и (3) позволяют выразить постоянную экваториального горизонтального параллакса Луны через среднее движение Луны, массу Земли и ее экваториальный радиус. Подставим $\frac{1}{a}$ из (3) в (1)

$$\sin \pi_c = \frac{1.00090768}{a} R_0$$

или, полагая $\delta = 0.00090768$,

$$\sin^3 \pi_c = \frac{(1+\delta)^3 R_0^3}{a^3} \quad (4)$$

Пользуясь соотношением (2) получим

$$\sin^3 \pi_c = \frac{(1+\delta)^3 R_0^3}{fM(1+m)} \quad (5)$$

Величину fM можно выразить через силу тяжести на поверхности Земли. Фигура Земли и ее внутреннее строение весьма сложны и до сих пор мало исследованы. Поэтому речь идет не о действительной Земле, а о некотором идеальном теле, которым заменяют Землю в астрономических вычислениях. Выбор такого тела определяется полученными из наблюдений (астрономическими, геодезическими, гравиметрическими) данными о фигуре и внутреннем строении Земли. Де-Ситтер в своей системе астрономических постоянных, исходя из решения проблемы Клеро до членов второго порядка включительно, принимает в качестве модели Земли тело вращения, фигура которого не является строгим эллипсоидом. Это приводит к введению в систему астрономических постоянных величин, характеризующих отклонение принятой фигуры от строго эллипсоидальной и зависящих от той или иной гипотезы о внутреннем строении Земли. С достаточным приближением можно рассматривать Землю как материальное тело, ограниченное уровенной поверхностью эллипсоидальной формы. Мы будем исходить из решения проблемы Стокса, не требующей никаких предположений о распределении масс внутри Земли, рассматривая Землю как материальное тело с внешней уровенной поверхностью в виде общего двухосного эллипсоида.¹

Если ограничиться членами второго порядка малости относительно сжатия, то величина fM для двухосного эллипсоида выражается следующим образом (Жонголович, 1949):

$$fM = g_0 R_0^2 \left(1 - x + \frac{3}{2} q - \frac{15}{14} xq \right),$$

где g_0 — ускорение сил тяжести на экваторе; q — отношение центробежной силы на экваторе к силе тяжести на экваторе; M_1 — масса Земли без массы атмосферы; $M = M_1(1+c)$, $c = 8.65 \cdot 10^{-5}$ — масса атмосферы в долях массы Земли.

С принятой точностью имеем

$$fM = g_0 R_0^2 \left(1 - x + \frac{3}{2} q - \frac{15}{14} xq + \epsilon \right). \quad (6)$$

После подстановки fM из (6) в (5) получим, сохраняя члены второго порядка малости,

$$\sin^3 \pi_c = \frac{R_0^3}{g_0} \cdot \frac{n^2 (1+\delta)^3}{(1+m)} \left(1 - x - \frac{3}{2} q + x^2 + \frac{9}{4} q^2 - \frac{21}{14} xq - \epsilon \right). \quad (7)$$

¹ Относительно определения такого эллипсоида см.: Жонголович, 1952, 1956.

Полученное выражение $\sin^2 \pi_c$ совпадает с аналогичным выражением Де-Ситтера (De-Sitter, 1938) до членов, характеризующих отклонение принятой им модели Земли от модели, принятой здесь.

Продифференцируем равенство (7), считая q неизменной величиной. Пренебрегая величинами выше второго порядка малости относительно сжатия, мы получим после некоторых элементарных преобразований следующее выражение для поправки $d\pi_c$ в зависимости от возможных поправок к значениям исходных величин:

$$d\pi_c = \frac{\pi_c}{3R_0} dR_0 - \frac{\pi_c}{3g_0} dg_0 + \frac{\pi_c}{3} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{m}} \right) d \left(\frac{1}{m} \right) - \frac{\pi_c}{3} \left(\frac{1}{2} \right) d \left(\frac{1}{2} \right) \quad (8)$$

где dR_0 , dg_0 , $d \left(\frac{1}{m} \right)$, $d \left(\frac{1}{2} \right)$ — небольшие изменения в принятых значениях R_0 , g_0 , $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{2}$.

§ 3. Численное значение постоянной лунного параллакса, полученное с учетом новых данных о некоторых фундаментальных постоянных астрономии

Формула (7) предыдущего параграфа позволяет получить постоянную синуса экваториального горизонтального параллакса Луны, если известны некоторые величины, входящие в ее правую часть. Рассмотрим их подробнее, стараясь уточнить их значения по современным данным.

а) Среднее сидерическое движение (n)

Средняя долгота Луны для эпохи 1900, Январь 0, Гринвичский полдень по Брауну $\lambda_c = 270^\circ 26' 11.71'' + 481267.5326067$ — вековые и периодические члены,

где T считается в юлианских столетиях от 1900, Январь 0, Гринвичский полдень.

Средняя долгота Луны получена из наблюдений, отнесенных к астрономическому времени, неравномерному вследствие неравномерности вращения Земли, и должна быть приведена к эфемеридному времени, в котором строится теория движения Луны. По современным данным, учитывающим неравномерность вращения Земли (Загребин, 1951) значение λ_0 по Брауну, должно быть исправлено на величину

$$\Delta\lambda = -8.72 - 26.75T \dots$$

что дает для λ_c значение $\lambda_c = 270^\circ 26' 02.99'' + 481267.525931T$, и, следовательно, среднее сидерическое движение Луны в юлианское столетие в 36525 эфемеридных суток равно

$$\frac{1732564379.31}{5025.75} \text{ (часть, обуславливаемая прецессией)} \\ \frac{173255933.56}{5025.75}$$

Отсюда среднее суточное движение получается равным

$$n = 47434.889899$$

или

$$n = \frac{47434.889899 \times \sin 1''}{86400} \text{ радиан / сев. эфм. времени}$$

б) Масса Луны в единицах массы Земли (m)

Масса Луны определяется двумя методами:

- 1) по наблюдаемому лунному неравенству в долготе Солнца;
- 2) по постоянной нутации, когда определена постоянная прецессии.

Принятое в таблицах Луны Брауна и в системе астрономических постоянных Де-Ситтера значение $\frac{1}{m} = 81.53$ получено первым методом Хинком на обработке появлений Эроса в 1900—1901 гг.

¹ Для общей прецессии по долготе принято значение Ньюкомба. Исследования последних десятилетий указывают на поправку к этой величине примерно в 1". На такую величину среднесуточное движение эта поправка мало сказывается.

Клеменс (Clemence, 1948) получил вторым методом $\frac{1}{m} = 81.79$. Теоретические соотношения, которыми пользуются при определении массы Луны по постоянной нутации, получены в предположении, что Земля находится в гидростатической равновесии. Расхождение между значением постоянной нутации, выведенным из неоднократных и хорошо согласующихся между собой наблюдений, и значением, полученным из теоретических соотношений, когда определены постоянная прецессии и масса Луны, показывает, что предположение о гидростатическом равновесии не оправдывается. Поэтому, в настоящее время наиболее надежным методом определения величины m следует считать метод, основанный на наблюдаемом лунном неравенстве. Джеффрис (Jeffreys, 1948) принял $\frac{1}{m} = 81.269$, величину, полученную по постоянной лунного неравенства Спенсера Джонса $L = 6.4378^1$ при постоянной параллакса Солнца $\pi_c = 8.790$ и постоянной синуса параллакса Луны $\pi_l = 3422.526$ (значение Де-Ситтера, De-Sitter, 1938). Новое значение $\pi_c = 3422.419$, полученное Джеффрисом (Jeffreys, 1948) приводит к значению $\frac{1}{m} = 81.278$.

Рабе (Rabe, 1950) обработал наблюдения оппозиций Эроса с 1926 по 1945 гг. с учетом эфемеридного счета времени и получил новое значение для массы Земли + Луна

$$\frac{1}{m_{\oplus+\odot}} = 328.452 \pm 43$$

и соответственно этому параллакс Солнца ²

$$\pi_{\odot} = 8.79835 \pm 0.00039.$$

Постоянная лунного неравенства, выведенная Рабе из обработки наблюдений Эроса в 1930—1931 гг.

$$L = 6.4356 \pm 0.0028.$$

Принимая для L среднее из полученного им значения и значения Спенсера Джонса, Рабе вывел $\frac{1}{m} = 81.375 \pm 0.0026$, при этом параллакс Солнца принят равным $\pi_c = 8.7984$ и параллакс Луны $\pi_l = 3422.526$.

Вывод массы Луны по лунному неравенству требует предварительного определения параллакса Солнца и Луны. Н. И. Идельсон (1942) вывел соотношение, позволяющее определить $\frac{1}{m}$ по наблюдаемому лунному неравенству в долготе Солнца и параллактическому неравенству в долготе Луны независимо от параллакса Солнца и Луны. Действительно, постоянная лунного неравенства и параллактическое неравенство (по Брауну) равны соответственно:

$$L = \frac{m}{1+m} \cdot \frac{\pi_{\odot}}{\pi_l \sin 1''},$$

$$P = 498532 \cdot \frac{\pi_{\odot}}{\pi_l} \cdot \frac{1}{1+m},$$

откуда

$$\frac{1}{m} = 4.13744 \frac{P}{L} + 1.$$

Мы воспользуемся этим соотношением для определения $\frac{1}{m}$. Параллактическое неравенство лучше всего определяется из покрытий. Прием

$$P = 1257023 \pm 0.058 \text{ (вероятная ошибка).}$$

¹ По наблюдениям Эроса 1930—1931 гг. и переработке Джеффриса.
² По формуле Де-Ситтера, связывающей массу системы Земля + Луна с параллаксом Солнца (De-Sitter, 1938).

Это значение P получено Спенсером Джонсом (Spencer Jones, 1930, стр. 71—104), переработавшим на основании теории Брауна значение Ньюкомба, выведенное из наблюдений покрытий с 1753 по 1906 гг. При $L = 6'437 \pm 0.002$ (среднее из значений Спенсера Джонса и Рабе) мы имеем $\frac{1}{m} = 81.360 \pm 0.055$, значение, близкое к полученному Рабе.

в) Сжатие Земли (x), экваториальная постоянная силы тяжести (g_0), экваториальный радиус Земли (R_0)

И. Д. Жонголович (1952) получил на основе обширного гравиметрического материала новые данные о фигуре Земли и ее гравитационном поле. По определению И. Д. Жонголовича, сжатие общего земного эллипсоида $x = \frac{1}{296.61}$ (второй вариант), экваториальная постоянная силы тяжести $g_0 = 978.0573$, причем абсолютное значение силы тяжести в Потсдаме принято равным 981.274 ± 0.003 см. сек.⁻².

Новые абсолютные определения силы тяжести в Америке и Англии, а также анализа определения, выполненного Кюененом и Фуртвенгером в Потсдаме, показали, что принятое для Потсдама значение должно быть уменьшено (Казанский, 1948; Berroth, 1949; Jeffreys, 1948; Woollard, 1950). Хотя в настоящее время нельзя еще с полной уверенностью дать точное значение, однако из всех указанных определений следует, что принятое значение необходимо уменьшить приблизительно на 12 мкг. Приняв поэтому для Потсдама $g_0 = 981.262$ см.сек.⁻², мы получим соответственно $g_0 = 978.045$ см.сек.⁻².

Кроме того, И. Жонголович (1956) показал, как из различных астрономико-геодезических данных можно получить размеры общего земного эллипсоида и получил для большой полуоси этого эллипсоида значение $R_0 = 6378075$ м.

г) Параметр центробежной силы (q)

$$q = \frac{\omega^2 R_0}{g_0},$$

где ω — скорость вращения Земли. Среднее значение ω за последние 2000 лет равно $1299548'2042053$ (Clemence, 1948) в эфемеридные сутки или 0.0000729211514 рад/сек в секунду эфемеридного времени. С принятыми нами значениями R_0 и g_0 имеем $q = 0.00346767$.

Таким образом, мы рассмотрели все величины, входящие в правую часть выражения (7) и приняли для них следующие значения:

$$n = \frac{47434.8899}{86400} \sin 1'' \frac{\text{рад/сек}}{\text{сек. эфем. времени}},$$

$$\delta = 0.00090768,$$

$$\sigma = 8.65 \cdot 10^{-2},$$

$$\frac{1}{m} = 81.36 \pm 0.06,$$

$$R_0 = 6378.08 \text{ км} \pm 0.04,$$

$$g_0 = 978.045 \pm 0.003 \text{ см.сек.}^{-2}$$

$$\frac{1}{x} = 296.61 \pm 0.57.$$

С этими значениями мы получим по формулам (7) и (8)

$$\pi'_{\text{набл.}} = 3422'453 \pm 0.014 \quad (*)$$

$$d\pi'_{\text{с}} = 0'179dR_0 - 1'167dg_0 + 0'170d\left(\frac{1}{m}\right) - 0'013d\left(\frac{1}{x}\right),$$

где R выражено в километрах, а dg_0 — в см.сек.⁻².

Наблюдаемое значение $\pi'_{\text{с}}$, выведенное Кроммелином из наблюдений кратера Mösting A и рассчитанное по формулам для эллипсоида Земли, должно быть также исправлено. Исправления должны быть внесены как за сжатие общего земного эллипсоида, так и за уклонение эллипсоида от геоида. В работе И. Д. Жонголовича „Об определении размеров общего земного эллипсоида“ (1956) указаны формулы и метод, которым можно получить превышение геоида над общим земным эллипсоидом и абсолютные уклонения отнесенных линий в пунктах наблюдений. Пользуясь этим, мы получим для Гринвича и мыса Доброй Надежды соответственно

$$\begin{aligned} h_1 &= +0.058 \text{ км} \\ h_2 &= +0.090 \text{ км} \\ i_1 &= +3'2 \text{ } | \text{ меридиальные составляющие уклонений} \\ i_2 &= -4'5 \text{ } | \text{ отнесенных линий.} \end{aligned}$$

Коэффициенты дифференциальных поправок к наблюдаемому значению $\pi'_{\text{с}}$, вызванным небольшими изменениями в принятых значениях радиусов Земли и широт пунктов наблюдения, выведены Де-Ситтером (De-Sitter, 1927) и выражаются следующим образом:

$$d\pi'_{\text{с}} = -0'422h_1 - 0'301h_2 - 0.0104i_1 - 0.0138i_2.$$

Учитывая эти поправки и поправку за принятое нами сжатие общего земного эллипсоида, мы получим следующую величину $\pi'_{\text{с}}$ по наблюдениям кратера Mösting A в обработке Кроммелина:

$$\pi'_{\text{с}} = 3422'47 \pm 0.09. \quad (**)$$

Полученные разными методами значения (*) и (**), уточненные в соответствии с современными данными о форме и размерах Земли, находятся в хорошем согласии друг с другом. Можно считать, что с ошибкой, не превосходящей одной сотой доли секунды дуги, значение постоянной синуса экваториального горизонтального параллеля Луны будет $\pi'_{\text{с}} = 3422'46$, что даст постоянную собственно параллеля Луны, равную $\pi_{\text{с}} = 3422'62$.

Автор выражает глубокую благодарность проф. И. Д. Жонголовичу, под чьим руководством выполнена настоящая работа.

ЛИТЕРАТУРА

- Гришков А. Н. (Grishchov A. N.). 1761. Investigatio parallaxes Lunae observationibus abliquet anno 1752. Petropoli et in Promontorio Bonae Spei ex contractu habitis initia. Novi Commentarii Academiae Scientiarum imperialis Petropolitanae. 6.
Жонголович И. Д. 1949. О радиусе Земли. Труды ЦНИИГАиК, вып. 68.
Жонголович И. Д. 1952. Вращательное поле Земли и фундаментальные постоянные, связанные с ним. Труды ИТА, 3.
Жонголович И. Д. 1956. Об определении размеров общего земного эллипсоида. Труды ИТА, 6.
Затребиц А. В. 1951. Об учете вращательного члена при составлении лунной эфемериды. Бюлл. ИТА, 5, 1 (64).

* Уклонения даны в смысле: астрономическая широта — геодезическая.

- Исаксон Н. И. 1942. Фундаментальные постоянные астрономии и геодезии. Приложение к „Астрономическому ежегоднику на 1942 г.“, стр. 411—476.
- Казанский И. А. 1948. Соображения об установлении определенного значения абсолютной силы тяжести для мировой гравиметрической системы. Труды ЦНИИГАиК, вып. 51.
- Субботин М. Ф. 1937. Курс небесной механики, II.
- Шидловский А. 1856. Руководство к сферической астрономии.
- Bauschinger J. 1919. Bestimmung und Zusammenhang der astronomischen Konstanten. Enzykl. d. math. Wiss., 6, 2, Heft 7.
- Berger A. 1949. Das fundamentale System der Schwere in Lichte neuer Reversionpendelmessungen. Bull. geodesique, 19.
- Breen H. 1864. On the Constant of the Horizontal Equatorial Parallax, as deduced from Observations made at the Cambridge Observatory and the Royal Observatories of Greenwich, Edinburgh and the Cape of Good Hope. Mem. Astr. Soc., 32.
- Brown E. W. 1908. Theory of the Motion of the Moon. Mem. Astr. Soc., 58.
- Brown E. W. 1915. The Elements of the Moon orbit. M. N., 75.
- Clemence G. M. 1948. On the system of astronomical constants. A. J., 53, 1170.
- Crommelin A. 1911. Determination of the Moon's Parallax from Meridian Observations of the crater Moetius A at the Royal Observatories Greenwich and the Cape of Good Hope in the Years 1909—1910. M. N., 71.
- Harkness W. 1891. The solar parallax and its related constants, including the figure and density of the Earth.
- Henderson T. 1838. The Constant Quantity of the Moon's Equatorial Horizontal Parallax, deduced from Observations made at Greenwich, Cambridge and the Cape of Good Hope in 1837 and 1839. Mem. Astr. Soc., 10.
- Jeffreys H. 1948. On the figures of the Earth and Moon. (Third paper). M. N. 5 Geophys. Suppl., 7.
- Lambert W. D. 1928. The figure of the Earth and parallax of the Moon. A. J., 38, 908.
- Laplace, 1814. Mécanique céleste, III.
- Newcomb S. 1892. A Transformation of Hansen's Lunar Theory compared with the Theory of Delaunay. Astr. Pap., 1, Washington.
- Newcomb S. 1895. The Elements of the four Inner Planets and the Fundamental Constants of Astronomy. Suppl. Amer. Eph., 1897, Washington.
- Newcomb S. 1912. Researches on the Motion of the Moon, part II. Astr. Pap., 9, 1.
- Olferssen 1857. Untersuchungen über den Werth der Mondparallaxe, den in die aus der Mitte des vorigen Jahrhunderts angestellten correspondirenden Beobachtungen abgeleitet werden kann. A. N., 14, 326.
- Rabe E. 1950. Derivation of fundamental astronomical constants from the observations of Eros during 1926—1915. A. J., 55, 1194.
- Seidel L. 1859. Aus einem schreiben des Herrn Professor Seidel an den Herausgeber. A. N., 50, 1193.
- De-Sitter W. 1927. On the most probable values of some astronomical constants. B. A. N., 4, 129.
- De-Sitter W. 1928. On the system of the astronomical constants. B. A. N., 8, 307.
- Spencer Jones H. 1930. A Revision of Newcomb's oscillation Memoir. M. N., 60.
- Stone E. J. 1866. Constant of Lunar Parallax. Mem. Astr. Soc., 34.
- Woolard G. P. 1950. The Gravity meter as a geodetic instrument. Geophysics, 15, 1.

Получено в Редакцию
2 июня 1956 г.

Утверждено к печати
Институтом теоретической астрономии
Академии наук СССР

Технический редактор М. Е. Зендаев
Корректоры Н. П. Мислов и А. К. Каламжиани

Рис. АН СССР №18—2В. Подписано к печати 5 III 1957 г., М. 12210. Бумага 84 × 108. №. Бум. А. 2.
Печ. л. 73. Уч.-изд. л. 8,18 ± 3 вкл. (1,24 уч.-изд. л.). Тираж 1000. Заказ 885. Цена (с р. 05)
1-я Тир. Изд. АН СССР, Ленинград, В-34, 9 л., л. № 12.

СОДЕРЖАНИЕ

| | Стр. |
|--|------|
| И. Д. Жонголович. Потенциал лунного притяжения | 505 |
| Ю. В. Батраков. Периодические движения частицы в поле тяготения вращающегося трехосного эллипсоида | 524 |
| В. К. Абахаев. К вопросу об устойчивости точки либрации в окрестности вращающегося гравитирующего эллипсоида | 543 |
| М. С. Лисовская. О траекториях полета ракеты вокруг Луны | 550 |
| Ф. Х. Перди. Постоянная лунного параллакса | 566 |

**АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ТРУДЫ ГЕОЛОГИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА**

Выпуск 6

Е. Д. ЗАКЛИНСКАЯ

**СТРАТИГРАФИЧЕСКОЕ ЗНАЧЕНИЕ
ПЫЛЬЦЫ ГОЛОСЕМЕННЫХ
КАЙНОЗОЙСКИХ ОТЛОЖЕНИЙ
ПАВЛОДАРСКОГО ПРИИРТЫШЬЯ
И СЕВЕРНОГО ПРИАРАЛЬЯ**

**ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА**

А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р

ТРУДЫ ГЕОЛОГИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

Выпуск 6

Е. Д. ЗАКЛИНСКАЯ

СТРАТИГРАФИЧЕСКОЕ ЗНАЧЕНИЕ
ПЫЛЬЦЫ ГОЛОСЕМЕННЫХ
КАЙНОЗОЙСКИХ ОТЛОЖЕНИЙ
ПАВЛОДАРСКОГО ПРИПРТЫШЬЯ
И СЕВЕРНОГО ПРИПРАЛБЯ

2-я ТИПОГРАФИЯ
Издательства Академии Наук СССР
Москва, Шубинский пер., д. 10

При обнаружении недостатков
в книге просим возвратить книгу
вместе с этим ярлыком для обмена



ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА - 1957

Ответственный редактор
В. П. Гричук

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время метод спорово-пыльцевого анализа прочно завоевал положение в науке как один из палеоботанических методов исследования.

Песчаные пыльца, споры, семена, отпечатки листьев и древесины растений в одинаковой мере интересуют палеоботаников и как документы для восстановления картины последовательного развития флоры и растительности и как материал для обоснования стратиграфического расчленения осадочных отложений морского и континентального происхождения.

По мере изучения песчаных растительных остатков (как микроскопических, так и макроскопических) постепенно находитесь ясность, связывающая отдельные этапы истории формирования флоры, а также намечаются пути к познанию происхождения и становления современной растительности различных ботанических областей.

В литературе в настоящее время известно немало работ, затрагивающих в той или иной степени вопросы методики изучения пыльца и спор в спорово-пыльцевых спектрах третичных отложений, хотя у нас в Советском Союзе третичные отложения методом спорово-пыльцевого анализа стали систематически изучаться лишь с начала 40-х годов.

В настоящее время опыт широкого применения спорово-пыльцевого анализа в области изучения третичных отложений оправдал себя для стратиграфических и палеофлористических целей. Построение схемы стратиграфического расчленения третичных отложений и их континентальных, соленоморфных и морских фаций уже не мыслится без биостратиграфической основы, для которой материал по песчаным спорам и пыльце является одним из основных.

Метод комплексного исследования опорных разрезов третичных и четвертичных отложений становится обязательным в научно-исследовательских работах, так как только детальное изучение опорных разрезов (стратиграфии которых фаунистически обоснована), вскрытых на территориях, располагающихся в третичный период — в различных ботанико-географических областях, а в четвертичный период — в различных флорно-географических зонах, позволяет установить последовательность становления флоры и растительности во времени и пространстве.

Одним из наиболее важных вопросов в области спорово-пыльцевого анализа в настоящее время является разработка метода сопоставления спорово-пыльцевых спектров, выделенных из разновозрастных отложений в районах, значительно удаленных один от другого и находящихся в различных современных ботанических областях, а в третичное время располагавшихся в различных ботанических областях или ботанико-географических провинциях, в понимании А. П. Криштофовича.

Выделенные А. П. Криштофовичем (1941, 1946) ботанико-географические области и провинции палеогена, значительно различающиеся по

характеру флоры, достаточно ясно указывают на то, что в пределах северного полушария палеогеновая флора не была одинаковой на различных территориях и одни и те же отрезки геологического времени, и что поэтому прямое сопоставление флористических горизонтов по составу обнаруженных в них растительных остатков может привести к ошибочным выводам.

Последними работами в области спорно-пыльцевого анализа (Покровский, 1954; Заклинская, 1953) намечена первоначальная схема примерного расположения различных флористических провинций на территории СССР, а также первоначальная схема вертикального распределения руководящих спорно-пыльцевых спектров в различных регионах на территории СССР в палеогене и неогене. Н. М. Покровский (1954) на основании обобщения данных спорно-пыльцевого анализа предположительно выделяет, например, Европейскую, Средне-Азиатско-Сибирскую, Казахстано-Восточносибирскую и Дальневосточную геоботанические провинции, отличающиеся одна от другой характером спектров и флористической принадлежностью их.

Автор настоящей работы в докладе на Второй Всесоюзной конференции по спорно-пыльцевому анализу отмечал значительные флористические различия однообразных палеогеновых спектров из опорных разрезов различных районов юга Европейской части СССР и Казахстана: южные палеогеновые спектры юга Европейской части СССР отражают флору тропическую, в основном древнесредиземноморскую, казахстанские же однообразные спектры уже в середине палеогена характеризуются флорой смешанной, включающей элемент северо-восточных азиатских умеренных поясов. Среднеазиатские спектры юга Европейской части СССР характеризуют флору в основном древнесредиземноморскую, с небольшой примесью умеренной тургайской, казахстанские же среднеазиатские спектры почти полностью представлены пыльцой спорами растений умеренной тургайской флоры, т. е. флоры, весьма близкой к южнотургайской флоре юга Европейской части СССР.

Таким образом, в настоящее время достаточно ясно представляется вся сложность вопроса сопоставления однообразных отложений по флористическим данным и возникает необходимость разработки детальных местных палеофлористических схем, которые в дальнейшем могут послужить основой для создания общей палеофлористической шкалы в целях корреляции однообразных отложений на удаленных территориях.

Попытка Н. М. Покровской выделить геоботанические провинции в пределах крупных флористических областей является бо́льшим шагом вперед в области палеоботанических исследований. Выделение различных флористических провинций палеогена и неогена, по-видимому, — один из правильных путей к разрешению задачи сопоставления однообразных горизонтов по флористическим данным, тогда, когда эти горизонты охарактеризованы спорно-пыльцевыми спектрами различного состава.

К сожалению, несмотря на то, что сама идея указывала пути развития спорно-пыльцевого анализа как научной области палеоботаники, существование методики и техника определения ископаемых форм еще не всегда позволяют полностью использовать все собранные материалы. До сих пор мы располагали и, по-видимому, еще много лет будем располагать лишь весьма ограниченными возможностями для определения ископаемых пыльцы и спор до вида. Происходит это от того, что пыльца современных растений, в особенности субтропических и тропических, изучена еще очень слабо. Между тем правильность определений ископаемых пыльцы и спор тропических и четвертичных растений почти целиком зависит именно от этого обстоятельства.

На основании многолетних исследований А. Н. Криницкого, Е. В. Вульфа, В. Н. Сухачева, М. М. Ильина и других ученых установ-

лено, что элементы современной флоры имеют чрезвычайно много общих форм с третичными и даже верхнемеловыми комплексами. В особенности это относится к области палеотропиков, где, по мнению наших крупных палеоботаников и флористов, третичная флора по настоящее время осталась почти без изменений. В умеренных широтах в течение всего кайнозоя под влиянием изменений общей физико-географической обстановки и флоры неоднократно менялась наряду с перераспределением границ растительных провинций и зон. Стояние современной флоры происходит не одновременно в различных регионах. В северном полушарии основной комплекс третичных субтропических семейств, родов и видов растений, типичный общим похолоданием, частотной аридизацией, а затем увеличением континентальности климата, отступает к южным широтам, уступая место умеренным северо-восточным флорам. В то же время по севернее сокращение площади, занятой морскими водами, изменение конфигурации материков и их рельефа, происходит постепенно и неодинаково в различных районах, создавая специфические условия для развития ландшафтных зон. Например, территория Казахстана уже в среднем олигоцене представляла собой сушу, на которой развивалась растительность, отчасти лесная, листопадная, или полудеревянная и сухостепная на участках с выровненной поверхностью и с бессточными, щебе-стыми грунтом (возможно, с солончочными почвами).

На юге же Европейской части СССР, например на территории Азово-Кубанской низины, в это время было еще глубокое море, в котором отлагались мощные осадки. Море окончательно ретрессировало отсюда лишь в конце палеогена, после неоднократных воцарениях ледников. Естественно, что лишь к этому времени можно отнести заселение данной территории растительностью, которая в связи с пучением границ мелового моря неоднократно меняла свой состав и только в конце палеогена, когда общие физико-географические условия приблизились к современным, стала приобретать состав так же, близкий к современному.

Несмотря на то, что состав растительности и границы распространения различных фитоценологических единиц неоднократно изменялись в течение кайнозоя, сохранились до наших дней те основные роды растений, которые входили в состав тургайской умеренной флоры и южной средиземноморской флоры, сформировавшиеся в течение кайнозоя путем смещения древнесредиземноморской, восточноазиатской, китайской и других флор.

Таким образом, определение родов ископаемых пыльцы и спор может и должно производиться путем сравнения с пыльцой и спорами современных родов, точно так же, как это делается при определении ископаемых листовых отпечатков и остатков растений палеофлоры.

При сопоставлении ископаемых пыльцы и спор с атлантическими сравнительными коллекциями пыльцы и спор современных видов растений мы наблюдаем, что эти виды и подвидовое большинство случаев имеют общие морфологические черты, что указывает на их близкое родство.

В то же время относительная бедность наших лабораторий сравнительных коллекций и ограниченность нашей литературы по морфологии пыльцы не позволяют исследователям в ряде случаев довести определение ископаемого материала не только до вида, но и до рода. Иногда же выделенные формы остаются определенными только до семейства или даже до класса. Некоторые формы приходится группировать лишь по морфологическим признакам. Такие условно определенные формы уже не могут быть использованы для флористических реконструкций и имеют лишь стратиграфическую ценность, характеризуют отдельные горизонты однообразных отложений в пределах только одной и той же физико-географической области, провинции или подобласти.

Не так давно В. А. Вахрамеев в своей работе о состоянии советской палеоботаники (1953) высказал мысль о том, что списки спорово-пыльцевых спектров, составленные из родовых названий, совершенно недостаточны для характеристики отдельных слоев и свит и что использование таких списков для характеристики флоры отдельных отрезков геологического времени нецелесообразно, так как большинство растительных видов этих родов обладает широким горизонтальным и вертикальным распространением. Это не совсем так. Безусловно, видовое определение пыльца и спор необходимо при изучении молодых палеозойских и тем более четвертичных отложений. Не вызывает также сомнения и то, что недостаточно точно определенное систематическое положение той или иной ископаемой формы лишает возможности использовать данные анализа для реконструкции дробных элементов ландшафта. Но все же спорово-пыльцевые спектры, представленные родовыми названиями или включающие компоненты, систематическое положение которых определено лишь до семейства, пригодны для стратиграфических целей.

Ботаникам хорошо известно, что основной единицей для характеристики флористических подразделений признается семейство (Алекси, 1950). Научая ареалы различных семейств и родов, удалось установить границы современных ботанических областей. Известно, например, что часть семейств, таких как *Rubiacae*, *Umbelliferae*, *Ebenaceae*, *Cactaceae*, *Cephalotaceae* и др., являются чисто тропическими, и некоторые роды этих семейств приурочены к тропическим же широтам различных стран. Так, например, некоторые роды семейства *Cactaceae*, *Bromeliaceae* встречаются только в Южной Америке, отдельные же роды семейства *Cephalotaceae* приурочены только к Австралии. Такие роды семейства *Podocarpaceae*, как *Dacrydium*, *Phyllocladus* или семейство *Araucariaceae* известны только в западной части Австралийской ботанической области и т. д. Семейство миртовых по всем его многообразию приурочено в основном к Австралийской области, а обширный род этого семейства — *Eucalyptus* чуть ли не эндемичен для Австралии.

Таким образом, определенное сочетание группы семейств характеризует ботаническую область или подобласть, а следовательно, характеризует и общую физико-географическую обстановку какой-то определенной территории. Следовательно, спорово-пыльцевой спектр, включающий большое число компонентов, определенных лишь в пределах семейства, может служить и для флористических целей и для стратиграфического подразделения.

Очевидно, что чем менее схематично определение, тем ценнее данные спорово-пыльцевого анализа для дробного стратиграфического подразделения, так как определение пыльца и спор до рода или вида позволяет охарактеризовать не только флору, но и сумму неотличимых единиц, составляющих эту флору. Приуроченность определенных родов отдельных семейств к различным широтам земного шара позволяет выделить флористические подобласти, а распространение различных видов этих родов характеризует группы или отдельные палеозоны в этих подобластях. Последнее подводит нас к возможности судить о составе растительности определенных элементов рельефа и выделить отдельные ландшафтные единицы.

В применении к спорово-пыльцевому анализу определение родов дает возможность реконструировать флористический состав растительного покрова для сравнительно крупных стратиграфических интервалов (ярусов). Определение же видовое может дать возможность выделить коррелирующие спектры для деления на свиты и слои. Такое дробное подразделение будет в каждом отдельном случае применимо лишь для местного стратиграфического расчленения тогда как спектры, охарактеризованные определением

до семейства или рода, могут иметь гораздо более широкое значение, но для обоснования менее дробного расчленения.

Примером могут служить следующие схемы распределения спорово-пыльцевых спектров.

1. Спектры представлены голосеменными (20%), покрытосеменными (45%), спорами папоротников (35%). Голосеменные в основном представлены пылевой растительностью, принадлежащих к семействам *Araucariaceae*, *Podocarpaceae*, *Cupressaceae*, *Gnetales*, единично *Pinaceae* (преимущественно архаичные формы родов *Pinus* и *Picea*). Покрытосеменные представлены семействами *Myraceae*, *Proteaceae*, *Goodeniaceae*, *Leguminosae*, *Casuarinaceae*. Споры принадлежат растениям семейства *Cyatheaceae*, *Dicksoniaceae* и др. Такой спектр указывает на тропический облик флоры и характеризует нижнепалеогеновые отложения Припиратия, Казахстана, Западной Сибири, Тургайской впадины, отчасти южных районов Европейской части СССР.

2. Спектры представлены покрытосеменными (60%), голосеменными (25%) и спорами (15%). Покрытосеменные принадлежат к родам *Juglans*, *Pterocarya*, *Liquidambar*, *Nyssa*, *Betula*, *Alnus*, *Acer*, *Quercus*, *Ulmus*. Голосеменные преимущественно представлены пылевой растительностью родов *Picea*, *Pinus*, *Taxodium*, с небольшой примесью *Cedrus*, сем. *Cupressaceae*, *Polypodiaceae* и в небольшом количестве — *Sphagnum* (?). Эти спектры характерны для среднего олигоцена в Северном Припиратии и Северном Припиратии (первая и вторая свиты континентального олигоцена), для Европейской же части СССР спектры, подобные этим, характеризуют миоцен.

3. Спектры в основном представлены покрытосеменными (88%), голосеменными (10%), спорами (2%). Для покрытосеменных характерно присутствие *Artemisia* cf. *dracunculifolia*, *A.* cf. *pedunculata*, *A.* cf. *subsessingiana*, *Calligonum* cf. *palotzkianum*, *Atriplex* cf. *cana*, *Kochia* cf. *scoparia*, *Salsola* aff. *soda*, *Ferula* aff. *assa foetida*, *Nitraria* cf. *Schoberi* при участии *Rhus* sp., *Proteaceae*, *Betula* sp., *Pinus* cf. *silvestris*, *Cotinus* и др. Такие спектры принадлежат ассоциациям полупустынных местообитаний верхнеолигоценового времени и характерны только для отложений несапо-алевритовой свиты верхнего олигоцена, на границе с нижним миоценом в Северном Припиратии. Эти спектры по своему составу близки к спектрам четвертичных отложений этого района. Но современные спектры не имеют примеси тургайской флоры и гораздо беднее примесью пыльца древесных пород, потому что в четвертичное время древесная растительность в Северном Припиратии была представлена лишь газетерными лесами или рощами вдоль некоторых рек.

Приведенные спектры резко отличны от верхнеолигоценовых спектров южной части СССР (верхний майкон Северного Кавказа), которые имеют ничтожную примесь пыльца трав, а в основном состоят из пыльца древесных пород. Среди небольшого количества пыльца трав обычно присутствуют некоторые роды сем. *Cyperaceae*, но в основном пыльца трав принадлежит луговому комплексу.

Таким образом, мы на наглядном примере можем убедиться в том, что спорово-пыльцевые спектры, при большей или меньшей детализации определений, представляют для целей стратиграфии большую, а порой незаменимую, ценность, так как во многих случаях данные спорово-пыльцевого анализа являются единственной палеонтологической основой, при помощи которой можно синхронизировать отложения, определить стратиграфическое положение их и восстановить примерные черты растительного элемента ландшафта окружающей суши в период формирования изучаемых осадков.

Необходимо упомянуть о ландшафтных зонах и о растительности и флоре, восстановленной по данным спорно-пыльцевых анализов. В литературе, посвященной спорно-пыльцевым исследованиям и флористическим построениям, мы неоднократно встречаем такие выражения, как: «...в течение олигоценового времени на территории южной зоны Европейской провинции были распространены широколиственные леса» или «...на территории Казахской провинции произрастали широколиственные леса...» (Покровская, 1954, стр. 246). Это не точно! И вот почему. Анализируя спорно-пыльцевые спектры третичных отложений (или отложений иных эпох), мы в ряде случаев имеем дело с морскими осадками, формированными в продолжение десятков тысячелетий на дне обширных морских бассейнов. Именно с такими морскими осадками связаны спорно-пыльцевые спектры олигоценового периода южной зоны Европейской провинции (майкопское море) и большей части Казахской провинции (четанское море). Никакой растительности, разумеется, на этих пространствах в то время не было. Пыльца же и споры, обнаруженные в морских отложениях, принадлежали растениям, произраставшим на территориях материков или островов, берега которых омывались этими морями.

Таким образом, анализируя спорно-пыльцевые спектры из морских отложений, мощность которых на Кавказе, в Крыму и Приазовье достигает нескольких сотен метров, а в Северном Прииртышье и в Западной Сибири — нескольких десятков метров, следует учитывать, что флора, восстанавливаемая по этим спектрам, относится не к точкам находок, а к участкам суши, расположенным на расстоянии десятков, а может быть, и сотен километров от этих точек. Это следует учитывать при составлении карт распределения растительности, хотя бы и схематических, которые должны соответствовать общей палеогеографической схеме изучаемого района. Анализируя спорно-пыльцевые спектры, полученные из фациально различных континентальных отложений, мы имеем дело с комплексами пыльцы и спор растений, произраставших в основном вблизи от места формирования этих отложений. В этих случаях спорно-пыльцевые спектры более или менее точно отражают не столько характер флоры, но и состав растительности территорий, ближайших к пунктам исследования.

Анализируя же морские отложения, особенно глубоководных фаций, мы выделяем спектры, дающие суммарное отражение характера растительного покрова суши, омываемой морем. При этом пыльца и споры, принесенные в море попутным и воздушным путем, могут принадлежать растениям, входящим в состав самых разнообразных ценозов или групп их. Поэтому спектры из морских отложений обычно содержат наиболее богатые и видовом отношении комплексы пыльцы и спор, смешанный состав которых не дает твердых оснований к реконструкции растительности. Такие спектры дают в основном лишь флористические характеристики. На основании анализа спектров из глубоководных отложений сделать вывод относительно состава растительности ближайших территорий можно лишь в предположительной форме, и то имея материал по спорно-пыльцевым спектрам или по макроскопическим остаткам из одновозрастных континентальных отложений ближайших территорий. Параллельные исследования растительных остатков из одновозрастных континентальных или прибрежно-водных отложений ближайших территорий могут помочь в отыскании источников сноса пыльцы и спор на место морских отложений.

Опыт таких параллельных исследований был произведен Н. А. Болховитиной (1953) для меловых отложений и автором настоящей работы, совместно с В. П. Барановым, — по району Северного Приаралья и западных склонов Мугоджар. Автор проанализировал спорно-пыльцевой анализ отложений морского палеогена (тасаранская свита), В. П. Баранов — анализ отпечатков листьев и сохранившихся древесных остатков, а также

пыльцу и спор из континентальной фации этой же свиты. По флористической близости и по совпадению отдельных родов, к которым принадлежали растительные остатки в том и другом случае, можно было убедиться, что одним из основных источников сноса пыльцы и тасаранское море Северного Приаралья были отроги Мугоджар, которые в то время были сушей (Баранов, 1953).

Вторая конференция по спорно-пыльцевому анализу 1953 г. показала, насколько продвинулось вперед изучение спор и пыльцы кайнозойских отложений вообще и, в частности, третичных. Огромный фактический материал, содержащийся в докладах представителей геологических научно-исследовательских институтов Академии наук СССР, Министерства геологии, Министерства нефтяной промышленности, университетов и др., может уже служить основой для больших сводных работ. Общим недостатком большинства исследований кайнозойских спорно-пыльцевых спектров является отсутствие морфологических описаний ископаемых пыльцы и спор. В этом отношении работы в области спорно-пыльцевого анализа несколько отстают от общей системы палеонтологических исследований. Между тем, занимаясь палеофлористическими реконструкциями, специалисты по спорно-пыльцевому анализу обязаны фиксировать и документировать свои находки, не ограничиваясь словесным перечнем обнаруженных форм, и создавать, таким образом, фонд для справочного материала.

Изучение растительных остатков в районах, соседних с Северным Приаралем и Прииртышьем, ведется в течение многих десятилетий. Еще в 1858 г. Г. В. Абих опубликовал материал по растительным отпечаткам на киргизских степях, собранным А. Н. Антиповым из углей отложений у источника Жар-Куде и определенным О. Герром. Последующими работами в Приаралье, Казахстане, Тургае, Прииртышье, в Средней Азии (Герр, 1858; Берг, обработка Налибина, 1906; Криштофович и Налибин, 1915; Пейбухт, 1928; Боирунус, обработка Поирковой, 1932, 1935; Боирунус, 1935; Ханадзе-Джебуадзе, 1948; Мислишвили, 1948 и 1949, г.; Корнилова, 1950, г.; 1952, г.; 1955, г. и др.) было открыто большое разнообразие умеренно листопадных и жестколистных субтропических флор. Этими работами установлено бесспорное существование двух типов флор палеогена на территории Северного Приаралья, Тургаи и Зайсана и отчасти Центрального Казахстана. Более древний комплекс флор, по сходству их с жестколистной субтропической древней палеогеновой флорой Украины, А. Н. Криштофович (1946) назвал палеогеной флорой, или аналогичной ей. Более молодую умеренно листопадную, не включавшую элементы тропических жестколистных флор, А. Н. Криштофович назвал тургайской флорой на основании главных находок этой флоры в Тургае.

К сожалению, не всегда было надежно стратиграфическое положение находок, и поэтому долгое время эти флоры имели проблематический позитив. В основном определение находок делось по сравнению с известными и хорошо изученными флорами Западной Европы, и только А. Н. Криштофович неоднократно отмечал различие в составе одновозрастных флор из фаций отстоящих одно от другого местонахождений. Однако и к А. Н. Криштофовичу не всегда попадал надежный датированный материал. Обилие растительных остатков в отложениях континентальных фаций верхних горизонтов палеогена и многообразие находок отпечатков растений в песчано-кварцитовых фациях его нижних горизонтов привлекали и привлекают по сию пору внимание многих палеоботаников, которые в большинстве случаев (по крайней мере так было до 40-х годов) полагались на определения возраста флороносных горизонтов, данные геологами, собравшими материал, а определения эти были не всегда точны.

Примером может служить не разрешенный до сих пор вопрос о соотно-

шений различных горизонтов континентальных отложений Тургай и соседних с ним районов. Некоторые геологи разделяют вторую свиту континентального олигоцена (шидрикогерисовую свиту) на три подсвиты (Лавров, 1951; Абузярова, 1954), другие приходят к выводу о возможности двухчленного деления этой же свиты (Бойцова и Покровская, 1954).

Критический разбор различных схем стратиграфического расчленения континентальных отложений требует особого внимания, и ему будет посвящен специальный раздел в общей сводной работе, здесь же автор останавливается на нем лишь для демонстрации неосторожного применения палеонтологического метода обоснования стратиграфии, когда флористические данные приравниваются к заранее составленной схеме. Схемы же эти еще требуют доработки.

Во всяком случае не будет ошибочным считать, что в 40—50-х годах началось систематическое изучение классических местонахождений флоры и появилось стремление к более точному определению ее стратиграфического положения, для того чтобы эта флора могла в дальнейшем быть действительно руководящей при расчленении осадочных отложений.

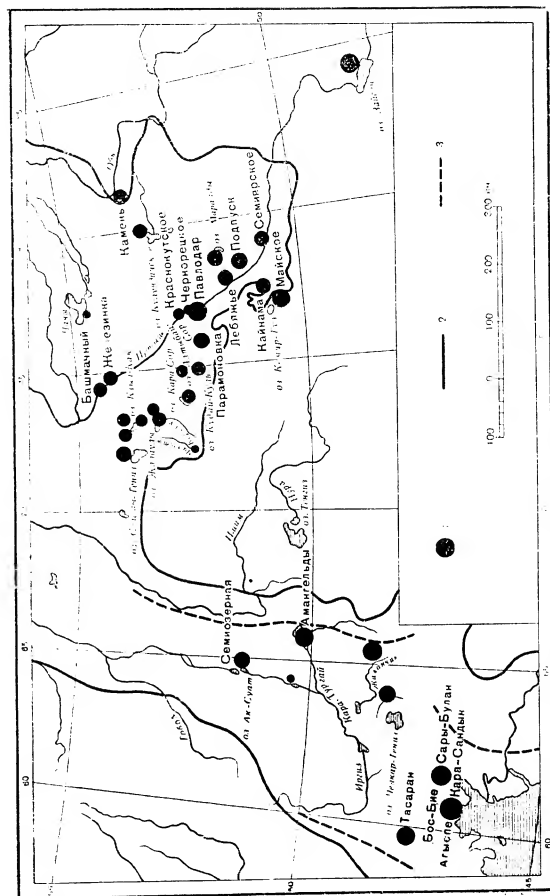
Систематическое изучение ископаемых растительных остатков совпадает с периодом развертывания работ по детальному изучению континентальных и морских отложений Тургай, Северного Приаралья, Северного и Центрального Казахстана и Западной Сибири, где ставится вопрос и ведется разведка полезных ископаемых, связанных с этими отложениями. В этот период, период наших дней, широко применяется метод споропопыльцевого анализа. Существующие в настоящее время схемы расчленения руководящих споропопыльцевых спектров палеогена Тургай (Бойцова и Покровская, 1954; Абузярова, 1954^{1,2}; Ракинникова, 1956) касаются в основном континентальных отложений и ставят перед собой задачу обоснования детального их расчленения.

В 1953 г. появилась первая работа автора о результатах споропопыльцевых анализов морских и континентальных отложений Павлодарского Прииртышья (Заклинская, 1953³), а затем — работа о споропопыльцевых спектрах морских отложений палеогена Северного Приаралья (Заклинская, 1953⁴). В этих работах автор делает попытку выделить характерные споропопыльцевые спектры, которые могли бы служить для характеристики изменения флоры в течение палеогена и отчасти неогена и для корреляции разновозрастных отложений Арало-Тургайской и Прииртышской впадин.

В процессе дальнейших исследований автор пришел к выводу, что флористически близкие спектры Павлодарского Прииртышья и Северного Приаралья в ряде случаев различаются по своему составу. Корреляция таких спектров возможна лишь при тщательном изучении видового состава ископаемых спор и пыльцы и лишь путем сопоставления массового материала, собранного из различных фаций разновозрастных отложений. Такая работа автором ведется. В процессе ее вылилось самостоятельное исследование пыльцы голоосеменных, которая, как это будет видно из дальнейшего изложения, может применяться для целей корреляции разновозрастных осадочных отложений.

Имея в своем распоряжении местные схемы стратиграфического положения свит морского и континентального палеогена, используя полевые наблюдения и отклинув на время определение возраста этих свит, автор попробовал произвести анализ последовательного распространения голоосеменных, входящих в состав споропопыльцевых спектров, полученных в результате обработки опорных и сводных разрезов.

Преследуя от горизонта к горизонту состав голоосеменных, автор поставил своей целью наметить первоначальную схему типов спектров, характерных для времени формирования отложений каждой из исследованных



Фиг. 1. Основные пункты, в которых были исследованы тургайские и северноприаральские отложения. 1 — пункты работ; 2 — граница осадочного моря; 3 — предполагаемая граница осадочного моря.

свит. В выделенных типах или группах спектров интересно было выявить роды или, где это было возможно, виды или секции голосеменных, которые играли роль руковоющих в общей флоре и в растительном покрове различных ценозов. Таким представлялся путь, которым можно подойти к выделению видов и родов голосеменных, могущих иметь коррелирующее значение для стратиграфического расчленения кайнозойских, в данном случае — палеогеновых отложений.

В 1950 г. Отделом четвертичной геологии Института геологических наук Академии наук СССР под руководством К. В. Пиквиной было начато детальное изучение геоморфологии и геологического строения Припиритышской впадины. Геологи Северного Припиритыша представили и монографическое сводное А. И. Ишнина (1953), очерки геологического строения и палеогеографии Тургай даги в статьях В. В. Павлова (Павлов и Соболева, 1948; Павлов, 1949; Овечкина 1954, 1955).

Спорово-пыльцевые анализы велись по материалам, собранным К. В. Пиквиной, А. И. Ишниным, В. П. Самодуровым и автором. Описание и разрезы обнажений и выработок, из которых серийно отбирались пробы для анализов, и данные по цифровым подсчетам, в настоящем сообщении не приводятся, так как этому отведена специальная глава в сводной работе. Описание же сводного опорного разреза, суммарные данные по распределению спорово-пыльцевых спектров в различных горизонтах этого разреза и основные палеофлористические выводы приводятся ниже для Павлодарского Припиритыша и Северного Припиритыша, а также отчасти для некоторых пунктов Тургайской впадины.

Всего исследовано 42 естественных обнажения, 8 скважины и 5 зачеток; проанализировано 700 проб, из которых большинство оказались в той или иной мере пылевыми. Дополнительно были проделаны единичные анализы из обнажений, расположенных по восточному борту Тургайского прогиба; на р. Диканчик (у мегалы Ракмет) — материалы В. П. Самодурова; уроч. Амангельды — материалы Н. А. Лисицкой; из месторождения Ану-Тасты — материалы В. П. Разумовой; оз. Ану-Тасты — материалы М. Ф. Пейбура. Перечисленным комплектам приношу большую благодарность за интересный и ценный материал.

Все эти материалы были технически обработаны в лаборатории спорово-пыльцевого анализа Отдела четвертичной геологии Института геологических наук Академии наук СССР лаборантом Н. П. Звездиной¹ при помощи сепарационного и ангидридного метода В. П. Гринчука. Фотографирование объектов произведено заведующим фотолaborаторией Отдела стратиграфии ПГН АН СССР А. И. Никитиным и техником Гидропроекта Н. В. Смирновым. Все определения, подсчеты, описания и зарисовки произведены автором за время трехгодичной обработки материалов.

В Павлодарском Припиритыше изучены спорово-пыльцевые спектры из разрезов на оз. Селеты-Тениз (обн. 42, 1952 г.), оз. Кыз-Как (обн. 44, 47, 48, 1952 г.), оз. Жалаулы (обн. 15, 16, 43, 1952 г.), оз. Кудай-Куль (шурф 1, скв. 1, 1951 г.), оз. Алтыбай-Сор (обн. 102, 1953 г.), оз. Кемир-Туз (обн. 128, 129, 1326, 1951 г. и обн. 6, 6а, 7, 1952 г.), пос. Кайнама (скв. 181, 1951 г.), пос. Подпуск (скв. 3, 4, 5, 1950 г.), пос. Парамонина (скв. 1 и 2, 1951 г.), г. Павлодар (скв. 3, 1951 г.), оз. Маралды (обн. 177, 1951 г. и 66, 66а, 1952 г.), пос. Майское-Семиарское (обн. 182, 1951 г.), р. Чидерты (обн. 55, 1951 г.), правый берег р. Иртыша (обн. 4, 10 и 12, 1952 г.) и ряд мелких обнажений, зачеток и шурфов в промежуточных пунктах между этими обнажениями (фиг. 1).

¹ Дополнительную серию анализов по Припиритышу производил старший лаборант Г. М. Братцева.

1. КРАТКИЙ ОЧЕРК ГЕОЛОГИИ И ПАЛЕОГЕОГРАФИИ ПАВЛОДАРСКОГО ПРИПИРТИШЬЯ И СЕВЕРНОГО ПРИПРАЛЬЯ И НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О ГЕОЛОГИЧЕСКОМ СТРОЕНИИ ТУРГАЙСКОЙ ВПАДИНЫ

Павлодарское Припиритыше, так же как Тургайское и Северо-Припиритышское, было областью широкого развития осадочных отложений различного генезиса, с которыми связан ряд полезных ископаемых.

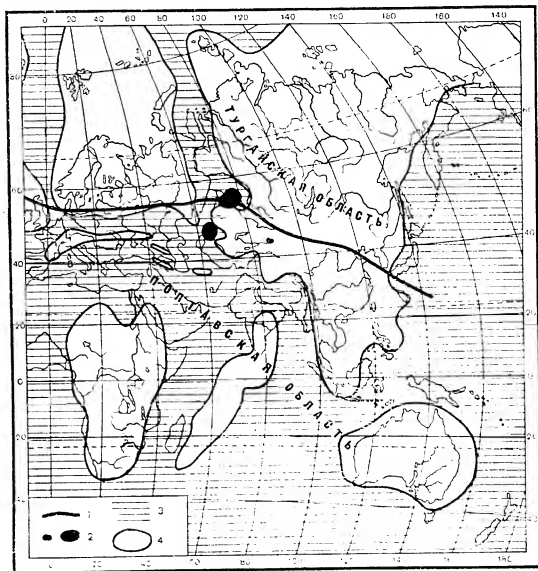
Общее направление и истории формирования осадочных толщ, синхронно с развитием тектонических движений, синхронно развивавшихся по всем этим районам, позволяет проводить корреляцию осадочных отложений.

В нижнем палеогене перечисленные районы представляли в большей своей части дно обширных морей — эоценового, а затем олигоценно-эоценового, связанных Тургайским проливом с северным океаном и древним средиземноморским бассейном. Моря эти омывали берега огромного полуострова, занимавшего территорию нынешнего Казахского нагорья (Киргизии), а также южные оконечности Европейского материка (Мугуджары). На юге располагались острова Босфорского и Средней Азии.

Начиная со среднего олигоцена море начало регрессировать, освобождая постепенно все большие и большие участки суши и направляя на север и на запад от Казахского нагорья. Море неоднократно меняло свои очертания, и были периоды, когда оно снова заливало берега и снова отступало, оставляя после себя медоводные осадки с фауной акулы и раковинами моллюсков. Окончательно установился континентальный режим в Павлодарском Припиритыше в начале среднего олигоцена. В Северном Припиритыше в среднем олигоцене еще существовали обширные солоноватоводные бассейны, тесно связанные с основным при-Аральским озером-морем; здесь только к концу можно считать континентальный режим окончательно установившимся (Вахрамеев, 1941, 1949; Ишнин, 1953).

Северное Припиритышское и граничат с Казахским нагорьем, которое в течение всего кайнозоя было суше. Надо полагать, что в основном Казахское нагорье было центром распространения флоры и фауны, развивавшейся в морские и солоноватоводные отложения этих районов. Поэтому можно было заранее предполагать, что во флористическом отношении спектры, выделенные из морских отложений Северного Припиритыша и Павлодарского Припиритыша, должны иметь много общих форм. Однако западные положения Припиритыша и относительная близость к нему выступа суши Мугуджар, растительность которых также была источником флоры и фауны, позволяли полагать, что спектры Припиритыша и Припиритыша будут отражать растительность различных формаций.

А. Н. Криштофович (1946) в своей работе об эволюции растительного покрова отмечал, что при сопоставлении флористических данных из удаленных районов необходимо давать себе ясный отчет о различии понятий «флора» и «растительность» и не упускать из вида существование в прошлом различных формаций, которые могли сменяться в пределах одной и той же флоры.



Фиг. 2. Фитогеографические области в палеогене (по А. Н. Криштофовичу).
1 — граница Тургайской и Паннонской фитогеографических областей; 2 — районы работ;
3 — море; 4 — суша

В то время, когда на месте Павлодарского Прииртышья было расположено эоценовое море, граница между Паннонской тропической и Тургайской умеренной ботанико-географическими провинциями (областями) проходила примерно близ южной части долины нынешнего Иртыша и далее — к Среднему Уралу, Москве, Ленинграду, Дании и Британским островам (фиг. 2). Таким образом, Северное Приаралье и Тургайское плато целиком входили в область тропическую; Павлодарское Прииртышье было расположено на границе этих двух областей. Западно-Сибирская низменность находилась несколько севернее этой границы, т. е. уже в Тургайской умеренной области (в южных ее пределах). Эти обстоятель-

ства на фоне некоторой общности физико-географической обстановки и тектонического режима создавали своеобразные условия формирования морских, континентальных и солоноватоводных осадков в этих районах. Это необходимо учитывать при сопоставлении данных спорово-пыльцевых анализов данными по макроконическим растительным остаткам, так как состав растительности и даже флора Павлодарского Прииртышья, Северного Приаралья, Тургай и Западной Сибири в палеогене и неогене могли быть несколько различными.

ПАВЛОДАРСКОЕ ПРИИРТЫШЬЕ

Прииртышская впадина, частью которой является Павлодарское Прииртышье, расположена по северо-восточной границе Казахского нагорья. С востока она примыкает к Западно-Сибирской низменности, а с запада граничит с Тургайским плато и с Северным Приаральем.

Геоморфологическое строение Павлодарского Прииртышья, по данным К. В. Никифоровой (1953), представляется в следующем виде.

Граничащее на юге с Прииртышской впадиной Казахское нагорье состоит из двух структурных областей: горно-холмистой, сложенной палеозойскими породами и являвшейся в мезозое и кайнозое областью сноса, а в период палеогеновых морских трансгрессий оставшейся сушей, и области приподнятого плато, крайней зоны Казахского нагорья, которая была сушей вплоть до трансгрессии олигоценового моря.

По краю Казахского нагорья протягивается узкой полосой так называемая палеогеновая равнина, которая целиком заливается эоценовым и нижнеолигоценным морями. Далее к северу и северо-востоку расположена так называемая неогеновая озерно-аллювиальная равнина, которая заливается в эоценовом и олигоценном морях, а в миоцене была областью широкого развития озерных континентальных отложений, перекрытых в последующие века плиоценовыми и четвертичными осадками.

Горно-холмистая область и область приподнятого плато Казахского нагорья, а также палеогеновая равнина, расположенная по краю нагорья, в палеогене претерпевали тектонические поднятия, что послужило причиной того, что они, либо целиком, либо частично (как это отмечает К. В. Никифорова для области палеогеновой равнины), оставались сушей в период морских трансгрессий.

Область неогеновой озерно-аллювиальной равнины оставалась в состоянии относительного покоя, вследствие чего здесь шло более или менее непрерывное накопление как морских, так и континентальных осадков. В этой области в основном и приурочены все пункты, из которых производились спорово-пыльцевые анализы, так как в них наиболее полно представлены все фации морских и континентальных отложений, от палеогена до четвертичных.

Последовательное залегание пород в районе Прииртышской впадины, выражающееся прекрасными разрезами в перечисленных пунктах и большим керновым материалом по скважинам, представляется (сверху вниз) в следующем виде (фиг. 3).

Подглауконитовая свита (мел — палеоген (2))

Тонкопесчанистые слюдистые глины, алевролиты и пески, залегающие на конгломератовидных песчаниках. Фаунистических находок нет. Пыльцевая флора носит признаки переходной от меловой к палеогеновой. Здесь обнаружено обилие спор, преобладающих над пылевой цветковых растений. Споры принадлежат к родам *Ceratopteris*, *Gleichenia*, *Dicksonia* и др. Голосеменные в основном представлены родами *Cedrus*, *Podocarpus*, *Dacrydium*.

верхнего эоцена. Подробный перечень всех форм, встречающихся в отложениях опоковой толщи, опубликован автором в работе 1953 г.

В верхних горизонтах толщи найдена пыльца *Capparidaceae*, *Leguminosae*, *Umbelliferae*, а также отмечена единичная находка пыльцы, морфологически близкой к пыльце современного рода *Welwitschia*. Находка пыльцы этого, до сих пор еще не разгаданного растения, которое в современной флоре известно только в пустыне Намиб в Южной Африке, чрезвычайно интересна. С точки зрения ландшафтных зон, Намиб — пустыня; по данным Кемпбела (1948), это пустыня с жарким климатом и особенно малым выпадением осадков. Е. В. Вульф (1944) отмечает, что в Намибе, несмотря на почти полное отсутствие осадков в виде дождей, весьма велика влажность воздуха и что гигантские листья величинны приспособлены к поглощению влаги из туманов и росы. На основании этого Е. В. Вульф приходит к выводу, что величинны является редиктовым растением, оставшимся от того времени, когда климат Южной Африки был более влажным. Во всяком случае находка пыльцы величинны в отложениях опоковой толщи Наклодарского Припиратинского предкавказья представляет большой интерес и, по-видимому, должна послужить материалом для специального исследования, тем более, что приправавание ее в эоцене отмечено не впервые. А. А. Чигуровой (1951) описано зерно величинны из эоценовых горючих сланцев в Западном Казахстане, а в 1954 г. Р. И. Абузарова (1954) также отмечает находку пыльцы этого растения в отложениях Шингужан в Тургае (по определению автора, эти отложения относятся к нижнему среднему олигоцену). При этом Р. И. Абузарова отмечает, что находка величинны соотвечает флоре *Sassafras*, *Sterculia*, *Capparidaceae* и *Cinnamomum*, свидетельствующая об аридности климата в период отложения осадков¹.

С другой стороны, в спектрах из опоковой толщи среди пыльцы голосеменных найдены *Cedrus*, а среди покрытосеменных — *Alnus* и *Corylus*, присутствие которых должно свидетельствовать о наличии местообитаний с относительно большой влажностью. Можно допустить, что пустынный и ксерофильный элемент флоры был приурочен к каким-то локальным условиям и что пустынно-ксерофильные растения составили редиктовые ассоциации, пережившие с верхнего мела (?).

Мощность отложений опоковой толщи около 25—30 м. Возраст свиты предположительно отнесен к верхнему эоцену. Сопопоставляется опоковая свита с отложениями саксаульской свиты А. И. Ишнина в Северном Приаралье. Однородности с этой свитой следует считать континентальные отложения слиянных джарыташских песчанников Южного Урала, кварцитовых песчанников Северного Казахстана в пределах Казахского нагорья, возможно, и песчанников горы Ули в Среднем Новозыбке, где неоднократно была найдена обильная флора жестколистного ксерофильного облика, свидетельствующая о засушливом климате, характеризующемся продолжительными периодами в году, лишенными каких-либо осадков.

В пизовых р. Селеты, в северной части Припиратинской впадины, прослеживается свита белых, серых и желтоватых кварцевых песков, иногда спемпентированных и плотные кварцевые песчанники или содержащих караван этих песчанников. Свита эта залегает непосредственно на покладных глинах, замещающих в пизовых р. Селеты толщу опоковых глин.

По литологическому составу и залеганию на покладных глинах эту свиту песков К. В. Ишнина охарактеризовывает с саксаульской свитой Северного Приаралья, которая там охарактеризована своеобразными по

¹ Определенные Р. И. Абузаровой формы, отнесенные ею к роду величинны, по описанию и изображению их не принадлежат, так что находки, в особенности ввиду их высокого стратиграфического положения, следует подтвердить повторными анализами.

составу спорово-пыльцевым спектрам, включающими элементы тропической лесной флоры с типичными травянистыми и кустарничковыми ксерофитами: *Nitraria* cf. *Schoberi*, *Chenopodiaceae*, *Myrtaceae*, *Cactaceae*(?). Наличие ксерофитов свидетельствует о пустынном режиме, возможно, в течение небольшого промежутка времени и на сравнительно небольшой территории.

Чеганская свита (нижний олигоцен)

На всей территории южной части Припиратинской впадины на свите глинистых опок залегает чеганская свита, представляющая зеленатоватосерыми глинами различных оттенков. Обычно эти глины слоисты, с прищипкой тонкого песка по напластованию; они расчленяются при выветривании.

В верхней части свиты проходит пропластка глины с многочисленными караванами сидеритовых конкреций. В самых же верхних горизонтах толщи сосредоточены многочисленные остатки древесины, стволы деревьев, торфянистые прослойки.

Мощность свиты глины у края Казахского нагорья не более 1—2 м, а в центральной части впадины доходит до 90 м. Глины содержат зубы акулы *Lamna vincenti* (Winefer) Wood и много пыльцы по всей толще.

Спорово-пыльцевые спектры, выделенные из ряда проб, содержат в основном пыльцу покрытосеменных растений с небольшой примесью голосеменных. Спектры отличаются от спектров опоковой толщи несколькими участками пыльцы субтропических растений и в основном характеризуют лесные ценозы. Наиболее распространенными семействами и родами являются: *Engelhardtia*, *Araliaceae*, *Ilex*, *Staphyleaceae*, *Nyssa*, *Ostrya*, *Carpinus*, *Sapotaceae*, *Magnoliaceae*, *Diospyrus*, *Menispermaceae*, *Moraceae* с небольшой примесью *Buxaceae*, *Palmae*, *Oleaceae*, *Rhus*, *Euphorbiaceae*, *Myrtaceae*, *Leguminosae*, *Umbelliferae* и др. Среди голосеменных преобладает значение пыльцы *Taxodium* aff. *distichum* и увеличивается содержание пыльцы *Picea*, *Tilia*, *Acer*, *Ulmus*, *Carya*, *Pterocarya* и др. Период относительно влажного субтропического климата, по-видимому, вызывает усиленное распространение рода *Cedrus*, отдельные виды которого рассеиваются по новым местообитаниям. Однако, кроме пыльцы, характерной для лесных ассоциаций, спектры содержат и представителей семейств, которые известны для полупустынных элементов ландшафта, а именно: *Euphorbia*, *Sterculia*, некоторые виды сем. *Umbelliferae* и *Leguminosae*. Поэтому можно полагать, что на территориях, удаленных от моря, а возможно, и на приморских участках в зонах литоралей, могли располагаться и полупустынные ассоциации.

Забегая несколько вперед, отмечу, что в спектрах из литологически близких отложений по восточному борту Тургайской впадины (в районе Наурзумского заповедника) выделены спорово-пыльцевые спектры, содержащие большое количество пыльцы полупустынных растений. Однако спектры, выделенные из толщ зеленатоватых глин в Припиратинье, свидетельствуют о том, что климат в период их отложения был, по-видимому, более влажным, чем в предыдущую эпоху, а колебания температур в течение года были менее резкими. Об этом свидетельствует значительная примесь пыльцы растений тех семейств и родов (*Acer*, *Ulmus*, *Tilia*, *Quercus*, *Carya* и др.), которые играют преобладающую роль в тургайской флоре.

Свита слоистых серо-зеленых глин с караванами сидерита прекрасно сопоставляется с глинами чеганской свиты в Северном Приаралье. О. С. Ялов (1930), впервые выделивший эту свиту для Приаралья, определяет ее возраст как верхний эоцен — нижний олигоцен включительно:

А. Л. Яшин (1953) считает, что время формирования ее целиком укладывается в нижний олигоцен; К. В. Никифорова в последнее время склоняется к тому же мнению; Н. К. Овечкин и группа ленинградских геологов с Н. М. Покровской и Е. П. Бойцовой склонны присоединиться к мнению О. С. Вилова о более раннем начале формирования свиты; геологи Казахской ССР (Лавров и Соболева, 1948; Лавров, 1949) считают чеганские отложения нижнеолигоценными.

Если основываться на типах спорово-пыльцевых спектров, выделенных из более древних отложений (опиоковая толща, тасарацкая и саксаульская свиты Павлодарского Прииртышья, Северного Приаралья и Тургай), и более молодых (чеганская свита), то можно допустить, что начало трансгрессии чеганского моря произошло несколько ранее того времени, когда на суше установилась растительность, сравнительно «умеренная» по сравнению с эоценовой, так как флора нижних слоев чеганских глин и верхних горизонтов саксаульских (кстати сказать, и литологически близких) очень близка.

Верх чеганской свиты — первая свита (верх нижнего — низ среднего олигоцена)

В прибрежных частях чеганского моря, близ границ его с Казахским материком, на чеганских глинах залегают глины светлосерые, переставшиеся со светлосерыми или омарганцованными алевролитами, с прослоями песка, иногда с присыпками марганца, иногда с караваями марганцовистого сидерита.

К этой свите приурочены прослой и сланцы битой ракушки из створок *Cyrena* cf. *semistriata* Desh., ссепитированной марганцовистым сидеритом. Эта же свита содержит позвонки акул и скатов и зубы акул.

Пыльца и споры в отложениях свиты не обнаружены. Но в омарганцованных песчанниках на оз. Джаман-Туз (к северо-востоку от оз. Кудай-Куль) найден обломок средней части кожистого листа *Quercus* sp., весьма близкого к виду рода *Quercus*, определенного В. А. Вахрамеевым в отложениях верхнего эоцена на Южном Урале, где остатки его были обнаружены совместно с листьями *Andromeda protogea* и *Cinnamomum* (Lauraceae), т. е. с флорой, близкой к флоре кварцитовых песчанников саксаульской свиты в Приаралье. Отложения на восточной части Устюрта, подобные описанным выше О. С. Виловым (1930), относятся к верхам чеганской свиты, т. е. к верхам нижнего олигоцена. Находка остатков жестколистной флоры в олигоценовых песчанниках отчасти и не противоречит чеганскому возрасту свиты, так как в спектрах чеганских глин встречается пыльца дубов, обладающая бутворчатой структурой экзины, которая характеризует жестколистие виды этого рода.

Флора светлосерых глин и алевроитов у оз. Джаман-Туз (по данным К. В. Никифоровой, отложения эти относятся к первой свите континентального олигоцена) сопоставляется с флорой Шинтузая, которую Р. Я. Абузирова (1954) относит к серии гидрокотерпневых слоев Тургай. Являясь в отдельную подсерию гидрокотерпневой свиты — «пристипотерпневые слои». В списке флор, обнаруженных Р. Я. Абузировой, значатся *Sterculia*, *Myrtaceae*, *Anacardiaceae*, *Platanus*, *Capparidaceae*, *Cynnamomum*, *Laurus*, *Sassafras*, *Diervilla*, *Leguminosae*, *Welwitschia*, а наряду с ними представители умеренной флоры: *Taxodium*, *Alnus* cf. *incana*, *Ostrya* cf. *virginica*, *Quercus* cf. *rex* и др.

Все это согласуется с данными В. А. Вахрамеева о жестколистной флоре песчанников Джаман-Туза. Находка такой флоры в отложениях, залегающих непосредственно на чеганских глинах и содержащих смешанную морскую и пресноводную фауну, заставляет полагать, что флора, близкая

к керофитной флоре саксаульского времени, задержалась на территории Казахстана в олигоцене.

Можно допустить, что в олигоцене, в период отступления чеганского моря, эта растительность распространялась на прибрежных полосах суши. К сожалению, в отложениях на оз. Джаман-Туз не было обнаружено ни спор, ни пыльцы. В то же время в слоях с торфянистыми прослоями, в которых, по наблюдениям К. В. Никифоровой, переходят по простиранию глины и алевроиты с зубами акул и позвонками скатов, найдена богатая пыльцевая флора. Слой глин с торфянистыми прослоями, простоянками и скатов и с растительной трухой К. В. Никифорова относит уже к первой свите континентальных отложений среднего олигоцена. Пыльцевая флора этих отложений также типична для континентальных отложений среднего олигоцена и прекрасно сопоставляется с пыльцевой флорой первой (кутан-булакской) свиты в Северном Приаралье.

Следует отметить, что флора самых верхних горизонтов чеганских глин и слоев, относимых к первой континентальной свите, имеет много общих видов и родов, что не удивительно, так как время отложения этих осадков относится к самым верхам нижнего олигоцена и к самым низам среднего. Чеганское море отступало не одновременно на всей территории, и в то время, когда в районах, более удаленных от Казахского материка, еще располагались границы мелководного моря, на территориях, свободных от моря, отлагались уже несомненно, богатые растительными остатками отложения континентального или дельтового происхождения.

В верхних горизонтах чеганской свиты морского олигоцена закономерно прослеживаются слои растительной трухи со стволами деревьев. В этих отложениях выделено огромное количество пыльцы древесных и подреволюционных растений.

Мощность свиты неустойчива — от 5 до 20 м. Формирование свиты связано с мелководными фашиями уже отступающего моря и началом континентального режима в Павлодарском Прииртышье. Отложения эти К. В. Никифорова относит к первой свите континентального олигоцена (средний олигоцен).

У оз. Аксуат в отложениях первой свиты К. В. Никифоровой найдены оолитовые железники. Выходы оолитовых железняков обнаружены также в нижнем течении р. Карау.

Спорово-пыльцевые спектры, выделенные в большом числе пунктов выходов первой свиты континентального олигоцена (по р. Карау, у пос. Майского на р. Иртыш, у пос. Парамоновки и др.), свидетельствуют о близости растительных обитаний, так как содержат большое количество пыльцы травянистых растений.

Основным фоном спорово-пыльцевых спектров служит пыльца древесных широколиственных пород, преобладающих над пыльной голоеменными растениями. Среди пыльцы голоеменных значительно увеличивается значение болотного кипариса, присутствие которого отмечается уже со времени отложения чеганских глин (5—8%). Характерно присутствие пыльцы туги, которая в более молодых отложениях встречается лишь в виде единичных зерен.

Флора совершенно отлична от флор предыдущих, более древних отложений и характеризует типичный комплекс умеренной листопадной флоры Тургайской провинции (области) с небольшой примесью керофитов. Отнако спектры эти еще недостаточно богаты пыльной различными видами *Juglandaceae*, *Tilia*, и *Ulmus*, что характерно для спектров вышележащей второй свиты континентального олигоцена.

Отложения свиты с растительной трухой и оолитовыми песчанниками литологически и отчасти флористически могут быть сопоставлены с первой свитой континентальных отложений Северного Приаралья, отнесенных,

В. А. Вахрамеевым к солоноватоводным осадкам, а И. Н. Формозовой и А. И. Ишениным — к дельтовым выносам рек начала среднего олигоцена, знаменующегося отступанием олигоценового (четанского) моря.

Вторая свита (средний олигоцен)

В области приподнятой палеогеновой равнины, примыкающей к Казахскому нагорью, выходят на дневную поверхность слои шоколадных глин и песков с ширитом, ярозитом и гипсом, а также с включенными иллитом и с прослоями лигнита.

Местами эти глины приобретают оттенки темносерых тонов, местами же они коричневатые-серые, розовые или почти белые. Обычно глины эти тонкослоистые, с прослоями кварцевых алевроитов (оз. Козыр-Туз). Также глины содержат много растительного детрита и отпечатков листовой флоры. По простиранию эти глины иногда замещаются тонкими алевроитами и песками. В верхней части они содержат прослой кварцевых песков и оолитов гидрогетитового происхождения. Свита эта хорошо сопоставляется со второй свитой континентальных отложений Северного Приаралья — «чилинтинской».

Из отложений второй свиты в обнажениях р. Чирдык были выделены отпечатки растений, принадлежащие, по определению В. А. Вахрамеева, к *Cyperites* sp., *Salix tenera* A. Br., *Populus balsamoides* Goepp., *Pterocarya* cf. *castaneaeifolia* (Goepp.) Menzel, *Salvinia Reussii* Et t. и *Adiantum* sp., возраст которых В. А. Вахрамеев не определяет точнее, чем миоцен — олигоцен.

Отложения второй свиты содержат богатый комплекс пыльцы и спор, характеризующий богатый расцвет широколиственной флоры с обилием хвойных, принадлежащих к различным родам, преимущественно *Pinus*, *Picea* и *Taxodium*. Появляется *Cedrus*. Иногда сем. *Pinaceae* преобладает над другими семействами и покрытосеменных и голосеменных растений.

Среди покрытосеменных подавляющее большинство принадлежит пыльце относительно мезофильных широколиственных пород с *Tilia*, *Quercus*, *Pterocarya*, *Juglans*, *Carya*, *Ulmus*, *Liquidambar*, *Acer*, *Alnus*, *Betula* и пр. Одновременно встречается большое количество травянистых ксерофитов с *Ephedra*, *Chenopodiaceae*, *Leguminosae*, *Artemisia* и других, присутствие которых свидетельствует о широком распространении открытых степных и полуоткрытых ассоциаций.

Флора этих слоев совершенно аналогична флоре второй и отчасти первой свиты в Северном Приаралье (кутаббулакская и чилинтинская), а также флоре индикотериевой свиты (включая болаттамские слои) в Тургае.

В этом случае уже можно говорить не только о флоре, но и о составе растительности, которая по своим отложениям глин с отпечатками растений и углетых пластов, по крайней мере на 90%, состояла из умеренных листопадных растений и была представлена широколиственными лесами, смешанными борами с обильным участием различных сосен и кедров, прибрежными зарослями ольхи и теневыми зарослями покрыв обширных лесных болот с болотным кипарисом.

Третья свита (средний олигоцен)

Местами на углито-каолиновых глинах среднего олигоцена (вторая свита) в этих фациях, совпадающих с болаттамскими слоями Тургайской котловины В. В. Лавров выделяет самостоятельную «надиндикотериевую» свиту, с размывом залегает глина желтая или зеленовато-серая, песчаная

или мылистая, а также ожелезненные пески с друзами гипса и с марганцевистыми бобовинами. Отложения эти сильно напоминают озерные глины нижнего миоцена, так называемые аральские слои. Флорой и фауной эти отложения не охарактеризованы, но по стратиграфическому положению выделены К. В. Никифоровой в третью свиту континентальных отложений (аналог «жаксыктыкской» свиты Приаралья). Однако, за неимением флористических и фаунистических данных, стратиграфическое положение этой свиты еще окончательно не выяснено.

Четвертая свита (верхний олигоцен)

С размывом на слои первой, второй или третьей свиты залегают плохо сортированные грубозернистые пески, гравелитные пески, белые пески с линзами плотных или нестрых каолиновых глин. Эти отложения (четвертая свита) развиты в области приподнятой палеогеновой равнины, окаймляющей палеозой Казахстана. К. В. Никифорова определяет их как отложения потоков, стекавших с Казахского нагорья. Характерной чертой песчано-гравийной свиты является обделенность и выделенность.

В северной части Припиртышской впадины эти отложения (оз. Кемпир-Туз) залегают непосредственно на слои второй свиты и содержат разнообразную и богатую по составу пылевую флору. Характеризует эта флора как лесные, так и открытые ценозы. В комплексе древесной растительности большое значение имеет сем. *Pinaceae*, в основном представленное сосной секцией *Strobus* Schaw. и *Ephedra* E. и L. *Taxodium* и *Tsuga* совершенно сходны с тем, но пыльца рода *Cedrus* (?) все еще встречается. Среди покрытосеменных в основном встречаются представители родов *Betula*, *Alnus*, *Corylus*, *Salix* с незначительной примесью широколиственных пород — *Quercus*, *Ulmus* и *Pterocarya*. Одновременно присутствует пыльца травянистых ксерофитов, что свидетельствует о развитии открытых сухостепных ассоциаций, которые продолжают существовать на территории Припиртышской впадины и течение всего олигоцена. Здесь встречаются несколько видов полыней, *Plumbaginaceae*, *Ephedra* нескольких видов, а также злаки и несколько видов рода *Allium* с небольшой примесью пыльцы растений лугово-разнотравного комплекса. Можно полагать, что в период отложения четвертой свиты на территории Припиртышья были развиты различные типы растительного покрова, в том числе, возможно, и саванны.

Флора и литологический состав четвертой (песчано-гравийной) свиты Припиртышья хорошо сопоставляются с флорой и строением тургайской свиты В. В. Лаврова, выделенной им в 1951 г. в Тургае.

Списки флоры из Кумуды и Камышара, опубликованные Р. И. Абузаровой, расходятся со списками пыльцы четвертой свиты отсутствием в них *Cedrus*. Между тем, по данным автора и по последним данным Е. И. Бойцовой, эта свита содержит пыльцу *Cedrus*. В Приаралье четвертая (чагайская) свита, к сожалению, не содержит пыльцы (в материалах (1953), в отложениях чагайской свиты обнаружены отпечатки лигнина: *Juglans acuminata* Brong., *Fagus antipoffii* Heer, *Liquidambar europaeum* Brong., *Alnus nostrata* Ung., *Corylus macquarii* Forbes., *Phragmites oeningensis* Brong., *Poacites* sp., *Monocotyledons* gen. sp.

На этом кончаются отложения палеогена в Северном Припиртышье. Выше залегает серия слоев различной мощности и генезиса, относящаяся уже к неогену.

Аральская свита (нижний миоцен(?))

В центральной части Припиртышской впадины широко развиты отложения обширного пресноводного озера или ряда озер. Представлены эти отложения зелеными глинами с мергелями и гилсами и железистыми и марганцевыми бобовинами. В различных пунктах в толще этих глин обнаружены кости *Mastodon* sp., носорогов, хищников, грызунов, парнокопытных а также панцири наземных черепах. По заключению Е. П. Беляевой, палеонтологические находки относятся к миоценовому комплексу (от нижнего до среднего). В аналогичных глинах в Тургае, у развалин могилы Рахмет, Е. П. Беляевой определена разнообразная фауна, которую она также датирует как миоценовую(?): *Trilophodon* (*Serridentinus*) *inopinalus*, *Mastodon atavus*, *Aceratherium depereti*, *Brachypotherium aurelianense* var. *gailiti*, *Artiodactyla*, *Testudo turgaica*, *Anchitherium aurelianense*, *Dicrocetus* sp., *Chalicotheridae*, *Mastodon* sp., *Rhinocerotidae* и черепахи.

К сожалению, все попытки обнаружить пылью в отложениях миоценовых мыльных глин не увенчались успехом и только в одной пробе из скв. 2 близ Павлодара в образце из серых глин со следами зеркала скопления была выделена умеренная флора, представленная в основном пыльной покрытосемянных. Участие хвойных ничтожно — единичные зерна *Pinus*, *Picea*, *Taxus*, *Cupressaceae*.

Покрытосемянные представлены пылью древесных с *Alnus*, *Betula*, *Carpinus*, *Corylus*, *Acer*, *Ostrya*, *Ulmus*, *Celtis*, *Ilex*, *Viburnaceae*, *Rhamnus*, *Rhus* (3 sp.) и большим количеством пыльных трай и полукустарничков из семейств *Gramineae*, *Umbelliferae*, *Leguminosae*, *Euphorbiaceae* и рода *Artemisia*.

Состав спорово-пыльцевых спектров свидетельствует о широком распространении растительности открытых местообитаний и о существовании островных или галерейных лесов смешанного типа. Ксерофитность растительности сказывается на значительном участии пыльных различных видов сумха, котинуса, дзельвы.

Павлодарская свита (миоцен — плиоцен)

По долине Иртыша, от Павлодара до пос. Лебяжье, вскрываются мощные толщ много-плиоценовых отложений с богатой гиппариновой фауной, описанной Ю. А. Орловым (1930, 1937, 1939, 1941 и др.). Литологически эти отложения представлены нецветными песчаными комковатыми глинами и алевроитами с несколькими горизонтами погребенных почв. Распространены иловые суеи и пески. Фауна представлена гиппарионом, носорогом, различными парнокопытными, черепахами и страусами.

Пыльцевая флора чрезвычайно бедна, но все же единичные спектры указывают на наличие типичного открытого сухостепного ландшафта с обилием травянистых ксерофитов и единичными экземплярами древесных растений из родов *Betula* и *Pinus*. Спектры, выделенные из плиоценовых отложений, на 80% состоят из пыльных трай и полукустарничков, представленных сем. *Cenopodiaceae*, *Graminea*, *Plumbaginaceae*, родами *Artemisia* и *Ephedra* и группой разнотравья из *Leguminosae*, *Ranunculaceae*, *Rosaceae*.

Четвертичные отложения

Отложения нижнечетвертичные или переходные от плиоцена к нижнечетвертичным представлены голубовато-серыми тонкослоистыми песками и иловатыми слоистыми глинами с торфянистыми прослоями. Развиты они

не повсеместно и тяготеют к правобережью р. Иртыш. Нижнечетвертичные отложения содержат фауну млекопитающих, определенных Е. П. Беляевой и В. П. Грозовым как *Elasmotherium*, *Equus Stenonis* (возможно, *subbornensis*), *Rhinoceros* sp. Пыльцевые спектры содержат в основном пыльную травянистых ксерофитов, по составу чрезвычайно близких к современной флоре. Но среди пыльных древесных пород встречаются такие роды как *Nyssa*, *Rhus*, *Carpinus*, а в числе голосеменных — *Pinus* секции *Strobus* и сем. *Cupressaceae*. Таким образом, можно полагать, что растительность нижнечетвертичного периода, возможно, самых верхних плиоцена, была близка к современной, но отличалась примесью некоторых родов, игравших еще в неогене ведущую роль.

Среднечетвертичные отложения, слагающие толщу второй надпойменной террасы Иртыша, обычно залегают с разрывом на подстилающих породах. Мощность этих отложений 20—25 м. Среднечетвертичные отложения представлены обычно песками и галечниками или серовато-голубыми глинами, что и послужило причиной того, что К. В. Никифорова выделила их под названием «голубой толщи». Комплекс фауны, определенной В. П. Грозовым, относится им ко времени, совпадающему с эпохой максимального оледенения на русской платформе. Здесь встречаются *Elephas trogonterii*, *Elephas antiquus*, *Bison priscaus longicornis*, *Cervus* sp., *Felis* sp., *Equus* sp. и др.

Пыльцевые спектры, по данным О. В. Матвеевой (1953), содержат пыльную ель, что косвенным путем может отражать состояние некоторого похолодания на территории Казахстана в связи с продвижением льдов. Однако присутствие ели отмечено сравнительно в небольших количествах, и основной тип спектров остается по-прежнему степным с обилием травянистых ксерофитов. По-видимому, продвижение ели к югу происходило по речным долинам, как это и отмечает в своей работе О. В. Матвеева.

Так называемая палева толща, выделенная для Припиртышья К. В. Никифоровой как верхнечетвертичные отложения, сопоставляется с отложениями первой надпойменной террасы Иртыша. Представлена эта серия осадков песками и супесями с костями: *Elephas primigenius* (возможный), *Bison priscaus longicornis*, *Equus caballus*, *Bos* sp., *Cervus* (cf. *elaphus*), *Caracus* sp., *Saiga tatarica*.

Пыльцевые спектры в основном представлены родами *Artemisia*, *Chenopodium*, *Atriplex*, *Salsola*, а среди древесных пород единично встречается пыльная *Picea* sp., *Pinus* aff. *silvestris*; во всех спектрах присутствуют пыльные *Ephedra*.

Позднечетвертичные отложения широко распространены в долинах рек. Представлены они обычно тонкослоистыми песками, торфяниками и иловатыми глинами. Среди этих отложений встречаются остатки домашних животных с *Equus caballus*, *Ovis aries*, *Bos taurus*, *Canis* и многочисленные остатки керамики.

Пыльцевые спектры весьма схожи со спектрами из поверхностных проб Павлодарского Припиртышья и содержат массу пыльных трай со значительным участием *Ephedra*.

Сложная и своеобразная тектоническая обстановка в палеогене, нарастающая в неодиократных поднятиях, измещавших рельеф Казахского нагорья и прилегающих к нему районов, послужила причиной того, что границы палеогеновых морских трансгрессий и регрессий были несплошными для различных участков Припиртышской впадины, а поэтому вполне возможно, что на сравнительно мало удаленных один от другого участках одного и того же района одновременно отлагались и морские и континентальные отложения.

Впервые мысль о динамичности границ выделяемых свит высказана К. В. Никифоровой.

Приведенный нами сводный разрез (см. фиг. 3) представляет схему стратиграфического соотношения различных свит Павлодарского Припутья. Таким образом, положение этих свит по отношению к общей стратиграфической шкале должно определяться для каждой свиты индивидуально, в зависимости от места и условий ее формирования. В то же время, как видно из приведенного сводного разреза, палеогеновые отложения в Припутье значительно беднее фауной, чем четвертичные и плейстоценовые. Поэтому сопоставление их затруднено, и в связи с этим особенно серьезно следует подходить к интерпретации спорово-пыльцевых спектров, зачастую являющихся единственными палеонтологическими находками.

СЕВЕРНОЕ ПРИПУТЬЕ

Наиболее древним третичным отложениям в Северном Припутье (фиг. 4) А. И. Янин считает тасаранскую свиту, которая сформировалась во всех своих фациях — глинистой, пуммулитовой и фосфатно-глауконитовой — в среднем эоцене и в начале верхнего эоцена.

Тасаранское море трансгрессировало в Северное Припутье, оставив незатопленными небольшие островки, расположенные меридионально от р. Иртыш до центральной части нынешнего Аральского моря. На востоке море граничило с западными окраинами Казахского нагорья, на северо-западе — с Мугоджарами.

В конце тасаранского века скрылись под воду и островки, и, таким образом, источниками пыли и спор, поступающих в морские отложения, оставались лишь берега Мугоджар и Казахского нагорья.

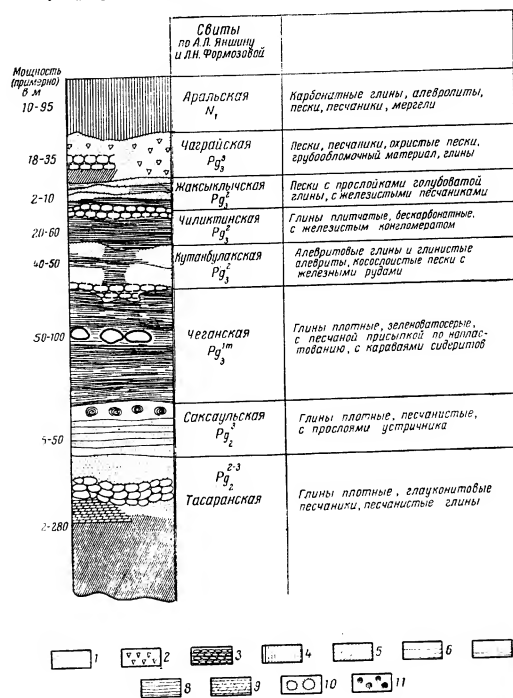
Основа для определения стратиграфического положения отложений тасаранского моря А. И. Янин, естественно, принимает обильную морскую фауну, список которой приводится им в монографии (1953). При этом А. И. Янин отмечает, что фауна тасаранской свиты соответствует (по данным исследования фауны фораминифер) трем фораминиферовым зонам кавказского эоцена: а) зоне планктонных фораминифер — слоям с *Lyrolepis* соответствует верхняя часть свиты; б) зоне *Globorotalia crassaformis* соответствует средняя часть свиты; в) зоне *Globorotalia aragonensis* соответствует самая нижняя часть свиты.

Итологически тасаранская свита представлена тремя типами отложений: глауконитово-песчанистыми, отлагавшимися в прибрежных, более мелководных участках моря, глинистыми — в глубоководных, пуммулитовыми — в прибрежных зонах, вокруг островов.

Спорово-пыльцевые спектры свидетельствуют о субтропическом, возможно, тропическом климате и о соответствующей флоре в пределах Мугоджар и в особенности — Казахского нагорья. Подробные данные о постоянном изучении пылевых горизонтов морского палеогена Северного Припутья приводятся ниже, здесь же упомянем лишь, что среди пылей покрытосемянных встречаются представители сем. Myrtaceae, Moraceae, Vixaceae, Lauraceae, Diospyraceae, Palmae, Fagaceae (несколько видов *Quercus* и *Castanea*), а также обилие пылей типа Leguminosae (возможно, *Dewalquea*), несколько видов которой приводит В. Н. Баранов (1953) в списках флоры, обнаруженной им в отложениях континентальной фации тасаранской свиты на западном склоне Мугоджар и для палеогеновой флоры Средней Волги.

Голосеменные, обычно составляющие меньший процент в спектрах, чем покрытосеменные, представлены различными видами рода *Pinus* (секция *Strobus* Shaw., *Pseudostrobus* Endl., *Cembrae* Sprach. и др.) со значительной примесью *Podocarpus* и *Cedrus*.

Указанная флора близка к флоре континентальной фации тасаранской свиты западного склона Мугоджар; она характеризует тропическую жестколистную флору полтавской провинции А. Н. Криптофича.



Фиг. 4. Северное Припутье. Сводный разрез палеогеновых отложений.

1 — песок; 2 — грубообломочный материал; 3 — песчаник; 4 — глина, суглинок; 5 — глина песчаная; 6 — глина плотная, песчаная; 7 — глина плотная; 8 — глина слоистая; 9 — глина оползневая; 10 — стяжения слерита; 11 — фауна устриц

По-видимому, основная масса пыли в спектрах тасаранской свиты поступала именно с восточных склонов Мугоджар, обогащаясь также приносимым материалом с западных берегов Казахского нагорья. Например, пыльца *Zygophyllaceae* (*Nitraria* Schoberi), *Umbelliferae* (aff.

Ferula), *Nyctaginaceae*, *Capparidaceae*, *Myrtaceae*, *Anacardiaceae* и проч., отдельные представители которых входят в состав пустынных ассоциаций палео- и неотропиков.

Спектры тасаранской свиты имеют много общих форм со спектрами из нижних горизонтов опоковой толщи Павлодарского Припиртышья, а также и со спектрами нижних горизонтов саксаульской свиты.

Стратиграфически выше отложений тасаранской свиты залегает комплекс песчано-глинистых слоев (саксаульская свита Янишпа) с крупными караваями кварцитовых песчаников в основании. Для флористических построений особенно интересен тот факт, что основным источником сноса обломочного материала при формировании песчано-гравийной фации саксаульской свиты являлись Мугоджары, как это установлено петрографическим анализом.

Наиболее характерный представитель саксаульской фауны, по мнению А. Л. Янишпа, — *Pectunculus aralensis* Н о м., имеющий большое сходство со многими эоценовыми и нижнеэоценовыми видами Западной Европы, а также Украины. Второстепенными являются: *Cymbulostrea multicoelata* Desh. (var. *turgica* V i a l.), *Cubitostrea plicata* S o l., *C. flabellula* L a m., *Cubitus* Desh. и другие плоскостные устрицы, зубы акулы *Odontaspis hopei* Ag., *Od. winkleri* (A g.) L e r., *Od. acutissima* Ag. и другие, а также различные виды рода *Nucula* (Янишпа, 1953).

Комплекс фораминифер соответствует комплексу руководящих фораминифер верхних форминиферозных слоев Северного Кавказа (Янишпа, 1953). В кварцитовых песчаниках континентальной фации саксаульской свиты у западного склона Мугоджар обнаружены богатые отпечатки листьев и других частей древесных и кустарниковых растений, характеризующих ксерофитную флору полтавской провинции с *Podocarpus euernici* U n g., *Sequoia couttsiae* Heer, *S. Sternbergii* (G o e r p.) Heer, *Sabal* sp., *Myrica angustata* S e l i m p., *Myrica uralica* sp. nov., *Quercus apocynophyllum* E t t., *Q. bifurcata* W a l., *Q. Elaenae* U n g., *Quercus* sp. (2 sp.), *Dryophyllum furcinervis* (R o s s m.) Heer, *Ficus multinervis* Heer, *Ficus* sp., *Cinnamomum* sp., *Laurus* sp., *Terminalia* sp., *Apocynophyllum helveticum* Heer, *Myrtophyllum Warderi* S a p., *Myrsine doryphora* U n g., *Andromeda protogae* U n g., *Dalbergia cf. bella* Heer (определения М. Д. Узнадзе-Дребуадзе, 1948), *Dryandra Schrankii* (S t e r n b.) Heer, *Pimelea* sp. (определение А. Н. Криштофовича), *Sequoia couttsiae* Heer, *Glyptostrobus parisiensis* B r o n g n., *Dryophyllum furcinervis* (R o s s m.) Heer, *Laurus Omalii* S a p. et M a r., *Celastrorhynchium Benedenii* S a p. et M a r., *Aralia transversinervia* S a p. et M a r., *Andromeda protogaea* U n g., *Phyllites* sp.¹

По А. Л. Янишпу, саксаульская свита относится к самым верхам эоцена.

Спорово-пыльцевые спектры из отложений саксаульской свиты на горе Бос-Бие в Северном Припиртышье и на горе Кара-Сандык (верхние горизонты), из слоев песчаных глин, залегающих на кварцевых песках с зубами *Myliobatus*, а также на западном чинке Термен-Бос, против станции Саксаульская, где толща саксаульских глин содержит прослой устричника, — несколько различаются по составу.

Нижние из исследованных горизонтов наиболее богаты пыльной субтропических растений с *Myrtaceae* (роды: *Fexhoa*, *Myrtanthus*, *Eucalyptus*, *Eugenia* и *Myrtus*), *Moraceae* (роды *Morus* и *Maclura*), *Buxaceae*, *Sterculiaceae*, *Anacardiaceae*, а также *Cactaceae* (?) (= *Echinocactus* (?)), *Rhysales* (?) и *Opuntia* sp.), *Zygophyllaceae*, *Plumbaginaceae*, *Euphorbiaceae*, *Proteaceae*, *Ephedra*, *Artemisia*, *Chenopodiaceae*, свидетельствующие о безусловном

наличии пустынных ассоциаций, которые, по аналогии с находками подобной флоры в верхних горизонтах опоковой толщи в Павлодарском Припиртышье, по-видимому, распространились со стороны Казахского нагорья и являлись реликтами более древних флор.

Среди древесных пород, характеризующих лесные ассоциации тропических и субтропических широт, изобилуют различные виды *Pinus*, *Dacrydium*, *Podocarpus*, *Cedrus* и др.

Более высокие горизонты свиты содержат уже примесь пыльца *Alnus*, *Betula*, *Corylus*, *Myrica*, *Juglans*, *Liquidambar*. Правда, участие этих родов незначительно, но наличие пыльца сближает тип спектров верхних горизонтов саксаульской свиты со спектрами нижних горизонтов чеганских глин, также содержащих небольшую примесь пыльца пустынных ксерофитов наряду с типичным комплексом субтропических лесов с небольшой примесью умеренно мезофильных пород. Причина такого смещения типов флоры заключается в принадлежности выделенных спектров к морским отложениям, в которых отражается множество различных типов растительного покрова в пределах одной палеогеографической зоны.

Та часть спорово-пыльцевых спектров, которая характеризует песчаные ассоциации, включает и пыльцу, определенную как род *Gnetum*, присутствие которого подтверждает субтропический или даже тропический характер растительности.

Флора саксаульских отложений особенно ярко отражает смешанный тип флоры верхнего эоцена, когда среди элементов древней средиземноморской флоры уже начали появляться единичные пришельцы с севера и изобиливали еще специфические представители туркменской провинции с *Rhus*, *Proteaceae*, *Myrtaceae* и *Ephedra*.

Выше залегают отложения чеганской свиты.

Палеогеография чеганского моря в Припиртышье не везде ясна, так как отложения его частично смыты последующей эрозией. Во всяком случае распространение чеганского моря было значительным и его отложения в виде так называемой чеганской свиты широко распространены в Припиртышье.

Представлены чеганские отложения зеленовато-серыми слоистыми глинами, плотными, тонко расщепляющимися при выветривании, глиносопными, с прослоями каравая сидеритовых конкреций и с песчаной примесью по напластованию. Фауна чеганских отложений в Северном Припиртышье особенно богата. Исчерпывающий список ее форм, насчитывающий не одну сотню видов, приведен в монографии А. Л. Янишпа (1953).

По поводу возраста чеганской свиты твердого мнения еще нет. Вернее, остается неясной ее нижняя граница. По Н. К. Овечкину (1951, 1955), чеганская свита в Тургае захватывает верх эоцена. По данным же А. Л. Янишпа, она начинается с нижнего олигоцена. Возникло это разногласие потому, что некоторые виды фауны чеганских глин известны с эоцена.

Флористические данные указывают на большое сходство флоры самых верхних горизонтов саксаульской свиты с низов чегана, которые, в свою очередь, близки к флорам хадумских спектров Северного Кавказа. По-видимому, нижние горизонты нижнего олигоцена еще содержали остатки тропической флоры, сохранявшейся и постепенно изживавшейся еще в течение всего олигоцена. Однако нижние горизонты чеганских глин в Северном Припиртышье, так же как и в Павлодарском Припиртышье, уже содержат довольно большое количество пыльца *Taxodium*, который затем непрерывно развивается в течение нижнего и среднего олигоцена. Находки же пыльца этого рода в саксаульских и опоковых отложениях единичны. Чеганское время в Тургае захватывает верх эоцена — пора развития *Taxodium* на материке Казахстана.

¹ Список флоры заимствован из работы А. Л. Янишпа.

В общем спектры кутанбулакской свиты резко отличаются от спектров чеганской свиты, что становится особенно заметным при сопоставлении спектров из разреза Кара-Сандык, где они анализировались и из чеганских и из континентальных отложений.

Флора, представленная в этих спектрах, принадлежит к умеренному комплексу тургайской провинции А. Н. Криштофовича. При этом состав растительности, который в той или иной мере находит отражение в спектрах из континентальных отложений, свидетельствует о широком распространении смешанно-широколиственных лесов.

Списки кутанбулакской флоры, составленные по отпечаткам листьев, значительно пополняются видами различных голосеменных растений, присутствие которых среди макроскопических остатков отмечено лишь находками *Taxodium mucronatum* Неег и древесины неизвестного хвойного.

На кутанбулакской свите с разрывом залегают тонкослоистые отложения чиликтинской свиты. Обычно это плитчатые бескарбонатные глины или коричневатые-серые глины с тонкими прослойками слюдистого алевролита. Отмечена гипсоносность. В некоторых разрезах прослеживаются прослой углистых глил или глинистого бурого угля. В основании свиты часты лиазы галек и грубообломочного материала.

В отложениях чиликтинской свиты отмечены находки утконоса, остатков рыб, раковин остракод, зубов *Odontaspis ex. gr. cuspidata* Ag., кости *Paracatherinae* gen. ident. и *Schizotherium cf. turgaicum* Boriss.

Растительные остатки из олигово-зеленых глин, обработанные А. Н. Поярковой (1935) у ст. Чок-Су и на посток от нее, содержат *Populus mutabilis* Неег, *Alnus nostratum* Ung., *Carpinus grandis* Ung., *Corylus turgaica* Rojark., *Fagus Antipofii* Неег, *Ficus populina* Неег (?), *Liquidambar europaeum* A. Braun, *Juglans acuminata* A. Braun, *Corylus Macquarrii* (Forbes) Неег, *Quercus Alexeeri* Rojark., *Fagus Deucalionis* Ung. В оолитовых железняках чиликтинской свиты на горе Кара-Сандык И. В. Палибиним (1904, 1906), были определены: *Sequoia Langsdorffii* Неег, *Populus mutabilis* Неег, *Carpinus grandis* Ung., *Corylus insignis* Неег, *Fagus Antipofii* Неег, *Juglans acuminata* A. Braun, *Dryandra Ungerii* Etl., *Zizyphus tiliacifolius* Неег и *Liquidambar europaeum* A. Braun.

Как видно из приведенных списков, флора чиликтинской свиты по составу обнаруженных растительных остатков подобна флоре кутанбулакских слоев. И в той и в другой свите представлена широколиственная листопадная мезофильная флора с ничтожной примесью хвойных, в данном случае одним видом *Sequoia Langsdorffii* Неег.

По предположениям А. Л. Янина, во время формирования чиликтинских слоев на большей части Северного Приаралья образовалась озерно-аллювиальная равнина с проточными озерами и болотами, которые имели непостоянный режим; кратковременные периоды их спокойного заполнения прерывались периодами размытия.

Пестроту литологического состава и частую фацциальную изменчивость отложений чиликтинской свиты отмечают также В. А. Вахрамеев и Т. Н. Формозова. Автору, к сожалению, не удалось вполне изучить отложения тургайской свиты в целом и чиликтинской свиты в частности. Однако (при консультации Л. Н. Формозовой и А. Л. Янина) все же удалось собрать большое количество образцов из обнажений чинка Сары-Булак (обн. 1, 1953 г.), из белых алевроитов и песков с мелкими окисями железа и с прослоями темной углистой глины и из песчаных бурых глин с гипсами и зубами акул, а также из песчаных слоистых глин чинка Сары-

¹ *Fagus orientalis* Lipsqy forma fossilis Pali bin, по П. А. Мещадимову.

Булак (обн. 5, 1953 г.), у покинутой триангуляционной вышки, и на горе Кара-Сандык (обн. 7, 1953 г.), из слоистых глин с прослоями тонкозернистого песка и из глины с прослоями сидерита и железистого конгломерата, венчающего свиту.

Спорово-пыльцевые спектры, полученные из этих проб, поражают насыщенностью пылевой и обилием видов покрытосеменных и голосеменных. Среди серии спектров обычно преобладают голосеменные.

Флористически спектры чиликтинской свиты чрезвычайно близки к спектрам из кутанбулакской свиты, так же как близки и по составу растительности, за исключением того, что в спектрах из чиликтинской свиты ярче выражена примесь субтропических видов и родов: *Laurus*, *Palmae* (*Trachycarpus*?), *Myrtaceae* (3 sp.), *Proteaceae*, *Rhus*, *Moraceae* (2 sp.), а также отмечен несколько больший процент пылцы травянистых растений с *Artemisia*, *Chenopodiaceae*, *Gramineae*, *Leguminosae* и *Ephedra*. По-видимому, на равнинных пространствах Северного Приаралья чиликтинского времени, которые А. Л. Янин (1953) сравнивает с современным ландшафтом Камыш-Самарского междуречья Урала и Волги, все же развивались сухие степные или мелкорослые саванные ассоциации. Возможно, что травянистые и кустарничковые ценозы располагались по каменистым склонам остаточных возвышенностей, сложенных палеозойскими породами. Во всяком случае, ассоциации открытых местообитаний здесь, безусловно, существовали. Следует отметить, что В. С. Корнилова и В. В. Лавров (1949), В. В. Лавров (1951) и Р. Я. Абузарова (1954) опубликовали данные о находках керофитной флоры в слоях с индриктерской фауной в Тургайской впадине (р. Жаман-Каниды, в 75 км от пос. Амангельды и в округе у оз. Шин-Туз). Здесь ими были обнаружены: *Myrica turgaica* Kornilova, *Rhus turcomanica* Krishn., *Aralia* sp., *Sassafras turgaicum* Kornilova, *Cinnamomum Schucheri* Неег, *Laurus prinigenia* и пр.

Таким образом, субтропические реликты полтавской керофитной флоры эпоха находили себе убежища на территории Северного Приаралья и Тургай в эпоху наиболее интенсивного распространения широколиственной умеренной флоры. В то же время обилие пылцы хвойных указывает, что участие их в растительном покрове было значительным.

Особенно широко был распространен род *Alnus*, различные виды которого, по-видимому, соизвучествовали растительности берегов озер. Обилие озерных или заболоченных волосов подтверждается значительным участием пылцы *Myriophyllum*, *Potamogeton* и *Sparganium*.

Комплекс пылцы голосеменных представлен родами: *Pinus*, *Taxodium*, сем. *Cupressaceae*, несколькими видами родов *Cedrus*, *Tsuga*, *Podocarpus*, *Picea* и сем. *Cycadaceae*.

Кутанбулакскую и чиликтинскую свиты большинство исследователей относят к среднему олигоцену.

В конце периода формирования чиликтинской свиты произошла значительная трансгрессия солончатоводного бассейна, с которым в чиликтинский век сообщались пресноводные водоемы Приаралья. В результате этого сравнительно недолговременного продвижения солончатоводного бассейна на север отложилась серия слоев третьей (В. А. Вахрамеев) или жаксылычской (Л. Н. Формозова) свиты, представленной песками с прослоями железистого песчаника, иногда с линзочками кварцевого гравия и прослойками голубоватой глины. В отложениях этой свиты обнаружены остатки зубов акул и челюсти костистых рыб (щуки и окуни).

Ископаемая фауна доказывает связь, возможно кратковременную, внутреннего бассейна с открытым океаном. С этим временем А. Л. Янин связывает некоторое опускание северо-восточной части Приаралья.

По мнению Л. Н. Формозовой (1949), отложения жаксыкычской свиты являются непосредственным продолжением серии слоев чиликтинской свиты и представляют собой солоноватоводную фацию последней. К сожалению, отложения жаксыкычской свиты не охарактеризованы флорой.

Самой верхней свитой тургайской серии в Северном Приаралье является четвертая, или чаграйская свита, отложившаяся в период интенсивного поднятия Мугоджар. Об этом свидетельствует обильный обломочный материал, отложенный вблизи их склонов.

Чаграйская свита представлена обычно охристыми песками, пачками переслаивающихся охристых песков, глин, а также охристых песчанников.

Фауна этих отложений, бедная, пресноводная, представлена пеллоидными из рода *Unio* и ядрами гастропод (*Viviparus*?). Флора также бедна. Известны остатки из железистых песчанников близ Мугоджар с *Fagus Antipoffii* Heeg, *Carpinus grandis* U n g., *Quercus Gmelinii* A. B r a u n, *Corylus insignis* Heeg¹ (определены И. В. Палибиним, 1904) и *Liquidambar europaeum* A. B r a u n, *Phragmites oeningensis* A. B r a u n, *Juglans acuminata* A. B r a u n (определены И. В. Палибиним и А. Н. Криштофовичем).

В образцах, собранных нами в 1953 г. из обнажения № 6 (залив Перовского, близ рыбачьего пос. Агысле), представленного пачкой переслаивающихся ожелезненных песков, белых, розоватых и красных, с прослоями сцементированных ожелезненных песков и серых глинистых участков, найдены единичные пылевые зерна *Pinus* секции *Strobus*, *Abies*, *Betula*, *Alnus*, *Carpinus*, *Myrica*, *Chenopodiaceae* (3 sp.) и *Artemisia*. Несмотря на то, что находки пылевых рассеяны и малочисленны и не дают возможности получить полное представление о составе растительности чаграйского времени, все же можно полагать, что флора того времени была относительно умеренной, с участием широколиственных древесных пород, и что на открытых песчаных склонах развивались ассоциации полупустынного типа. Не следует думать, что эти типы ассоциаций были территориально близкими. Пыльца широколиственных пород могла быть принесена издалека речными водами к песчаным берегам чаграйского водоема.

Возраст чаграйской свиты А. Я. Янин условно определяет как верхне-олигоценный — на основании наличия крупного размыта на границе чаграйской и жаксыкычской свит. Однако окончательное решение вопроса о возрасте этой свиты, как совершенно резонно отмечает А. Я. Янин, следует отложить до того времени, когда удастся проследить протирание отложений чаграйской свиты на запад и переход отложений тургайской серии слоев в осадки майкопской толщи, содержащей морскую фауну.

Стратиграфически выше отложений тургайской серии (средний и верхний олигоцен) залегают слои солоноватоводных отложений, содержащих многочисленные остатки *Corbula helmerseni*. Литологически эта свита представлена чрезвычайно пестро. В основном это карбонатные породы, а также глины, зеленовато-серые, нестрые, пески — белые и серые, алевроиты, песчанники, известняки, мергелистые глины. Глины часто содержат кристаллы гипса.

Эту свиту А. Я. Янин рассматривает как отложения солоноватоводного бассейна, распространявшегося в северном направлении до ст. Челкар, Тутуз, Аральск, и дельтовых выносов рек, впадавших в этот бассейн. Близ пос. Агысле находятся крупные захоронения костей млекопитающих, содержащих остатки (Беляева, 1948) землеройки, грызунов (5 видов), хомякообразных, тушканчиков, бобров (2 вида), кошачьих (3 вида).

¹ *Corylus turgaica* P o j a k k., по П. А. Мечеславскому.

Aceratherium aralense B o r i s., *Aralotherium prochorovii* B o r i s., паркопытных (кабарги), утки (*Anas oligocaena* T u g.), черепах *Testudo aralensis* K h o z. и *Chelonia aralis* K h o z. (первая — сухопутная, вторая — морская). Л. И. Хозацким (1945) в этих же отложениях найдены остатки дельфинов и китообразных.

Флора, найденная в светлосерых песчанниках дельтовых выносов на горе Яксы-Кулак, по определению В. А. Вахрамеева, представлена: *Taxodium distichum miocenum* H e e g., *Juglans cf. acuminata* A. B r a u n, *Quercus Nimrodii* U n g. и *Fagus Antipoffii* H e e g.

А. А. Чигурьевой (1951) в глинах из средней части разреза на Кзыл-Булаке найдено значительное количество пыльных различных семейств, родов и видов: *Pinus*, *Abies*, *Picea*, *Sciadopitys*, *Gramineae*, *Onagraceae*, *Potamogeton*, *Stratiotes*, *Corylus*, *Juglans*, *Alnus*, *Lecova*, *Carpinus*, *Tilia*, *Carya*, *Ulmus*, *Acer*, *Castanea*, *Liquidambar*, тип *Fagus*, тип *Ginkgo*, тип *Betula*, *Ylex*. Эту флору А. А. Чигурьева относит к типичному тургайскому комплексу.

Если проанализировать состав фауны из отложений близ пос. Агысле и сопоставить с флористическими данными, полученными в результате изучения макроскопических растительных остатков и пылей, то станет ясно, что в этом случае флористические данные лишь частично отвечают комплексу фауны. Приведенные списки родов и видов растений характеризуют лесные ассоциации — их существование подтверждается находками костей бобровых. В то же время остатки хомяков, тушканчиков и нынцух говорят о наличии во флоре степного элемента.

К сожалению, все пробы, отобранные автором для спорово-пыльцевого анализа в Агысле, оказались непыльцевосными, но аналогичные осадки в Павлодарском Припиртыше и в Тургае содержат спорово-пыльцевые спектры, в которых наряду с единичными находками представителей широколиственных пород встречается довольно разнообразный комплекс пыльцы травянистых растений. Находки пыльцы трав из сем. *Chenopodiaceae*, *Compositae* (*Artemisia*), *Leguminosae*, *Gramineae* свидетельствуют о том, что в аральское время имелись большие открытые местообитания с растительностью, близкой к современным сухостепям Приаралья, где, по-видимому, и селились типичные степные грызуны.

Возраст аральской свиты, содержащей фауну, аналогичную корбулевым слоям нижнего миоцена Северного Кавказа, нижнемиоценовую фауну млекопитающих и залегающей стратиграфически выше верхнеолигоценовой чаграйской свиты (аквитанский ярус), А. Я. Янин считает нижнемиоценовыми.

Таким образом, при беглом обзоре палеогеновых и отчасти палеогеновых отложений Северного Приаралья (в основном по данным А. Я. Янина) мы приходим к выводу, что стратиграфическое положение трех свит морского палеогена увязывается с положением свит морского палеогена Павлодарского Припиртыша.

Данные спорово-пыльцевого анализа (в особенности это хорошо выражено в спектрах из обнажения на горе Термен-Бес) подтверждают, что спектры саксаульской свиты отличаются от спектров чеганской свиты составом покрытосеменных и голосеменных. При этом нижние горизонты чеганских отложений содержат примесь пыльцы эоценовых керофитов, а верхние горизонты саксаульских отложений — примесь умеренной флоры. Однако общий характер флор чеганской и саксаульской свит различен. Спектры саксаульских отложений принадлежат целиком к флоре субтропической или тропической, керофитной, чеганские же спектры — типичные олигоценовые, субтропические с примесью умеренных элементов, подобные спектрам хадуских отложений нижнего майкопа Северного Кавказа.

ТУРГАЙСКАЯ НИЗМЕННОСТЬ

Относительно геологического строения и палеогеографии Тургайской низменности существует большое количество работ. В 1930 г. О. С. Вилов, в 1931 г. Н. Г. Касин, в 1932 г. А. Д. Архангельский, в 1935 г. М. В. Баярунас, в 1949 г. А. И. Ялшин, в 1951 г. В. В. Лавров и Н. К. Овечкин и многие другие авторы дали интересные сообщения об исследованиях континентальных и морских отложений Тургай. Район Тургай не входит в рамки моей работы, но, вследствие того, что геологическая история Тургай теснейшим образом связана и с Прииртышской впадиной и с Приаральем, нельзя не остановиться, хотя бы в двух словах, на наиболее определившихся взглядах на схему стратиграфического строения этого района.

По данным В. В. Лаврова, морской режим в Тургае устанавливается в нижнем олигоцене. Границы нижнеолигоценового моря проходили по краю Казахского нагорья. Широко развитые отложения морского олигоцене — чеганские глины, серые, зеленовато-серые, тонкослоистые и расщепляющиеся при выветривании, знакомые нам по Павлодарскому Прииртышью, распространены далеко к северо- и юго-западу от восточного борта Тургайского прогиба, к оз. Челкар-Тониз, Северному Приаралью и Устьорту, а также к Павлодарскому Прииртышью и Западной Сибири.

По восточному борту Тургайской впадины (в разрезах по р. Ангутасты) выходит мелководные фации этой свиты. Возраст их В. В. Лавров и Е. П. Бойцова и Н. К. Овечкин определяют как верхний эоцен — нижний олигоцен.

Вторым элементом третичных отложений В. В. Лавров выделяет так называемые «сарыинские слои» (по местонахождению на чинке Сарыин, по правому берегу р. Сюреин), представленные голубовато-зелеными плотными глинами мощностью от 6 до 40 м.

Слои эти залегают на чеганских глинах без разрыва. Обычно эти глины заглинены и засолены. Фауна сарыинских слоев — кости грызунов и крупных млекопитающих и птицы наземных черепов. Флора (по определению В. С. Корниловой) — *Phragmites oeningensis*, *Poacites laeviculus*, *Populus balsamoides*, *Pterocarya castanecifolia*, *Juglans acuminata*, *Magnolia ingliefeldii*, *Palurus* sp., *Zizyphus liliacifolius*, *Rhus turcomanica*, *Liquidambar*.

Возраст сарыинских слоев В. В. Лавров считает среднеолигоценовым, genesis их — лагунные отложения мелководного чеганского моря, стратиграфическое положение — отложения, промежуточные между чеганскими морскими и вышележащими континентальными отложениями. В. В. Лавров допускает, что эти отложения могут формироваться одновременно с континентальными, в зависимости от их местоположения.

На размытой поверхности чеганских глин или на сарыинских слоях залегают толща континентальных отложений, которые В. В. Лавров делит на две серии слоев: нижние — иридикотериевые, верхние — тургайские.

Иридикотериевые слои, или свита, представлены зеленовато-желтобурыми или голубыми глинами с костями иридикотерия. Переходят эти глины в горизонт слоистых лиловато-серых глин с прослоями угля (болаттамские слои).

В нижних слоях иридикотериевой свиты по реке Сары Тургай были обнаружены остатки иридикотерия.

Флора иридикотериевой свиты представлена двумя типами: а) ксерофильная [Жаман-Каянды; определена В. С. Корниловой (Корнилова и Лавров, 1949)] *Myrica turgica*, *Laurus hydrophylla*, *Rhus turcomanica*, *Ara-*

lia sp.; б) мезофильная (в углито-каолиновых слоях) с *Taxodium*, *Alnus*, *Nyssa*, *Liquidambar*, *Phragmites*.

С отложениями, имеющими мезофильную флору, связаны прослои бурого угля и оолитовых бурых железняков. Возраст свиты — средний олигоцен.

Иридикотериевая свита всюду по восточному борту Тургайского прогиба перекрывается отложениями песчано-глинистой свиты с резким неравномерным размывом, который местами почти до основания уничтожает иридикотериевую свиту. В основании это однородные светлые породы, тонкослоистые, песчаные, плохо сортированные, иногда с линзами железистых песчаников. Выше залегают неслоистые зеленовато-серые или пестрые глины. Породы этой свиты, как отмечает В. В. Лавров, сильно выщелочены.

В алевроитах и песчанниках тургайской свиты найдена широколиственная флора, лишенная субтропических ксерофитов.

Песчано-глинистую свиту В. В. Лавров параллелизует с четвертой свитой континентальных отложений Приаралья и возраст ее относит к верхнему олигоцену.

Над песчано-гравийной свитой В. В. Лавров выделяет еще одну свиту континентальных отложений, так называемую солоную, выраженную зелеными глинами с друзами гипса и марганцевыми бобовинами, содержащую фауну, близкую к аральской свите в Северном Приаралье (бобровые, *Aceratherium deperti* и др.). В. В. Лавров параллелизует свою солоную свиту с аральской свитой в Северном Приаралье.

Выше солоную свиту В. В. Лавров выделяет свиту турме, которая представлена несолонными глинами; встречается она не повсеместно и содержит кости *Miohippus* sp., *Hypolippus* (*Anchitherium*?), *Yettitherium* cf. *hipparionum*, *Rhinocerotidae*, *Tetradinidae*. В. С. Богданов, автор определений, относит эту свиту к среднему миоцену. В недавно вышедшей работе Р. И. Абузировой (1954), посвященной флоре континентальных отложений Тургай, обосновывается разделение иридикотериевой свиты на три самостоятельные подсвиты, которые снизу вверх следуют в таком порядке: иридикотериевая, иридикотериевая и болаттамская.

Возраст иридикотериевой свиты определяется как верхний нижнеолигоцен, болаттамских слоев — как верхний среднего олигоцене.

В заключение необходимо отметить, что многочисленные детальные исследования морских и континентальных отложений Северного Приаралья, Павлодарского Прииртышья и Тургай пока не привели исследователей к общему мнению относительно синхронизации выделенных свит в каждом из этих районов. Между тем накопленный материал уже достаточен, чтобы это сделать. Пока же, на основании изложенного материала, на территориях Северного Приаралья, Павлодарского Прииртышья и Тургай выделяются следующие отложения:

а) Морские в Прииртышье, прибрежно-морские и морские в Тургае и морские в Приаралье отложения среднего и верхнего эоцена с тропической ксерофильной флорой. Подставной провинции (в понимании А. И. Криштофовича), по имеющей своеобразный облик, приближающий эту флору к флоре Туркменской провинции (в понимании Е. П. Корниловой).

б) Морские отложения нижнего олигоцене (по мнению некоторых исследователей, верхнеолигоцене — нижнеолигоцене), так называемая чеганская свита, с богатой пылевой флорой, но с бедной фауной в Прииртышье, с богатой фауной, но с более бедной флорой в Приаралье и с бедными и флорой и фауной в Тургае. Отложения эти литологически и палеонтологически прекрасно сопоставляются. Флора чегана

субтропическая, с примесью умеренной в верхних горизонтах, характеризующая климат более влажный, чем в эоцене.

в) Отложения мелководных фаций чеганского моря (ащейрыкская свита О. С. Вилова) — замкнутых опресненных бассейнов и континентальные отложения — первая и вторая свиты Северного Приаралья, Павлодарского Прииртышья, Тургай (приистотериевая и гидротериевая свиты) повсюду с богатой флорой, характеризующей сравнительно умеренный климат и температуры более низкие, чем в нижнем олигоцене. Листовидный комплекс широколиственных лесов, наиболее широко представленный в отложениях этих свит, сменяется комплексом с примесью большого числа субтропических ксерофитов. Кустарниковые и травянистые ксерофиты временами дают всходы, как это наблюдается в спектрах второй свиты Приаралья и Прииртышья, или в болотных слоях гидротериевой свиты в Тургае, или во второй свите Прииртышья. Флоры первой и второй свит богаты хвойными и сержкоцветными растениями. Возраст свит всеми исследователями признан среднеолигоценовым.

г) Отложения, переходные от средне- к верхнеолигоценовым или относящиеся к верхним горизонтам среднего олигоцена, — жаксылыкская свита Северного Приаралья и третья свита Прииртышья — плохо охарактеризованы фауной и флорой. Если в дальнейшем не удастся палеонтологически изучить эти отложения, то только факциальный анализ может установить их твердое стратиграфическое положение.

Возможно, что отложения эти имеют «динамическое» границы, зависящие от времени начала интенсивной эрозивной деятельности речных потоков верхнеолигоценового времени.

д) Отложения песчано-гравийные или песчаные, сформировавшиеся в результате глубоких размывов, связанных с тектоническими поднятиями в Мугоджарах и по окраинам Казахского нагорья и в Тургае. Флора этих отложений умеренная, разнообразная по составу, отражающая различные типы растительности, в зависимости от типов местообитаний, вблизи котлов отлагались осадки. В Павлодарском Прииртышье это четвертая свита К. В. Никифоровой, в Северном Приаралье — чагайская свита Л. Н. Формозовой, или четвертая свита В. А. Вахрамеева, в Тургае — тургайская свита В. В. Лаврова.

е) Отложения аральской свиты с *Corbula helmerseni* и с обильной фауной млекопитающих в Приаралье, глина, песков и супесей с нижнемопчановой фауной млекопитающих в Тургае и Прииртышье: они слабо охарактеризованы флорой (за исключением Тургай), но богаты фауной.

ж) Отложения более высоких горизонтов миоцена и плиоцена и покрывающие их четвертинные.

На этом, по-видимому, можно закончить краткий, схематический очерк геологии и палеогеографии районов, в основном являющийся реферативным изложением работ исследователей Приаралья, Прииртышья и Тургай, материалы которых послужили основой для спорово-пыльцевых исследований.

II. К ИСТОРИИ ФЛОРЫ И РАСТИТЕЛЬНОСТИ КАЗАХСТАНА В ТРЕТИЧНОЕ ВРЕМЯ

Развитие и распространение голосеменных на территории Казахстана является частью истории флоры и растительности этой страны, в отрыве от которой изучение голосеменных невозможно.

Общую характеристику развития флоры Казахстана дает А. Н. Криштофич в своих работах 1941 и 1946 гг., но делает это очень скупо, так как во времени составления его монографии об эволюции растительного покрова было чрезвычайно мало материала по ископаемым остаткам Казахстана.

В большой литературе, посвященной истории флоры и растительности земного шара вообще и территории нашего Союза в частности, не встречается специальных разделов, касающихся изучения развития голосеменных на территории Центрального и Северного Казахстана в третичный период.

В основном во всех работах, специально или косвенным образом касающихся истории развития флоры этого района, заостряется вопрос о происхождении, миграции и становлении современных пустынных флор Средней Азии и Казахстана, развитию же флоры голосеменных внимания не уделяется.

По-видимому, это происходит вследствие двух основных причин. Во-первых, обычно история развития флоры определенной ботанической провинции или области изучается на основании анализа ареалов современных и реликтовых видов, входящих в состав растительности большей части или всей области. Как известно, современная растительность большей части равнинного и мелкосопочного Казахстана и Северного Приаралья, в особенности тех районов, которые исследовались автором, совершенно лишена участия каких-либо представителей голосеменных, за исключением спорадически разбросанных островных сосновых массивов (типа Борового) или полукустарничков рода *Ephedra*. Во-вторых, история флоры, ее миграционные пути и центры возникновения устанавливаются по ископаемым растительным остаткам. На территории же Северного Казахстана и Северного Приаралья почти полностью отсутствуют макроскопические остатки голосеменных в ископаемом состоянии. Все богатые флористические находки на территории Тургайской депрессии, Зайсана и Северного Приаралья в основном содержат богатую листовую флору широколиственных растений среднеолигоценовых лесов, в период развития которых было широко распространено известнейшее всем вид *Taxodium cf. distichum* (болотный кипарис), который и фигурирует обычно в списках ископаемых флор.

Во флорах умеренных и субтропических упоминаются иногда находки *Ginkgo* и *Sequoia* и, за редким исключением, *Glyptostrobus*.

Между тем спорово-пыльцевые спектры нижних и верхних горизонтов палеогена и отчасти неогена изобилуют пыльной голосемянных самых разнообразных семейств, родов и видов.

Может возникнуть предположение, что пыльца в морские отложения занесена и не отражает растительности изучаемой территории. Но это предположение отпадает потому, что, кроме пыльцы сем. Pinaceae и Podocarpaceae, большинство видов которых имеют пыльную с воздушными мешками, в спектрах присутствует пыльца сем. Cupressaceae, Taxodiaceae, Taxaceae, Ginkgoaceae, Araucariaceae, Cycadaceae, не имеющих воздушных мешков. Кроме того, особенно обильна пыльца голосемянных именно в спектрах из континентальных отложений Казахстана, т. е. в тех спектрах, которые значительно более специализированы, чем морские, и отражают не только флору, но и растительность. Предположение о возможности массового заноса отпадает также и потому, что пыльца голосемянных встречается в спектрах, одновременно изобилующих пыльной покрытосемянных древесных растений, т. е. в спектрах, характеризующих лесной тип растительности.

Следовательно, обилие пыльцы голосемянных не есть результат дальнего заноса, подобного заносу пыльцы рода *Pinus* в открытых степях типа казахстанского мелкосопочника. Голосеменные в спектрах из Северного Казахстана и Северного Приаралья, а также из Тургай и Западной Сибири — явление закономерное, свидетельствующее о широком распространении голосемянных растений в палеогеновой, а отчасти и в неогеновой флоре этих районов. Вопрос этот, безусловно, представляет большой научный интерес и должен быть предметом специального изучения флористов и палеоботаников.

Для того чтобы ясно представить, какие участки суши мы имеем в виду, когда говорим об истории палеогеновой флоры и растительности Казахстана, восстановим в памяти палеогеографию палеогена на территории Азиатской и юга Европейской части СССР.

В палеогене, когда воды обширного моря Тетис отделили северные территории от южных в пределах от Индийского океана до Центральной Америки, территории современного Казахстана (Прикаспийская низменность, часть Западно-Сибирской низменности, Казахская складчатая страна), Тургайская депрессия и пустыня Бет-Пак-Дала (Голодная степь), кроме Казахского нагорья и части Мугоджар, была занята морем.

В течение среднего олигоцена площадь материка Киргизии расширилась за счет поднятия Памирской страны, Мугоджар и зоны, окаймляющей Казахское нагорье.

Таким образом, говоря о растительности Казахстана, мы должны иметь в виду сушу древней Киргизии, известную связь с восточными, азиатским и антарктическим, центрами распространения флор, и Мугоджары, связанные с Европейским материком и его флорой. Как полагают некоторые исследователи, казахстанский участок палеогенового моря изобилует архипелагами островов, по которым шло расселение растительности и которые отчасти служили источниками пыльцы и спор в морских отложениях.

Киргизия еще в древние времена была суши, которая с мезозоя не заливалась морем, следовательно, растительность на этом материке развивалась издавна, и растительные семейства, роды и виды имеют здесь гораздо более глубокие связи, чем растительность тех участков суши, которые вскрылись лишь в конце палеогена. Таким образом, флора Киргизии уже вскрылась лишь в конце палеогена. Таким образом, флора Киргизии была в своем роде самобытной и имела, по-видимому, связь с древней флорой Средиземноморья и с более древними, возможно гондванскими, флорами (Вульф, 1944).

На основании палеоботанических данных можно предполагать, что в эоцене в Казахстане, до района оз. Селеты, была распространена тропическая вечнозеленая флора, отнесенная А. Н. Криштофовичем к «полтавской», с родами: *Ficus*, *Quercus*, *Laurus*, *Cinnamomum*, *Oreodaphne* и сем. Proteaceae (*Banksia*, *Dryandra*), Myrtaceae, а из голосемянных — *Sequoia* Couttsiae и *Sequoia Sternbergii* (*Sequoia Langsdorffii* характерна уже для более умеренных флор). В этот же комплекс входят некоторые представители сем. Cycadaceae и род *Pinus*, а также большое разнообразие видов тропических папоротников из родов: *Chrysodium*, *Gleichenia*, *Adiantum*, *Pteris*, *Woodwardia*, *Osmunda*, *Aneides*, *Lygodium*, *Marrattia*. Эта тропическая флора все больше и больше обогащается ксерофитами по направлению к восточным границам ее распространения, т. е. к Туркмении, где она уже насчитывает большое число видов *Dryandra*, *Celastrorhynchum* и *Rhus*.

К северу от оз. Селеты территории Азии имела совершенно иной флористический облик. Это эоценовая «тургайская» флора А. Н. Криштофовича. Прототипом этой лесной флоры в Азии была азиатская флора (верхнемиоценовая). Характерными элементами этой флоры А. Н. Криштофович считал *Ginkgo* (так как этот род отсутствует в полтавской флоре), *Sequoia Langsdorffii*, *Taxodium distichum*, *Glyptostrobus*, *Fagus*, *Carpinus*, *Alnus*, *Betula*, *Castanea*, *Populus*, *Liquidambar*, *Juglans*, *Pterocarya*, *Zelkova*. В олигоцене, в Закавказской котловине и на востоке до Иртыша, а на запад — до Аральского моря распространялась тургайская умеренная субтропическая флора, включающая некоторые элементы полтавской эоценовой лесной флоры и ее наиболее ксерофитных вариантов. В миоцене и Средней Азии уже развиты открытые ландшафты с растительностью типа ксерофитных низкорослых кустов.

Работы П. Борцова (1865), Е. В. Вульфа (1944), М. М. Ильина (1936, 1937, 1945 и др.), Е. П. Коровина (1935), Н. М. Крашенинникова (1925), В. П. Малеева (1940), Н. П. Овчинникова (1940), М. Г. Попова (1927) и многих других дают огромный материал, позволяющий проследить историю формирования флор Средней Азии и отчасти Казахстана, причем большинство авторов, с М. М. Ильиным и Е. В. Вульфом во главе, приводят вполне убедительный материал, основанный на флористическом анализе ряда пустынных и полупустынных родов, о расхождении возникновении пустынных и полупустынных формаций Туркмении из древних средиземноморских флор.

Историческая география растений Е. В. Вульфа (1944) и ряд работ М. М. Ильина значительно пополняют и, я бы сказала, подкрепляют и расширяют схему развития третичной флоры, нарисованную А. Н. Криштофовичем. По мнению этих исследователей, в областях, окружающих древнее море Тетис, основной флорой была древняя средиземноморская третичная материка, основной флорой была древняя средиземноморская. Эта флора включала и субтропические элементы лесной флоры и ксерофитные формации пустынь третичного периода.

В течение второй половины третичного периода древняя средиземноморская флора приняла с востока элементы умеренной тургайской флоры «гингко». По всей вероятности, та же самая средиземноморская флора послужила основой при формировании саванного и пустынного ландшафта Казахстана. О расхождении развития пустынной флоры говорит А. Н. Криштофович (1936), предполагая, что в пределах Азии еще в начале третичного периода были широко развиты пустынные ландшафты, которые узкой полосой разделяли области полтавской и тургайской флор. Данные спорово-пыльцевых анализов по Северному Приаралю и Павлодарскому Прииртышью также указывают на раннетретичное происхождение пустынных и саванных ландшафтов, что подтверждается находками пыльных *Zygophyllaceae*, *Chenopodiaceae*, *Ephedra* и *Welwitschia* в эоценовых, олигоценных и миоценовых отложениях.

Для познания состава и путей формирования лесных формаций данные спорово-пыльцевого анализа также представляют не только богатый, но и новый материал, освещающий с совершенно новой точки зрения состав лесных формаций палеогена. Широколиственные, листопадные леса олигоцена в Казахстане, по данным пыльцевого анализа, были смешанными хвойно-широколиственными, а местообитания с высокими отметками над уровнем моря, по-видимому, населяли хвойные леса, которые имели широкое распространение в Казахстане, Приаралье и на Мугоджарах, во всяком случае, до миоцена. Под влиянием общей арктизации климата и усилившейся континентальности его после окончательного отступления олигоцен-миоценового солоноватоводного бассейна леса постепенно уступали место степным и полупустынным ассоциациям.

III. ЗНАЧЕНИЕ ПЫЛЬЦЫ ГОЛОСЕМЕННЫХ ДЛЯ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПАЛЕОЛАНДШАФТА ПАЛЕОГЕНА И ОТЧАСТИ НЕОГЕНА

Работ, посвященных специальному изучению ископаемой пыльцы голосеменных растений, в нашей отечественной литературе очень мало. Между тем морфологические особенности большинства родов пыльцы голосеменных, в особенности относящихся к сем. Pinaceae, Podocarpaceae и отчасти Taxodiaceae, настолько характерны, что они, пожалуй, легче могут быть распознаваемы, чем какие-либо из представителей покрытосеменных. Кроме того, пыльца голосеменных, как правило, наиболее часто встречается в ископаемом состоянии.

При изучении спорово-пыльцевых спектров палеогена и отчасти неогена обнаружено большое число пыльцевых зерен прекрасной сохранности, принадлежащих видам, которые в большинстве своем уже неоднократно отмечались в третичных отложениях различных районов СССР и за рубежом. К сожалению, в большинстве работ по спорово-пыльцевому анализу третичных отложений пыльца и споры определялись обычно только по виду рода или семейства. Лишь в отдельных случаях давалось видовое название рода или семейства. Лишь в отдельных случаях давалось видовое название рода или семейства. Лишь в отдельных случаях давалось видовое название рода или семейства. Лишь в отдельных случаях давалось видовое название рода или семейства.

Достаточно напомнить, что за последние годы появились работы М. Х. Моисозон-Смолиной (1949, 1950, 1952), Л. А. Кузнецовой (1945), З. П. Губониной (1952), А. Н. Сладкова (1953, 1954), Е. Д. Заклянской (1953). Наконец, в 1954 г. вышла прекрасная работа В. В. Зауер и работа И. С. Штэпа. За рубежом в этот же период вышли работы Эрдамана (Erdtman, 1943, 1947, 1952), Селлинга (Selling, 1947) и ряд других, посвященные морфологии пыльцы ныне живущих растений. Однако в большинстве перечисленных работ содержится описание пыльцы покрытосеменных, а сравнительный материал для описания и определения ископаемой пыльцы голосеменных растений все еще остается очень ограниченным. В 1952 г. вышла работа Н. А. Болховитиной, в которой она предлагает новую классификацию пыльцы хвойных растений, снабженных воздушными мешками, выделенных из мезозойских отложений Казахстана, Сибири и Русской платформы. Там же дана краткая характеристика морфологических рядов и типов пыльцевых зерен в генетической последовательности. Н. А. Болховитина пытается дать схему изменения строения пыльцевых зерен хвойных от верхнего палеозоя до верхнего мела и

кайнозой, выделяя морфологические типы зерен, характерных для спектров отдельных эпох. К сожалению, автор не продолжил своих работ в сторону большей детализации в изучении эволюции структурных элементов пыльцы голосеменных.

В 1954 г. опубликована работа В. В. Зауер, посвященная значению ископаемых видов рода *Cedrus* для целей стратиграфического расчленения континентальных отложений. Автор приводит данные о строении пыльцы современных видов рода *Cedrus* и приходит к выводу, что морфологические особенности пыльцы тесно увязаны с морфологическими признаками растения в целом, а затем приводит описание различных ископаемых видов пыльцы рода *Cedrus* и прослеживает их широтное и вертикальное распространение в мезозойских отложениях. В. В. Зауер удалось установить, что кедр производит так же много пыльцы, как и прочие роды сем. Ринасеев, за исключением рода *Pinus*, и что пыльца рода *Cedrus* не разнится далеко от производящего растения. Установлено также, что по морфологическим признакам пыльца кедр генетически близок к роду *Picea* и некоторым представителям рода *Pinus* из подрода *Haploxyylon*.

Проследив местонахождения пыльцы и макроскопических остатков кедр, В. В. Зауер пришла к выводу, что этот род, появившийся впервые в перми, достиг своего развития к концу палеозоя. Концом расцвета рода *Cedrus* следует считать верхнетретичное время.

Весьма интересна выявленная В. В. Зауер приуроченность ископаемых видов рода *Cedrus* к местобитаниям с высокими отметками, в районах с расчлененным рельефом, и совершенное отсутствие его на равнинных местах и в областях депрессий. В заключение автор приходит к выводу, что ископаемые виды кедров могут быть использованы для стратиграфии континентальных отложений. Работа В. В. Зауер является, пожалуй, образцом как морфологических описаний видов ископаемой пыльцы, так и историко-флористического исследования при помощи спорно-пыльцевого анализа. Наши наблюдения относительно распространения голосеменных в анализе. Наши наблюдения относительно распространения голосеменных в анализе. Наши наблюдения относительно распространения голосеменных в анализе.

При этом автору хотелось бы показать, что пыльца голосеменных (в общем комплексе ископаемой пыльцы) позволяет проследить, пока только схематично, некоторые этапы в истории флоры и растительности больших территорий. Занимаясь изучением спорно-пыльцевых спектров морских или континентальных кайнозойских отложений (в основном палеогеновых) Павлодарского Прииртышья, Северного Приаралья и ряда районов юга Европейской части СССР, автор смог выделить большое количество видов пыльцы и спор, характеризующих разнообразие флоры, типы растительных ассоциаций, группы их и флористические комплексы.

Спорно-пыльцевые спектры палеогеновых отложений Павлодарского Прииртышья и Северного Приаралья содержат значительное количество пыльцы голосеменных растений, процентное содержание которой закономерно изменяется от горизонта к горизонту и различно в широтном направлении. Во многих спектрах, в частности в выделенных из континентальных отложений среднего олигоцена, пыльца голосеменных преобладает над пыльцой покрытосеменных. Последнее отмечалось в ряде работ,

по спорно-пыльцевому анализу олигоцена (Северный Казахстан — Западная, 1953; Центральная и Западная Казахстан — Покровская, 1954; Приаралье — Чигурьева, 1948; Тургайская впадина — Бойцова и Покровская, 1954; Абузярова, 1951 и др.).

Следует отметить, что при сопоставлении данных спорно-пыльцевого анализа с данными по ископаемой листовой флоре наблюдаются почти постоянные расхождения в содержании остатков голосеменных. В основном это относится к представителям сем. Ринасеев и рода *Pinus* в частности.

Еще в 1948 г. А. А. Чигурьева в своей работе по флоре Аму-Таса указывала, что на основании микроанализа список ископаемой флоры, определенной М. Ф. Пейбург (1928), пополняется такими родами, как *Pinus*, *Picea* и др.

Автор настоящей работы также может привести примеры, подтверждающие это положение. При сопоставлении данных по листовым отпечаткам из эоценовых отложений западного склона Мугоджар (Баранов, 1953) с составом спорно-пыльцевых спектров из однообразных морских отложений Северного Приаралья (Заклинская, 1953) оказалось, что флористические комплексы, выявленные обоими методами исследования, весьма близки в отношении состава покрытосеменных растений, представленных в основном богатым комплексом жестколистных древесных растений с дубами, каштанодубами, лаврами и др. Но данные спорно-пыльцевых анализов дополнили список растений большим количеством видов хвойных (*Pinus*, *Picea*, *Cedrus* и др.), входивших, по-видимому, в состав растительных ассоциаций тех участков суши в эоцене, которые были в значительной мере удалены от места непосредственного захоронения листовых остатков.

Далее, как известно, тургайская флора на территории северной части Казахстана, по палеоботаническим данным, характеризуется преобладанием бука, граба, ольхи, липы, липы, липы и прочих широколиственных листопадных растений. В то же время данные спорно-пыльцевого анализа показывают, что флора Тургайской палеогеографической области, помимо широколиственных листопадных пород, была весьма богата различными видами хвойных, которые в некоторых случаях даже преобладали над листовыми породами.

Расхождение данных спорно-пыльцевых анализов с анализами ископаемых макроскопических остатков объясняется тем, что условия их захоронения совершенно различны. Находясь непосредственно к местам захоронения детрита обычно приурочены непосредственно к местам захоронения, расположенным, в свою очередь, в непосредственной близости к месту обитания производящих растений. Пыльца же, разносясь по воздуху, оседает на некоторых растениях от производящих растений, причем радиус разноса некоторых видов голосеменных растений достигает нескольких десятков километров. Таким образом, в отложениях, сформировавшихся в водоеме, где захоронялись макроскопические растительные остатки, мы можем обнаружить пыльцу не только тех растений, которые непосредственно окружали место захоронения, но также и тех, которые входили в состав ассоциаций достаточно удаленных территорий.

Способность к разносу по воздуху особенно сильно развита у пыльцы хвойных с воздушными мешками. К ним относятся различные виды рода *Pinus*, *Picea*, *Podocarpus*, *Abies* и др. Отсюда становится понятным тот факт, что в осадочных отложениях, которые содержат обильные остатки растений с крупной лиственной, произрастающих на территории ближайших местобитаний, встречается пыльца тех растений, которые входят в состав ассоциаций более удаленных территорий.

Хвойные, принимавшие, по-видимому, значительное участие в составе наземной растительности той части суши, которая примыкала к

территории нынешнего Прииртышья и Северного Приаралья в палеогене, не везде сохранились в виде микроскопических остатков. Пыльца же этих растений встречается в больших количествах и представляет значительное число родов и видов.

В палеогене различные виды рода *Pinus*, вероятно, занимали, в отличие от болотного кипариса, дрепированные местообитания с высокими отметками. Накопление же основных флоросных горизонтов происходило в условиях пониженного рельефа и защищенных местообитаний, где преимущественно селились лиственные породы.

Листовые отпечатки характеризуют, так же как и карпологиические остатки, растительность более узких регионов, чем спорово-пыльцевые спектры. Кажущееся же расхождение данных спорово-пыльцевых анализов и микроскопических остатков является, собственно говоря, не расхождением, а взаимодополнением. Поэтому объединенное и комплексное исследование всеми методами палеоботаники дает наиболее полный материал для восстановления истории флоры и растительности, а следовательно, и для целей стратиграфии.

Ископаемые пыльца и споры, в дополнение к разбросанным находкам микроскопических остатков, дают массовый статистический материал, пригодный для восстановления последовательной смены флористических комплексов и типов растительности.

Следует отметить, что о микроскопических остатках голосеменных палеогена в Казахстане имеется сравнительно немного сведений; в сводке А. Н. Криштофовича (1941) значится всего двенадцать видов, найденных на территории Казахстана. Среди них отмечены роды *Abies*, *Araucaria*, *Cupressinoxylon*, *Ginkgo*, *Glyptostrobus*, *Pinus*, *Sequoia* и *Taxodium*. За последнее время список находок голосеменных, за исключением видов рода *Cedrus*, по данным В. В. Зауер (1954), пополнился незначительно. В известных до сих пор работах (Чигуряева, 1951, 1952; Покровская, 1954; Лавров, 1951, 1953; Абузярова, 1954; Зауер, 1954; Покровская и Бойцова, 1954 и др.), в которых приводятся списки спорово-пыльцевых комплексов различных горизонтов третичных отложений (от эоцена до миоцена включительно), содержится не более пяти наименований родов голосеменных.

Автору настоящего сообщения удалось установить для палеогена изучаемых районов более ста видов пыльцы голосеменных, относящихся к сем. *Ginkgoaceae*, *Cusackaceae*, *Araucariaceae*, *Taxodiaceae*, *Cupressaceae*, *Podocarpaceae*, *Pinaceae*, а также пыльцу родов *Ephedra*, *Weinmannia* и *Gnetum*.

Представители отдельных семейств и родов обширного класса голосеменных развивались по-разному в различные отрезки кайнозоя на территории, примыкающей к палеогеновому морю Приаралья и Казахстана, а затем на участках суши, освободившейся от морских вод.

Об истории развития и «регрессии» голосеменных растений во флоре нынешнего Приаралья и Северного Казахстана будет сказано ниже, здесь же только отметим, что в настоящее время голосеменные в Казахстане представлены лишь тремя семействами: *Pinaceae*, *Cupressaceae* и *Ephedraceae*, из которых, как отмечает в своей сводке Н. В. Павлов (1947), в Казахстане известны следующие виды:

Семейство *Pinaceae*

Pinus silvestris L. — сосна обыкновенная, обитающая в основном на равнинно-лесных участках — в виде боров, или единично — на скалах мелкосопочников.

Pinus sibirica (R и P. G.) M a y r. — кедр сибирский, ограниченно распространенный только в Восточном Казахстане, у верхней границы леса на Алтае.

Picea Schrenkiana F i s c h. et M e y — ель тяньшаньская, в основном заселяющая горные районы Джунгарского и Заилийского Ала-Тау и другие горы.

Larix sibirica L e d b. — лиственница сибирская, которая обильна только в горах Восточного Казахстана (Алтай, Саур, Тарбагатай).

Abies sibirica L e d b. — пихта сибирская, растущая только в лесном поясе гор Восточного Казахстана и Алма-Атинской области (Алтай, Джунгарский Ала-Тау).

Abies Semenovii B. F e d t s c h. — пихта Семенова, которая известна только в горах Южно-Казахстанской области и спорадически встречается среди елового леса.

Семейство *Cupressaceae*

Известен только один род — *Juniperus*, представленный восемью видами:

Juniperus communis L. — можжевельник обыкновенный, горнолесной или горный вид в Западном Казахстане.

Juniperus pseudosabina F i s c h. et M e y — можжевельник алтайский, распространенный только по верхней границе лесного пояса Алтая, Тарбагатай, Джунгарского Ала-Тау.

Juniperus sabina L. — можжевельник казацкий, горно степной вид, наиболее широко распространенный в Казахстане на мелкосопочнике, а также в кустарниково-степном поясе гор.

Juniperus semiglobosa R g l. — можжевельник полушаровидный, горнолесной вид, обитающий только в горах южной области.

Juniperus seravschanica K o m. — можжевельник зеравшанский, нагорный вид, обитавший только в Южном Казахстане.

Juniperus sibirica B u g e t — можжевельник приземистый, горнолесной, широко распространенный вид в лесостепи и субальпийском поясе гор Восточного Казахстана.

Juniperus talassica L y p s k y — можжевельник таласский, который растет только в высокогорных районах Южного Казахстана.

Juniperus turkestanica K o m — можжевельник туркестанский, высокогорный субтропический вид, обитающий только по верхней границе лесного пояса гор ряда областей.

Семейство *Ephedraceae*

Представлено четырьмя видами степных и горно степных местообитаний:

Ephedra distachya L. — эфедра обыкновенная, степная, распространенный в Северном Казахстане, не идущий к югу за пределы ковыльных и ковыльно-степняковых степей.

Ephedra equisetina B g e. — эфедра хвощевая, горно степной вид, обитающий только в горах на южных каменистых склонах кустарникового и лесного пояса.

Ephedra intermedia S c h r e n k. et C. A. M e y — пустынно-степной и пустынный вид Центрального и Южного Казахстана. Растет в полой и каменистых пустынях везде, кроме полупустынно-злаковых степей.

Ephedra lomatolopsis S c h r e n k. — эфедра окаймленная, пустынный, растущий в основном в песчаных пустынях Южного Казахстана и Карагандинской области (встречается и в Алма-Атинской области).

Как следует из приведенных данных, в настоящее время на территории Северного Казахстана и в особенности Северного Приаралья голосеменные представлены очень слабо. Участие их в растительном покрове ограничивается лишь представителями родов *Ephedra*, *Pinus*, *Juniperus*. При этом род *Pinus* на изучаемой территории имеет только одного

представителя, а именно — *Pinus silvestris*. Остальные виды рода *Pinus* представлены лишь горными видами, приуроченными в основном к южным и восточным районам Казахстана.

Широко распространенные в палеогене и отчасти в неогене представители сем. Podocarpaceae, Araucariaceae, Taxodiaceae, Cupressaceae, Ginkgoaceae, не говоря уже о Gnetales и Welwitschiaceae, в современной флоре Казахстана отсутствуют. Исчезли они не одновременно, так же как не в одно время появились и достигли кульминационного пункта своего развития.

По данным спорово-пыльцевого анализа выясняется продолжительная и разнообразная история голосеменных, безусловно связанная с общей историей флоры и растительности, которая в свою очередь развивается в связи с изменениями общей физико-географической обстановки. Так например, появление пыльца *Tsuga* приурочено к спектрам континентальных отложений, в комплексе с возросшим распространением смешанных лесов, где значительное участие приписывают роды *Pinus* и *Picea*.

Ограниченный цикл развития *Taxodium*, безусловно, связан с общим понижением температур и увеличением влажности в нижнем и среднем олигоцене, когда в пределах суши на месте Казахского нагорья, а возможно, и в некоторых районах Западной Сибири начали появляться элементы проколловитовой мезофильной флоры. В дальнейшем максимальный расцвет *Taxodium* приурочен ко времени особенно интенсивного распространения умеренной лесной флоры, пришедшей с востока и севера (максимум пыльца *Taxodium* в спектрах из континентальных отложений второй сивы Северного Прииртышья вместе со значительным преобладанием пыльца широколиственных пород).

Неоднократное увеличение процентного содержания пыльца рода *Cedrus* связано с тектоническими поднятиями, и полное исчезновение его совпадает с эпохой выравнивания страны и с общей аридизацией климата, когда на кристаллических останках успешно развивались сосны из секции *Eurypis* (по-видимому, *Pinus aff. silvestris*).

Мы полагаем, что при внимательном изучении отдельных представителей пыльца родов и видов голосеменных можно выделить определенные группы их, а возможно, и отдельные виды, которые могут быть использованы для корреляции как морских, так и континентальных отложений палеогена и неогена Северного Прииртышья и примыкающего к нему с востока участка Западно-Сибирской низменности, а также Северного Приаралья и смыкающегося с ним Тургайского прогиба.

Интересно, что при анализе пыльца голосеменных и при сравнении ареалов их современного распространения в пределах Казахстана выясняется, что флора в палеогене была действительно смешанной, как это отмечал и А. Н. Криштофович (1946). Разнообразный комплекс ее свидетельствует также о том, что палеогеновая казахстанская флора состояла из австрийских, африканских, монголо-китайских, североамериканских и южноамериканских представителей, не считая флоры Сибири и Гренландии. Это может быть подтверждено анализом ареалов современного распространения ряда семейств и родов.

Относительно смешения экологически различных типов флоры палеогена, которое также отмечает А. Н. Криштофович, данные пыльцевого анализа дают дополнительный материал. По-видимому, в основном это происходит вследствие того, что Казахстан, включая и территорию, скрытую в начале палеогена под морской трансгрессией, находился как бы на рубеже границ распространения двух основных флор — полтавской и тургайской (в понимании А. Н. Криштофовича). Именно в течение палеогена эти флоры изменяли свой первоначальный облик. Вся территория Казахстана претерпевала существенные перестройки — регрессивные и

трансгрессивные движения моря, тектонические поднятия, смену некон- интенсивной эрозии веками относительного покоя. Все это делало территорию Казахстана ареной борьбы за существование в растительном мире, относительно частых изменений ландшафта и смены экологических типов растительности. Естественно, что в это время были такие промежуточные формы, экологически различные. Поэтому нам не представляется невозможными одновременные находки в морских отложениях пыльца относительно влаголюбивого кедра с пылью типичного ксерофита *Nit-raria Schoberi* и с пылью миртовых.

Кедры, заканчивающие свое развитие в неогене, в верхнепалеогеновой флоре (суши) по относительно бедному содержанию пыльца его видов в спектрах) играли подчиненную роль, отсутствовали в горные районы, где несли убежища в местах, защищенных от аридных влияний.

Флора *Nit-raria* заселяла открытые местообитания с песчаными, местами засоленными грунтами, располагавшимися в прибрежно-литоральных зонах теплого палеогенового моря. Миртовые, самые разнообразные, входили в состав ассоциаций юго-восточных флор с *Podocarpus*, *Dacrydium* и *Dammara*, доживавших свой век на территории Казахстана.

В то же время в пределах северных границ Полтавской ботанико-географической провинции (области) начали появляться первые представители умеренных мезофильных флор с северо-востока (Сибири с *Betula*, *Yuglans* и *Carpinus*, которые иногда и в виде единичных пылевых зерен встречаются в спорово-пылевых спектрах вместе с единичными же зернами пыльца *Pinus protosibirica* (pollen) из секции *Cembrae* (возможно, прародитель *Pinus sibirica*).>

IV. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ИЛЫШЫ ГОЛОСЕМЕННЫХ В КАШОЗЫСКИХ ОТЛОЖЕНИЯХ НАВОДОРСКОГО ПРИШТЫШЫ И СЕВЕРНОГО ПРИРАПЫ

Проведя содержание иллыш голоосеменых (находясь сем. *Ephedra* сем. и рода *Wetzelia* и *Saccharum*), поскольку более точно их систематическое положение еще не определено, начиная отсюда до верхов наложения по Северному Прирапу и от наложения до неотаи исключительно — для Наводорского Прирапу, и сравня его с распределением в сопредельных отложениях (табл. 1).

СЕВЕРНОЕ ПРИРАПЫ

В сиктах тасаранской (Фиг. 5) сикты содержание иллыш голоосеменых доходит в нижних горизонтах до 85%, а затем резко снижается до 30—50% и в этих пределах доходит до своего верха сикты. Несколько более иллыш голоосеменых сикты саксаульской сикты: содержание их в средней части сикты 30%, в верхних же и нижних частях повышается до 50%.

В сиктах чечанской сикты содержание иллыш голоосеменых более равномерно, оно колеблется от 40 до 50%, за исключением верхних горизонтов (верхних, исследованных автором), где голоосеменых всего 8—10%.

Наиболее богатыми в отношении содержания иллыш голоосеменых являются сикты первой кутабулукской сикты: здесь иллыш голоосеменых в некоторых горизонтах достигает 80%. Несколько более сикты второй, иллыш голоосеменых сикты содержание иллыш голоосеменых в ней равномерно по всей толщине и колеблется лишь в пределах 50—50%, за исключением отдаленных горизонтов, где она достигает 80%.

В общем сикты и в верхних и нижних отложениях богатых иллыш голоосеменых, и их содержание колеблется незначительно. По составу же представленных сикт различаются: в сиктах саксаульской сикты различия сикт значительно отличаются друг от друга.

Сикты тасаранской сикты характеризуются преобладанием иллыш рода *Pinus*, содержание которой в отдаленных горизонтах (средняя часть) доходит до 85% (от общего числа зерен иллыш голоосеменых). Представлен род *Pinus* в основном сикт: *Сибире. С. р. а. с. б.* (*Pinus protuberans* sp. nov. (pollen) и другие виды — до 40%); *Восток. М. у. г.* — до 20%; *Pseudotsuga b. d. i.* — менее 20%; *Strobilus Schaw.* — менее 20%; *Austro-* *les L. o. d.* — менее 10%. Остальные роды сем. *Pinaceae* представлены иллыш количеством зерен.

Род *Cedrus L. i. k.* представлен четырьмя видами, из которых преобладают два (*C. longicauda* sp. nov. (pollen) и *C. lauriculata Z. a. c.* и

| Сикты | Виды | Виды | | | | | | | | | |
|--------------------|---------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| | | Альберт | Альберт | Альберт | Альберт | Альберт | Альберт | Альберт | Альберт | Альберт | Альберт |
| R ₆₂ | Чингизская | + | + | + | + | + | + | + | + | + | + |
| R ₆₃ | Кутабулукская | + | + | + | + | + | + | + | + | + | + |
| R ₆₄ | Чечанская | + | + | + | + | + | + | + | + | + | + |
| R ₆₅ | Саксаульская | + | + | + | + | + | + | + | + | + | + |
| R ₆₆₋₆₈ | Тасаранская | + | + | + | + | + | + | + | + | + | + |

• — сибирские, роды и виды, которые обнаружены в тасаранской сикте
• — сибирские
• — восточные
• — в кутабулукской сикте

Фиг. 5. Схема распространения иллыш голоосеменых в кутабулукских отложениях Северного Прирапа
Составил Е. Д. Зинченко

Таблица 1
Распределение пыльцы голосеменных в морских и континентальных
отложениях палеогена Северного Приаралья

| Голосеменные | Святи по А. Л. Нишину и Л. Н. Формозовой | | | | |
|---|--|-------------------|-----------|-------------------|-------------------|
| | тасаран- ская | сансауль- ская | чеганская | кутаб- ланская | челян- тинская |
| Суммарно, % | 30—85* | 30—50 | 0—50 | 58—80 | 40—80 |
| Преобладает, % | 60—80 | 50 | 40 | 70 | 50 |
| Cycadacites | + | + | — | + | — |
| Cycadaceae | 0—5 | 3—5 | — | <5 | + |
| Zamites sp. (pollen) | — | — | + | — | — |
| Ginkgoites sp. | 0—5 | — | — | — | — |
| Ginkgoaceae | | | | | |
| Ginkgo bilobaeformis sp. nov. (pollen) | — | 0—5 | 0—10 | — | — |
| Ginkgoites sp. (pollen) | — | — | + | + | + |
| Taxites sp. | + | + | + | + | + |
| Taxaceae | | | | | |
| Taxus baccataeformis sp. nov. (pollen) | — | — | — | 5—10 | 5—10 |
| T. cuspidataeformis sp. nov. (pollen) | + | + | + | — | — |
| Torreya californiformis sp. nov. (pollen) | 0—10 | 0—10 | 0—10 | — | — |
| Podocarpaceae | | | | | |
| Podocarpites kazakhstanica sp. nov. (pollen) | — | — | — | + | — |
| P. gigantea sp. nov. (pollen) | — | <5 | 0—1 | <1 | — |
| Podocarpus sellowiformis sp. nov. (pollen) | — | <1 | — | — | — |
| P. andiniiformis sp. nov. (pollen) | — | <1 | <1 | <1 | <1 |
| P. nageiaformis sp. nov. (pollen) | <12 | — | <5 | <1 | <1 |
| Dacrydium elatumiformis sp. nov. (pollen) | <10 | 0—10 | — | + | — |
| Araucariaceae | | | | | |
| Araucaria sp. | — | — | 5—10 | — | — |
| A. elegans sp. nov. (pollen) | 0—5 | — | — | — | — |
| Agathis sp. | — | — | <1 | — | — |
| Agathis ovataeformis sp. nov. (pollen) | — | <10 | + | — | — |
| Pinaceae | | | | | |
| Abies sp. | + | — | — | — | — |
| Abies sibiriciformis sp. nov. (pollen) | — | — | + | + | + |
| A. protofirma sp. nov. (pollen) | + | + | + | — | — |
| Keteleeria davidianaeformis sp. nov. (pollen) | — | + | + | + | + |

Таблица 1 (продолжение)

| Голосеменные | Святи по А. Л. Яншину и Л. Н. Формозовой | | | | |
|--|--|-------------------|---------------|---------------------|-------------------|
| | тасаран- ская | сансауль- ская | чеганская | нутанбу- ланская | чинли- тинская |
| Pinaceae | | | | | |
| <i>Picea tatarica</i> sp. nov. (pollen) | +до 3 | <1 | — | — | — |
| <i>P. alata</i> sp. nov. (pollen) | — | + | + | + | — |
| <i>P.</i> секции <i>Eupicea</i> Willkm. | — | — | + | + | + |
| <i>Cedrus lazireticulata</i> Zauer (pollen) | +до 10 | +до 10 | — | — | — |
| <i>C. piniformis</i> sp. nov. (pollen) | — | 5—12 | — | 1—5 | 0—1 |
| <i>C. longisaccata</i> sp. nov. (pollen) | 8—10 | 0—4 | 0—4 | 0—1 | — |
| <i>C. Janschinii</i> sp. nov. (pollen) | +до 5 | 2—20 | 0—25 | — | — |
| <i>C. pusilla</i> Zauer (pollen) | + | 0—10 | 0—12 | 1—3 | — |
| <i>C. aff. libani</i> Loud. | — | — | 0—1 | + | — |
| <i>C. aff. deodara</i> Loud. | — | — | — | <10 | — |
| <i>C. aff. atlantica</i> Manetti. | — | — | 0 | + | — |
| Род <i>Pinus</i> (суммарно) | 60—85 20—40 | 40—50 5—25 | 30—80 5—60 | 50—80 20—30 | 40—60 <25 |
| <i>Pinus</i> секции <i>Cembrae</i> Shaw. | — | — | — | — | — |
| <i>P. aff. koraiensis</i> Sieb. et Zucc. | — | — | — | 1—10 | 1—10 |
| <i>P. sibiriciformis</i> sp. nov. (pollen) | + | — | — | — | — |
| <i>Pinus protocembra</i> sp. nov. (pollen) | 5—15 0—20 | 5—15 10—30 | 5—12 <20 | 8—13 <20 | 5—15 <20 |
| <i>P.</i> секции <i>Strobus</i> Shaw. | — | — | — | — | + |
| <i>P. strubiformis</i> sp. nov. (pollen) | — | + | + | + | + |
| <i>P. peuceformis</i> sp. nov. (pollen) | — | + | — | + | + |
| <i>P. exelsaeformis</i> sp. nov. (pollen) | — | + | — | + | — |
| <i>P. ponderosaeformis</i> sp. nov. (pollen) | + | — | — | — | — |
| <i>P. bicornis</i> sp. nov. (pollen) | + | + | — | — | — |
| <i>P. minutus</i> sp. nov. (pollen) | — | — | — | + | + |
| <i>P. taedaeformis</i> sp. nov. (pollen) | — | <20 | <10 | +до 20 | +до 20 |
| Секция <i>Austroales</i> Loud. | — | — | — | — | — |
| <i>Pinus singularis</i> sp. nov. (pollen) | <10 | <5 | <10 | >10 | <10 |
| <i>Pinus banksianaeformis</i> sp. nov. (pollen) | 10—20 | 0—1 | 0—1 | 0—1 | 0—1 |
| <i>P. halepensisformis</i> sp. nov. (pollen) | + | — | — | — | — |
| <i>P.</i> секции <i>Eupitys</i> Spach. | 0—5 | 0—5 | 0—5 | 1—32 | 5—35 |
| <i>Tsuga crispata</i> sp. nov. (pollen) | — | — | — | 0—5 | 0—5 |
| Taxodiaceae | | | | | |
| <i>Sciadopitys tuberculata</i> sp. nov. (pollen) | — | — | + | + | + |
| <i>Sequoia</i> sp. | + | + | + | + | + |
| <i>Sequoia sempervirensformis</i> sp. nov. (pollen) | — | <5 | <5 | <5 | <5 |

Таблица 1 (окончание)

| Голосеменные | Святи по А. Л. Яншину и Л. Н. Формозовой | | | | |
|--|--|-------------------|-----------|---------------------|-------------------|
| | тасаран- ская | сансауль- ская | чеганская | нутанбу- ланская | чинли- тинская |
| Taxodiaceae | | | | | |
| <i>Taxodites</i> sp. | + | + | + | + | + |
| <i>Taxodium aff. distichum</i> L. (Rich.) | — | — | 5—12 | 5—15 | 5—12 |
| <i>Cupressacites</i> (pollen) | + | + | + | + | + |
| <i>Cupressaceae</i> | 0—5 | +до 30 | 20—60 | 15—60 | 5—25 |
| <i>Ephedraceae</i> (суммарно) | — | +до 5 | + | +до 5 | 0—5 |
| Gnetaceae | | | | | |
| <i>Gnetumites</i> sp. (pollen) | <5 | <5 | 0—5 | — | — |

* Процентное содержание голосеменных суммарно дано по отношению к общей сумме сосчитанных пылевых и спорных зерен. Цифры, обозначающие содержание отдельных видов, даны в процентах по отношению к сумме голосеменных.

** Знак + обозначает присутствие в виде единичных находок; знак — обозначает отсутствие.

(pollen)], которые не имеют аналогов среди пыльцы современных видов рода *Cedrus*. Общая сумма их не превышает 10%. Род *Picea* Dietr. (также не более 10%) представлен новым видом *P. tatarica* sp. nov. (pollen), впервые выделенным из отложений тасаранской свиты. Иногда встречаются не определенные до вида единичные пылевые зерна *Keleceeria* и *Abies*. Пыльца рода *Tsuga* отсутствует. Редко, обычно не более чем 5—10%, встречается пыльца сем. Cupressaceae, Taxaceae [*Torreya* sp., *Taxus cuspidataeformis* sp. nov. (pollen)], Araucariaceae [*Araucaria elegans* sp. nov. (pollen)], Gnetaceae *Gnetumites* sp. (pollen)] и Podocarpaceae. Содержание последнего в спектрах тасаранской свиты больше, чем во всех остальных свитах (до 12%). Сем. Podocarpaceae представлено несколькими видами рода *Podocarpus* L. Herit. [*P. nageiaeformis* sp. nov. (pollen)] и др., пыльца которых отличается рядом признаков от пыльцы современных видов этого рода и одним видом рода *Dacrydium* [*D. elatunifformis* sp. nov. (pollen)]. В спектрах сансаульской свиты род *Pinus* суммарно представлен 40—50%. Одновременно значительно снижается содержание пыльцы *Pinus* секции *Cembrae* (5—25%), представленной в основном, так же как и в тасаранской свите *Pinus protocembra* sp. nov. (pollen) — 5—15%. В спектрах из самых верхних горизонтов свиты встречается пыльца, несколько напоминающая *P. koraiensis* и *P. cembra*, отмеченные при подсчете к секции *Cembrae*. Секция *Strobus* представлена значительно богаче, чем в тасаранской свите (до 35%). В нижних горизонтах свиты впервые появляется пыльца, подобная *Pinus exelsa* Wall., — *Pinus exelsaeformis* sp. nov. (pollen), *P. peuceformis* sp. nov. (pollen) и *P. taedaeformis* sp. nov. (pollen). Общее содержание пыльцы рода *Pinus* в сансаульской свите довольно постоянно и колеблется в пределах от 40 до 50%. Род *Cedrus* в сансаульской свите представлен пятью видами: *Cedrus Janschinii* sp. nov. (pollen) — 2—20%, *C. pusilla* Zauer (pollen) — 0—10%, *C. piniformis* sp. nov. (pollen) — 5—12%. *C. lazireticulata*

Zauer (pollen) — около 10% и *C. longisaccata* sp. nov. (pollen) — единично. Значительно увеличивается количество пыльцы сем. Cupressaceae (около 30%) и впервые отмечена пыльца Taxodiaceae, принадлежащая, по-видимому, роду *Sequoia*. Среди пыльцы сем. Podocarpaceae также впервые появляются три новых вида: *Podocarpus andiniiformis* sp. nov. (pollen), *P. sellowiformis* sp. nov. (pollen) и *Podocarpites gigantea* sp. nov. (pollen). Общее содержание пыльцы сем. Podocarpaceae не превышает 12%. В верхних горизонтах свиты впервые появляется пыльца *Ginkgo* (менее 5%), возможно, *Ginkgo* aff. *biloba*. В общем спектры саксаульской свиты более бедны пыльцой голосеменных, чем спектры тасаранские, но богаче в видовом отношении и характеризуются относительно большим числом новых видов, которые не встречаются в спектрах предыдущих свит. Несмотря на это, спектры тасаранской и саксаульской свит флористически близки между собой. Представляют они флору тропическую (или субтропическую) и включают представителей таких семейств, которые ныне обитают в тропических и субтропических широтах южного полушария, а, судя по ареалам их современного распространения, имеют древнее происхождение, еще от гондванской флоры [сем. Araucariaceae и Podocarpaceae с родом *Dacrydium*, род *Torreya* (*Torreyales*), *Pinus protocenbra* sp. nov. — вид, близкий к *P. harpoxylon*, отмечающийся и в спектрах нижнего мела и в более древних отложениях, род *Gnetum* и сем. Cupressaceae и др.].

В верхах саксаульской свиты обнаружена пыльца *Ephedra*. Появление пыльцы *Ephedra* совпадает с обилием пыльцы травянистых растений и кустарничковых ксерофитов в комплексе покрытосеменных, что косвенным образом указывает на усиление аридности климата и на наличие пустынных ассоциаций (возможно, на литоралях моря).

Спектры чеганской свиты значительно отличаются от спектров отложений тасаранской и саксаульской свит. Вызвано это значительным изменением климатических условий (некоторое похолодание и увеличение влажности) и наступлением новой наиболее интенсивной трансгрессии моря. В связи с этим изменился и растительный покров окружающей суши. Содержание пыльцы различных видов рода *Pinus* в чеганских спектрах неравномерно и колеблется от 30 до 80%. В нижних горизонтах свиты колебания резко выражены, в верхних — идет постепенное увеличение — от 40 до 80%.

Не останавливаясь на перечислении процентного содержания пыльцы различных видов хвойных и прочих голосеменных, встреченных ранее в спектрах саксаульской свиты и повторяющихся в спектрах тасарана, отметим, что в чеганских спектрах впервые появляется пыльца болотного (?) кипариса (*Taxodium distichum*) и устойчиво удерживается от средних горизонтов до верхов чеганской свиты. В верхних горизонтах появляется пыльца *Cedrus* aff. *libani* и *C. aff. atlantica*. Виды, встречающиеся в тасаранской свите, также встречаются и в чегане. Общее количество пыльцы *Cedrus* возрастает в верхних горизонтах свиты до 25%. Увеличивается содержание пыльцы рода *Picea* (до 12%), среди которой появляется пыльца, близкая к пыльце современной ели. Значительно увеличивается количество пыльцы сем. *Ginkgoaceae* (до 10%) и в то же время исчезают *Dacrydium* и *Podocarpus sellowiformis* sp. nov. (pollen). В общем в спектрах чеганской свиты заметно преобладание древних средиземноморских форм и примесь форм, идущих, по-видимому, из азиатских центров.

В период отложения чеганских глин на Киргизском материке, по-видимому, начали распространяться смешанные леса с участием в виде примеси умеренного листопадного комплекса с обилием хвойных деревьев, частью (как *Picea* и некоторые виды сосен) входивших в состав смешанных лесов, частью заселявших повышенные обитания на кристаллическом массиве Казахского нагорья. В пониженных обитаниях начали развиваться ши-

роколистственные и хвойно-широколистственные леса, в пределах которых среди болотистых водоемов начал селиться болотный кипарис (единичные находки).

Чеганские спектры Северного Приаралья отличаются большим количеством ксерофитов, что, по-видимому, обуславливается тем, что суша, примыкавшая с востока к Северно-Приаральскому морю, в основном входила в пределы Туркменской ксерофитной провинции Полтавской обл., которую выделил для палеогеновой растительности Средней Азии (северные берега моря Тетис) Е. П. Коровин в 1935 г.

Континентальные отложения Северного Приаралья обычно содержат небольшое количество пыльцы и спор, за исключением отдельных горизонтов с растительными остатками, трухой и стволами растений, где удается выделить огромное количество пыльцы самого разнообразного состава, значительно отличающегося от состава спектров чеганской свиты.

Пыльца голосеменных вообще и различных видов рода *Pinus* в частности преобладает в спектрах первой свиты (кутаббулакской) и значительно превышает относительное содержание ее в спектрах всех остальных свит морского и континентального палеогена Северного Приаралья, кроме самых верхних горизонтов чеганской свиты.

Разнообразие видов рода *Pinus*, а также рода *Cedrus* — значительно. Кроме 12 определенных видов *Pinus*, в спектрах много различных разновидностей одних и тех же видов. Род *Pinus* представлен видами *P. exelsaefornis* sp. nov. (pollen), *P. peuceformis* sp. nov. (pollen) секции *Taeda Sprae* h., среди представителей которой впервые появляется мелкая пыльца, определенная как *P. minutus* sp. nov. (pollen), *P.* секции *Australes Loud.*, секции *Pinus* *protocenbra* sp. nov. (pollen), *P. aff. koraiensis Sieb. et Zucc.* и с с. Процентное содержание видов, принадлежащих к секции *Cembrae*, и особенно *Pinus aff. koraiensis*, — значительно. Отмечено большое количество (до 30%) пыльцы *Pinus* секции *Eurpitys*. Такое разнообразие пыльцы рода *Pinus* составляет отличительную черту всех спектров кутаббулакской свиты. Род *Cedrus* в кутаббулакской свите по-прежнему видом *Cedrus aff. deodara*. Общее содержание пыльцы всех видов *Cedrus* доходит в нижних горизонтах до 18%.

В более высоких горизонтах пыльца рода *Cedrus* уже не превышает 5 — 8%. Древние виды — *C. psilla Zauer* и *C. piniformis* sp. nov. (pollen) — встречены единично.

В спектрах кутаббулакской свиты впервые появляется пыльца рода *Tsuga* (*Tsuga crispa* sp. nov.). Содержание пыльцы *Taxodium* колеблется в пределах от 5 до 8% в верхних горизонтах и достигает 15% в нижних горизонтах свиты. В нижних же горизонтах содержится пыльца *Ephedra* (до 2%) и отмечаются единичные находки *Dacrydium* sp. (?) (возможно, *D. elatumiformis* sp. nov. (pollen)). Вообще содержание пыльцы сем. Podocarpaceae значительно снижается по сравнению со спектрами морских отложений.

Таким образом, состав пыльцы голосеменных кутаббулакской свиты представлен значительно более умеренным комплексом, чем в спектрах из морского палеогена. Выпадение ряда видов *Podocarpus*, *Cedrus* и сем. Araucariaceae, появление пыльцы *Tsuga* и значительное участие *Taxodium* и *Pinus* секции *Cembrae* совпадает с обогащением спектров пыльной широколиственных листопадных растений и с сережкоцветных, в особенности рода *Alnus*. Это свидетельствует о распространении широколиственных лесов по пониженным обитаниям, а также говорит о наличии озерно-болотных водоемов с зарослями болотного кипариса и большим количеством прибрежно-водных и погруженных растений.

На повышенных местах распространялись хвойные и смешанные широколиственные леса, сохранившие большое число субтропических видов, о чем свидетельствует большое участие различных видов пыльцы *Cedrus*, *Sequoia* и многих видов рода *Pinus*.

Однако регрессирующее море освобождало большие пространства суши, которые заселялись травянистыми и кустарничковыми комплексами с лебедовыми, *Zygophyllaceae* и *Ephedra*. Эти полупустынные ассоциации литоральной палеогеновой суши, возможно, и были местом, где возникали предки тех обширных полупустынных ценозов, которые представляют основную фон ландшафта современного Северного Приаралья.

Спектры чиликтинской свиты в общем менее богаты пылью голосеменных, но видовое содержание пыльцы рода *Pinus* в них остается почти таким же разнообразным. Здесь впервые появляется пыльца, весьма близкая к *Pinus silvestris* L., а также впервые отмечена находка *P. strobiformis* sp. nov. (pollen) и много пыльцы *P. singularis* sp. nov. (pollen); продолжает в единичных экземплярах встречаться *P. minutus* sp. nov., которая впервые появилась в спектрах кутабулакской свиты. В то же время пыльца рода *Cedrus* представлена гораздо слабее. Окончательно выпадают виды *Cedrus longisaccata*, *C. Janschinii*, *C. piniformis*, *C. pusilla* и др., которые доминировали в спектрах морского олигоцена и еще единично встречались в кутабулацких. Сем. *Podocarpaceae* представлено двумя видами рода *Podocarpus*. Исчезла пыльца *Podocarpus kazakhstanica*, *P. gigantea* и *Dacrydium*. Из спектров также выпали виды *Araucariaceae*, *Gnetales* (*Gnetumites*) и *Ginkgo*. Пыльца *Taxodium* aff. *distichum* L. (Rich.) встречается во всех спектрах в пределах 12%, вместе с *Tsuga*, *Picea* и *Taxus* (возможно, *Taxus baccataeformis* — вид пыльцы, не встречающийся в спектрах более низких горизонтов).

Судя по присутствию пыльцы *Ephedra*, которая спорадически появляется в различных горизонтах чиликтинской свиты, по-видимому, вне зависимости от широкого распространения лесов по долинам рек (по пониженным защищенным местообитаниям, в районах с повышенным рельефом), на побережьях солончатоводных бассейнов и озер и на междуречных плоских пространствах имели широкое распространение открытые ассоциации. Об этом также говорит большое участие пыльцы травянистых и кустарничковых видов различных ксерофитов, многие виды которых отмечены в составе спорово-пыльцевых спектров.

К сожалению, наши исследования не простираются выше чиликтинской свиты, так как пробы, отобранные из верхних свит континентального олигоцена и из аральских слоев, оказались бесплодными.

ПАВЛОДАРСКОЕ ПРИПРТЫШЬЕ

Спектры морских и континентальных отложений в Павлодарском Приптышье в общем значительно беднее пылью голосеменных, чем одновозрастные спектры в Северном Приаралье, причем пыльца распределяется от свиты к свите неравномерно (табл. 11). Наиболее богаты пылью голосеменных спектры континентальных отложений, где общее количество ее доходит до 75—80%. В спектрах морских отложений содержание пыльцы голосеменных колеблется обычно в пределах от 10 до 60%, в чигацких спектрах не поднимается выше 30% и в спектрах опокской свиты и в мелтапоценовых отложениях, залегающих под глауконитовой свитой, — не выше 60%.

Грубая схема, намечающаяся в результате анализа изменения процентного содержания общей суммы голосеменных по вертикали, детализируется при анализе их состава. Для нижних горизонтов палеогена (мел-

Таблица 2

Распределение пыльцы голосеменных в морских и континентальных отложениях кайнозоя в Павлодарском Приптышье

| Голосеменные | Свита по К. В. Циндоровой | | | | | | | палеозой-ная свита | Q | современ-ные отложения |
|--|---------------------------|----------|------------|--------|--------|------------|-----------|--------------------|----|------------------------|
| | подглаго-конитовый | опокский | чигац-ский | первый | второй | сегрег-ный | аральский | | | |
| Суммарно, % | 25—40 | 18—30 | 10—28 | 38—80 | 18—50 | 65 | + | 10 | 18 | 25 |
| Проболанет, % | 25 | 18—30 | 15—20 | <10 | 30—50 | 65 | + | 10 | 10 | 20 |
| Cydonaceae и Cydonites | <5 | — | 1—10 | +10 10 | + | — | — | — | — | — |
| Zanites sp. | — | — | + | — | + | — | — | — | — | — |
| Placodactylites cydonoides sp. nov. (pollen) | — | — | +16 | +10 3 | + | — | — | — | — | — |
| Ginkgoaceae и Ginkgoites | — | — | +10 | + | + | — | — | — | — | — |
| Ginkgo bidaciformis sp. nov. (pollen) | — | — | + | + | + | — | — | — | — | — |
| Taxodites | — | — | + | + | + | — | — | — | — | — |
| Taxaceae | — | — | + | + | + | — | — | — | — | — |
| Taxus baccataeformis sp. nov. (pollen) | — | — | + | + | + | — | — | — | — | — |
| T. cuspidataeformis sp. nov. (pollen) | — | — | + | + | + | — | — | — | — | — |
| Torreya californiformis sp. nov. (pollen) | — | — | + | + | + | — | — | — | — | — |
| Podocarpaceae и Podocarps | — | — | + | + | + | — | — | — | — | — |
| Podocarpites kazakhstanica sp. nov. (pollen) | — | — | + | + | + | — | — | — | — | — |
| P. gigantea sp. nov. (pollen) | — | — | + | + | + | — | — | — | — | — |
| Podocarpus sellowiformis sp. nov. (pollen) | — | — | + | + | + | — | — | — | — | — |
| P. andiiiformis sp. nov. (pollen) | — | — | + | + | + | — | — | — | — | — |
| P. nageiaeformis sp. nov. (pollen) | — | — | + | + | + | — | — | — | — | — |
| P. aff. dacrydioides A. Rich. | — | — | + | + | + | — | — | — | — | — |
| Dacrydium elatuniformis sp. nov. (pollen) | — | — | + | + | + | — | — | — | — | — |

Таблица 2 (продолжение)

| Голосеменные | Самцы по К. В. Ипполитову | | | | | | | Q | наполза- ющая | сопосе- ная отло- жения |
|--|---------------------------|---------|----------------|--------|--------|----------------|--------|---|------------------|-------------------------------|
| | подгла- зничков | оносопи | челю- стный | первый | второй | четвер- тый | зрелый | | | |
| Аглицеи и Аглицеи | | | | | | | | | | |
| <i>Agassia elegans</i> sp. nov. (pollen) | — | + 20 10 | + 20 5 | — | — | — | — | — | — | — |
| <i>Agassia ovaliformis</i> sp. nov. (pollen) | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| Риносеи | | | | | | | | | | |
| <i>Abies sibirica</i> sp. nov. (pollen) | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| <i>A. proteiformis</i> sp. nov. (pollen) | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| <i>Keteleeria davidiana</i> sp. nov. (pollen) | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| <i>Picea</i> sp. | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| <i>P. taurenica</i> sp. nov. (pollen) | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| <i>P. schrenkianae</i> sp. nov. (pollen) | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| <i>P. altaica</i> sp. nov. (pollen) | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| Род <i>Cedrus</i> (суммарно) | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| <i>Cedrus aff. deodara</i> L. | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| <i>C. latifolia</i> Zauer (pollen) | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| <i>C. piniformis</i> sp. nov. (pollen) | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| <i>C. jankini</i> sp. nov. (pollen) | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| <i>C. pusilla</i> Zauer (pollen) | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| <i>C. parvicarpa</i> sp. nov. (pollen) | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| <i>C. aff. libani</i> L. | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| <i>C. longicauda</i> sp. nov. (pollen) | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| Род <i>Pinus</i> (суммарно) | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| <i>Pinus coccinea</i> Gmelin и <i>P. cembra</i> L. | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| <i>P. aff. koraiensis</i> Sieb. et Zucc. | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |

Таблица 2 (продолжение)

| Голосеменные | Самцы по К. В. Ипполитову | | | | | | | Q | наполза- ющая | сопосе- ная отло- жения |
|--|---------------------------|---------|----------------|--------|--------|----------------|--------|---|------------------|-------------------------------|
| | подгла- зничков | оносопи | челю- стный | первый | второй | четвер- тый | зрелый | | | |
| <i>P. sibirica</i> sp. nov. (pollen) | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| <i>P. proteiformis</i> sp. nov. (pollen) | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| <i>P. coccinea</i> Strobus и <i>P. streptiformis</i> sp. nov. (pollen) | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| <i>P. peuceformis</i> sp. nov. (pollen) | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| <i>P. exilis</i> sp. nov. (pollen) | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| <i>P. coccinea</i> Paracembra | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| <i>P. gerardii</i> sp. nov. (pollen) | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| <i>P. longifolia</i> sp. nov. (pollen) | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| <i>P. coccinea</i> Pseudostrobus | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| <i>P. pseudocembra</i> sp. nov. (pollen) | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| <i>P. kienia</i> sp. nov. (pollen) | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| <i>P. minuta</i> sp. nov. (pollen) | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| <i>P. coccinea</i> Taeda | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| <i>P. taeda</i> sp. nov. (pollen) | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| <i>P. coccinea</i> Australis и <i>P. stipularis</i> sp. nov. (pollen) coccinea Taeda | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| <i>P. baicalica</i> sp. nov. (pollen) | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| <i>P. protostrepta</i> sp. nov. (pollen) | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| <i>P. aff. sibirica</i> L. | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| <i>P. sibirica</i> L. | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| <i>Tsuga aff. canadensis</i> (L.) Carr | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| <i>T. crispata</i> sp. nov. (pollen) | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| <i>T. koraiensis</i> sp. nov. (pollen) | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |

палеогеновые спектры) Навлодарского Прииртышья характерно наибольшее содержание пыльца таких семейств и родов голосеменных растений, которые в спектрах олигоцена уже играют подчиненную роль или совершенно исчезают (фиг. 6).

Наиболее разнообразно представлена в прииртышских спектрах пыльца сем. Pinaceae, в частности род *Pinus*, различные виды которого по вертикали распространяются неодинаково. В мел-палеогеновых спектрах общее содержание пыльца рода *Pinus* не превышает 20% от общего числа зерен голосеменных. Род в основном представлен небольшим количеством видов секций *Strobus* *Schaw.* и *Cembrae* *Spach.*; последние представлена одним видом *Pinus protocembra* sp. nov. Другие секции присутствуют спорадически, составляя не более 1—3%. Отсутствует секция *Euritys*.

Более обильно представлен род *Cedrus*, содержание представителей которого достигает 28%. В основном род представлен двумя видами: *Cedrus pusilla* *Zaich.* и *C. parvisaccata* *Zaich.* с незначительной примесью *C. laxireticulata* *Zaich.*, *C. longisaccata* sp. nov. (pollen). Род *Picea* представлен одним определенным видом, не имеющим аналогов среди пыльцы современных видов этого рода, — *Picea tasarunica* sp. nov. (pollen) и небольшим количеством пыльцы *Picea* sp.

Роды *Tsuga*, *Abies* и *Keteleeria* отсутствуют. Значительное количество пыльцы сем. Cupressaceae (50%) и Podocarpaceae (30%), которое в основном представлено пылью *Dacrydium* sp., *Podocarpus* (3 sp.), *Phyllocladus*? (вид не описан). Единично встречаются пылинки *Ephedra* (*Ephedra coccinipites* *Wood.*).

Таким образом, спектры мел-палеогеновых отложений по своему составу значительно отличаются от всех более молодых спектров подавляющим большинством форм, имеющих своих предков еще в меловых комплексах. Если сравнить эти спектры с чеганскими, то разница будет весьма заметной; со спектрами же из опоковой свиты, несмотря на большое различие в составе, они имеют и объединяющие их черты.

В спектрах из опоковой свиты также присутствует в сравнительно небольших количествах пыльца рода *Pinus*, представленного в основном секциями *Strobus* и *Cembrae*, но здесь впервые появляются единичные виды, принадлежащие к секции *Euritys* (?), полностью отсутствующей в мел-палеогеновых спектрах.

Пыльца *Cedrus* несколько меньше, чем в спектрах мел-палеогеновых, но в видовом отношении род представлен богаче. Здесь прибавляются единичные находки *Cedrus Janschinii* sp. nov. (pollen). Большинство видов рода *Cedrus* не имеют аналогов среди современных. Наибольшее число видов и общее количество пыльцы приурочено к нижним горизонтам свиты. В верхних горизонтах находки пыльцы *Cedrus* единичны, что совпадает с находкой пыльцы, подобной *Welwitschia*, с *Welwitschites* sp. Род *Picea* так же как в мел-палеогеновых спектрах, представлен только видом *Picea tasarunica* sp. nov. (pollen). *Tsuga* по-прежнему отсутствует. В верхних горизонтах опоковой свиты обнаружены единичные зерна, принадлежащие сем. Taxodiaceae (по-видимому, *Sequoia*). Для нижних горизонтов опоковой свиты характерно также большое количество (до 50%) пыльцы сем. Cupressaceae и Podocarpaceae (до 15%), среди которой встречаются общие с прииртышскими тасарунскими видами: *Podocarpites kasakhstanica* sp. nov. (pollen), *P. nageiaformis* sp. nov. (pollen), *Dacrydium elatumiformis* sp. nov. (pollen), сем. Araucariaceae [*Araucaria elegans* sp. nov. (pollen)], *Agathis ovataeformis* sp. nov. (pollen).

Спектры опоковой свиты по составу пыльцы голосеменных хорошо сопоставляются со спектрами тасарунской и отчасти саксаульской свиты Северного Приаралья. Находки же в верхних горизонтах опоковой свиты

пыльцы, подобной роду *Welwitschia*, указывает на существование режима влажности, способствовавшего развитию беслесных пространств, что позволяет синхронизировать время отложения верхних горизонтов опоковой толщи со временем формирования саксаульской свиты. Спектры саксаульской свиты, если вспомнить общее описание флористических комплексов, содержат большое число различных видов пыльцы пустынных растений и кустарничковых узколистных ксерофитов из сем. Myrtaceae и др., о чем подробно написано автором в специальной работе (Заклинская, 1953).

Спектры чеганских отложений значительно отличаются от спектров двух предыдущих свит по целому ряду признаков; при этом различия эти выражены ярче, чем между эоценовыми и олигоценовыми спектрами в Северном Приаралье.

Род *Pinus* развивается в чеганское время различно от горизонта к горизонту и содержание его неодинаково по вертикали, что позволяет выделить нижние, средние и верхние горизонты в этой свите. В самых нижних горизонтах (глины с сидеритом) процентное содержание пыльцы рода *Pinus* колеблется от 5 до 60%, с преобладанием спектров, в которых *Pinus* составляет не менее 50%. В средних горизонтах (глины слоистые, со столами деревьев, растительными остатками и фауной чегана) род *Pinus* составляет 20—25%, а в верхних горизонтах не больше 40%.

Род *Pinus* обогащается появлением представителей новых видов — *Pinus* aff. *koraensis*, *P. exelsaefornis* sp. nov. (pollen), *P. strobiformis* sp. nov. (pollen), *P. longifoliaformis* sp. nov. (pollen), *P. protosilvestris* sp. nov. (pollen), *Pinus* секции *Banksia* М а у г. и др. Одновременно в чеганских спектрах появляется пыльца родов *Abies* [*Abies proteiforma* sp. nov. (pollen); *Keteleeria*]; участие же рода *Cedrus* значительно слабее, чем в спектрах чеганской свиты в Приаралье, по все же оно обычно около 10%.

Самым характерным для чеганских спектров Прииртышья, так же как и для синхронных отложений Северного Приаралья, является появление и широкое (ярче выраженное, чем в Приаралье) развитие пыльцы *Taxodium* aff. *distichum* L. (R i c h.), что, в сочетании со значительной примесью пыльцы широколиственных листопадных растений в составе пыльцы покрытосеменных, указывает на увлажнение климата и некоторое похолодание его по сравнению с жарким климатом эоцена. Одновременно с появлением пыльцы *Taxodium* в спектрах значительно увеличивается количество пыльцы *Ginkgo* (до 18%).

Следует отметить, что чеганские спектры Прииртышья в общем близки по составу одновозрастным спектрам Приаралья, но характеризуют флору более умеренную, в которой сказывается влияние азиатских центров с так называемой «флорой гинкго» А. Н. Криштофовича. Спектры же приаральские несут в себе больше представителей древней средиземноморской флоры в ее ксерофильной вариации.

Спектры лагуно-континентальной первой свиты и континентальных, второй и четвертой, в общем близкие по составу компонентов, имеют свои характерные черты, позволяющие отличать их один от другого. Спектры самых нижних горизонтов первой свиты континентальных отложений, представленных озерной или лагуной фауной сери песков и слоистых глин с прозитоном и массой растительных остатков в виде трухи и остатков веточек и стволов, характеризуются самым большим содержанием пыльцы голосеменных — до 60—80% (от общего числа подсчитанных зерен спор и пыльцы), которая почти целиком представлена различными секциями рода *Pinus*: *Strobilus* (*P. exelsaefornis* sp. nov., *P. peuceformis* sp. nov., *P. strobiformis* sp. nov.), *Pseudostrobus*, *Taeda*, *Australes* (*P. singularis* sp. nov.), *Sula*, *Banksia*. Особенно широко распространена секция *Combrae*, которая в основном представлена *Pinus combraeformis* и *P. aff. koraensis* S i e b.

ет *Z a c t.* Впервые появляются *Pinus protosilvestris* sp. nov. (pollen) и *P. minutus* sp. nov. (pollen).

В спектрах первой свиты пыльца *Tsuga* представлена тремя видами; впервые появляется *Picea schrenkianaefornis* sp. nov. (pollen), а также *Picea alata* sp. nov. (pollen) и *Abies sibiriciformis* sp. nov. Пыльца же *Taxodium* aff. *distichum* составляет не более 30%, т. е. значительно меньше, чем в чеганских спектрах. Здесь же встречается пыльца *Sciadopitys*, *Taxus baccataefornis* sp. n. (pollen) и единично — *Podocarpus*, *Agathis*, *Gnetum* и *Cycadaceae*.

В общем спектры нижних горизонтов первой континентальной свиты имеют совершенно иной облик, чем чеганские спектры, обогащаясь большим числом новых видов. Верхние горизонты первой свиты содержат большое количество пыльцы *Taxodium* (до 25—30%) и значительно меньше пыльцы различных представителей рода *Pinus*. Выпадают роды *Taxus*, *Sciadopitys*, *Gnetum* и встречающиеся спорадически в нижних горизонтах свиты представители рода *Podocarpus*, кроме одного вида. Исчезает *Picea lasarunica* sp. nov. (pollen) и не встречается пыльца *Tsuga* и *Cedrus*.

Таким образом, анализ состава пыльцы голосеменных позволил выделить горизонты первой свиты, что не удавалось сделать ни литологическим методом, ни при помощи стандартного спорно-пыльцевого анализа без флористического разбора представленных родов и видов.

Для второй свиты континентальных отложений характерно уже небольшое содержание пыльцы *Taxodium* (менее 10%) и значительное количество пыльцы рода *Pinus*, а также некоторое увеличение содержания *Cedrus*, среди представителей которого снова появляется вид *Cedrus piniformis* sp. nov. (pollen). Одновременно с этим выпадает из спектра пыльца *Pinus* aff. *silvestris*.

Спектры второй свиты континентальных отложений вообще характеризуются широким развитием древесной растительности, в основном представленной широколиственными и хвойно-широколиственными лесами. Но в то же время в спектрах первой и второй свит появляется пыльца *Ephedra* (для спектров второй свиты характерно появление *E. aff. przewalskii* S t a p h.), которой сопутствует значительное увеличение пыльцы травянистых растений в комплексе покрытосеменных.

Спектры четвертой свиты континентальных отложений значительно беднее спектров первых двух свит. Характеризуют эти спектры прогрессирующее осушение климата, что отразилось на повышении содержания пыльцы *Ephedra* (преобладает *E. aff. internedia* S c h r.), почти полным исчезновении пыльцы *Taxodium* и на понижении содержания пыльцы *Cedrus*.

По единичным анализам миоценовых отложений, в которых находки пыльцы голосеменных значительно скуднее, чем в спектрах четвертой свиты, можно полагать, что древесная растительность, сильно разреженная и бедная видами, была в основном представлена лиственными деревьями. Голосеменные в миоценовых спектрах представлены единичными зернами *Pinus* секции *Strobilus*, *P. cf. sibirica*, *Pinus* секции *Eupitys*, *Taxodium*, *Picea*, *Cupressaceae* и *Tsuga*.

В миоцено-плиоценовых отложениях состав пыльцы голосеменных окончательно беднее и общее содержание их в спектрах не превышает 5—10%. Представлены голосеменные родом *Pinus* (единично секция *Strobilus* и *Pinus* aff. *silvestris* L. — до 40%). Пыльца *Tsuga*, *Taxodium*, *Picea*, *Taxus* и *Cupressaceae* встречается спорадически в виде единичных зерен. Пыльца *Ephedra* временами выпадает из спектров за счет появления пыльцы луговых трав; временами содержание ее поднимается до 25%. Возможно, что в миоцен-плиоцене на территории Прииртышья развивались не только полупустынные, но и степные или саванного типа ландшафты,

за что говорит и фауна млекопитающих. Растительность Прииртышья в плиоцене по-видимому представляла тип мелкокоротких саванн с редко разбросанными кустарниково-лесными массивчиками.

В спектрах нижнечетвертичных отложений пыльца голосеменных составляет не более 20% от общего числа зерен. Попадаются единично представители *Pinus* aff. *strobus*, *P.* aff. *cembra*, *P.* aff. *silvestris*, *Ephedra*. В более высоких горизонтах четвертичных отложений, так же как и в поверхностных (современных) пробах, встречаются только *Pinus* aff. *silvestris* и *Ephedra*.

5. РУКОВОДЯЩИЕ СПОРОВО-ПЫЛЦЕВЫЕ СПЕКТРЫ ГОЛОСЕМЕННЫХ ДЛЯ СТРАТИГРАФИЧЕСКОГО РАСЧЛЕНЕНИЯ КАЙНОЗОЙСКИХ ОТЛОЖЕНИЙ ПАВЛОДАРСКОГО ПРИИРТЫШЬЯ И СЕВЕРНОГО ПРИАРАЛЬЯ

Если все изложенные выше данные по Северному Приаралью и Северному Прииртышью представить в виде схемы или стратиграфических таблиц и проследить встречаемость отдельных родов и видов голосеменных от самых нижних свит до современных осадков, то наглядно выявится определенная закономерность в их распространении.

Флора и растительность каждой из охарактеризованных свит имеют свой особый облик. Различие в составе и количестве пыльцы голосеменных позволяет выделить для Северного Приаралья следующие группы спектров.

1. Для группы Podocarpaceae, самой древней, характерно большое процентное содержание представителей гондванской (?) флоры (возможно, реликтового происхождения) с Araucariaceae, *Podocarpus*, *Dacrydium*, *Cycadaceae* в сочетании с голосеменными древнего Средиземноморья. В спектрах этой группы присутствуют единично виды: *Podocarpus nageiaformis* sp. nov. (pollen), *Podocarpus sellowiformis* sp. nov. (pollen), *Podocarpus andiniiformis* sp. nov. (pollen), *Podocarpites gigantea* sp. nov. (pollen), *Agathis ovataformis* sp. nov. (pollen), *Araucaria elegans* sp. nov. (pollen) — единично, *Dacrydium elatumiformis* sp. nov. (pollen), *Cedrus Janschinii* sp. nov. (pollen), *Cedrus pusilla* Z a и e r (pollen), *Cedrus longisaccata* sp. nov. (pollen), *Cedrus laxireticulata* Z a и e r (pollen) — единично, *Picea tataranica* sp. nov. (pollen) и некоторое количество *Cycadaceae*, *Cycadacites*, *Welwitschites*, а также *Pinus ponderosaeformis* sp. nov. (pollen), *Pinus* секции *Banksia*, *Torreya californiiformis* sp. nov. (pollen), *Taxacites* и др.¹. Одновременно в спектрах намечается значительное участие различных видов сосны.

Эта большая группа спектров охватывает все нижние палеогеновые отложения Северного Приаралья, т. е. тасаранскую и саксаульскую свиты, которые на основании фаунистических находок датируются средним и верхним эоценом (Ишниц, 1953). Спектры эти близки к спектрам опоковой толщи Павлодарского Прииртышья, подстилающей чеганские отложения нижнего олигоцена.

Группа спектров Podocarpaceae хорошо подразделяется на две подгруппы: нижнюю (тасаранскую) и верхнюю (саксаульскую).

Тасаранские спектры голосеменных значительно беднее саксаульских в видовом отношении и представлены всего 29 видами (в основном —

¹ Все перечисленные виды в большинстве своем — новые, получившие название по морфологическим признакам пыльцы.

древняя флора). В саксаульских спектрах большее участие принимают различные виды сем. Pinaceae и отмечаются первые находки *Sequoia*, *Pinus exelsaeformis*, *P. peuceformis*, *Picea* секции *Omorica* [*Picea alata* sp. nov. (pollen)].

II. Группа *Taxodium* — *Pinus* объединяет спектры чеганской свиты и двух свит континентальных отложений Северного Приаралья. В спектрах этой группы выпадает значительное количество видов¹ из предыдущих подгрупп, а именно: *Dacrydium elatumiformis*, *Podocarpus sellowiformis*, *Cedrus lazireticulata*, *Picea tasaranica*, *Pinus bicornis*, *Pinus ponderosaeformis* и др. Взамен появляются новые виды, роды и семейства — значительно более умеренного облика. Именно по появлению нового комплекса голосеменных вторая группа легко разбивается на две подгруппы: нижнюю (чеганскую): *Cedrus* — *Taxodium* и верхнюю (две нижние свиты солоноватоводных и континентальных отложений): *Pinus* — *Taxodium* — *Tsuga*.

Подгруппа спектров *Cedrus* — *Taxodium* приобретает девять новых видов: *Cedrus* aff. *libani* L. a. s., *C. aff. atlantica* L. o. d., *Taxodium* aff. *distichum* L. (R. i. s. h.) и др. — и представляет смешанную флору голосеменных, имеющих большую часть видов от группы Podocarpaceae, но в иных процентных соотношениях. Таким образом, подгруппа *Cedrus* — *Taxodium* менее резко отличается от группы более древней — Podocarpaceae, чем подгруппа *Pinus* — *Taxodium* — *Tsuga*. Различие между ними выражено слабее, чем между аналогичными группами и подгруппами в Северном Приаралье.

Спектры верхней подгруппы приобретают семь новых видов голосеменных и в то же время из состава их выпадают многие виды, встречающиеся в спектрах предыдущей подгруппы. Здесь, кроме тех видов, которые встречаются во всех трех нижних подгруппах, появляются (или увеличивается их содержание): *Podocarpites kazakhstanica*, *Taxus baccataeformis*, *Pinus* aff. *koraensis*, *Tsuga crispa*, *Cedrus* aff. *deodara*. К тому же спектры верхней подгруппы отличаются исключительным богатством видов рода *Pinus*.

В верхней подгруппе спектров выделяются два типа: спектры первой свиты — кутанбулакские и спектры второй свиты — чиликтинские, отличающиеся один от другого по содержанию пыльцы рода *Pinus*. Кроме того, чиликтинские спектры отличаются от спектров кутанбулакских отсутствием или малым содержанием пыльцы *Cedrus* aff. *libanii*, *C. aff. atlantica*, *C. aff. deodara* и *Abies sibiriciformis*. Общее содержание пыльцы рода *Pinus* в чиликтинской свите значительно меньше, чем в спектрах кутанбулакской свиты. Вообще кутанбулакские спектры содержат пыльцу рода *Pinus* в большем количестве, чем во всех других свитах.

Для Павлодарского Припиртышья схема построена значительно полнее. Здесь выделяются не две, а три группы спектров, из которых две нижние, более древние, могут сопоставляться с группами, выделенными для Северного Приаралья.

I. Группа Podocarpaceae — *Cedrus* — наиболее древняя; в ней среди голосеменных преобладают семейства Podocarpaceae, Cupressaceae, Araucariaceae и Pinaceae, представленные различными видами родов *Dacrydium*, *Cedrus*, *Podocarpus* и не имеющие аналогов среди современных видов этого рода, а также родом *Pinus*, представленным в основном видом *Pinus protocembra* sp. nov. (pollen). В этих же спектрах встречается пыльца *Gnetum* (*Gnetumites*) и *Welwitschia* (*Welwitschites*) и *Phyllocladus*, пыльца которого не вошла в описание.

Группа спектров Podocarpaceae — *Cedrus* включает две подгруппы: подгруппу *Dacrydium* и подгруппу *Podocarpus*.

¹ В отдельных горизонтах эти виды могут встречаться как единичные находки, но это явление случайное.

Подгруппа *Dacrydium* наиболее бедна видами голосеменных; представлена она всего 24 видами, принадлежащими к сем. Podocarpaceae, Cupressaceae, Welwitschiaceae, Ephedraceae и Pinaceae, из которых наибольший процент падает на представителей рода *Cedrus* и *Dacrydium*. Эта подгруппа охватывает всю серию отложений, залегающих под глауконитовой толщей и отнесенных предположительно к мелу — палеоцену.

Подгруппа *Podocarpus* представлена 23 видами голосеменных, которые в основном принадлежат сем. Pinaceae, Cupressaceae и Podocarpaceae. Здесь впервые обнаружена пыльца *Welwitschiacites*, *Araucaria elegans* sp. nov. (pollen), *Cedrus piniformis* sp. nov. (pollen) и др., присутствует *Cedrus Janschinii* sp. nov. (pollen), *Cedrus longisaccata* sp. nov. (pollen), *C. pusilla* Z a u e r (pollen), *Podocarpus nageiaformis* sp. nov. (pollen), *Podocarpites kazakhstanica* sp. nov. (pollen). Единично встречается пыльца *Dacrydium*, *Agathis*, Cycadaceae (*Lamites*?). Одновременно присутствует пыльца *Pinus protocembra* sp. nov. (pollen), *Pinus ponderosaeformis* sp. nov. (pollen), *P. bicornis* sp. nov. (pollen), *P. protocembra* sp. nov. (pollen) в общем составляет не более 25% от общего числа пыльцы голосеменных.

Подгруппа *Podocarpus* близка по составу к группе *Podocarpus* Северного Приаралья, отличается от нее лишь несколько более высоким содержанием пыльцы родов *Cedrus* и *Podocarpus*. Подгруппа *Podocarpus* включает целиком все спектры опокской свиты и хорошо сопоставляется со спектрами тасаранской и отчасти саксаульской свит в Северном Приаралье.

II. Группа *Taxodium* — Pinaceae аналогична группе *Taxodium* — *Pinus* Северного Приаралья, отличается от последней несколько большим участием представителей умеренных флор с *Taxodium* (до 40%) и *Tsuga* (до 10%), а также присутствием ряда видов рода *Pinus*, принадлежащих к американским и азиатским флорам: *Pinus* aff. *koraensis*, *P. aff. sibirica* и *Abies* aff. *sibirica* [*Abies sibiriciformis* sp. nov. (pollen)]. Группа эта наиболее богата видами голосеменных, общее количество которых составляет от 22% (спектры чиликтинской свиты) до 36% (спектры чеганской свиты). В спектрах группы *Taxodium* — Pinaceae выпадают представители таких древних флор, как *Welwitschia*, *Dacrydium elatumiformis* sp. nov. (pollen), *Cedrus Janschinii* sp. nov. (pollen), *C. lazireticulata* Z a u e r (pollen), *Picea tasaranica* sp. nov. (pollen), но в то же время многие из представителей этих флор еще присутствуют.

Группа *Taxodium* — Pinaceae подразделяется на две подгруппы: *Taxodium* и *Pinus* — *Taxodium* — *Tsuga*.

Подгруппа *Taxodium* целиком охватывает чеганскую свиту и сопоставляется со спектрами подгруппы *Cedrus* — *Taxodium* Северного Приаралья, отличается от нее большей мезофильностью, что в первую очередь сказывается на большем количестве пыльцы *Taxodium*, которой особенно много в верхних горизонтах чеганской свиты, непосредственно подстилающих отложения первой свиты континентальных отложений.

Подгруппа *Pinus* — *Taxodium* — *Tsuga* включает спектры нижних и верхних горизонтов первой свиты, а также спектры второй свиты. Спектры солоноватоводных или дельтовых отложений первой свиты содержат большое количество пыльцы рода *Pinus*, много пыльцы *Cedrus*, *Tsuga*, *Taxodium*. В нижних слоях этой свиты содержится до 40% пыльцы *Taxodium* aff. *distichum* (L.) R. i. s. h. Различаются спектры нижних и верхних слоев первой свиты следующими признаками: нижние слои содержат максимум Pinaceae и не включают пыльцу Podocarpaceae, Cupressaceae и *Gnetum*; верхние слои содержат мало (до 5%) Pinaceae, но в них снова появляется пыльца Podocarpaceae (*Podocarpus* aff. *dacrydioides*), Cycadaceae, *Gnetum* (?) (*Gnetumites*). В остальных спектрах чрезвычайно близки.

Спектры второй свиты содержат пыльцу *Taxodium* до 20%, в них несколько возрастает процентное содержание пыльцы *Cedrus* и появляется

Tsuga aff. *canadensis* (L.) Carr. В видовом отношении эти спектры значительно беднее, чем спектры первой свиты.
III. Группа *Ephedra* включает спектры с сильно обедненным видовым составом пыльцы голосеменных. Содержат они максимум 12 видов, в число

| Павлодарское Прииртышье | | | | Северное Прииртышье | | | |
|-----------------------------|-----------------------|--|--|---------------------|-----------|---------------------------------------|--|
| Спектры голосемен | | Свиты по К.В. Никитиной | | Спектры голосемен | | Свиты по А.И. Янину и Л.Н. Формозовой | |
| Группы | Подгруппы | Типы | | Группы | Подгруппы | Типы | |
| <i>Ephedra</i> | <i>Pinus-Ephedra</i> | Современные оплодотворенные и позднечетвертичные | Современные оплодотворенные и позднечетвертичные | | | | |
| | | Четвертичные | Палеовая толща | | | | |
| | <i>Pinaceae</i> | Получившие развитие в палеогено-четвертичные | Голубая толща (Хазарская) | | | | |
| | | Многочисленные | Нижнечетвертичные отложения и павлодарская свита | | | | |
| <i>Taxodium-Pinaceae</i> | <i>Pinaceae</i> | Многочисленные | Аральская свита | | | | |
| | | Многочисленные | Четвертая свита | | | | |
| | <i>Taxodium-Tsuga</i> | Третья свита (флоры окрестности озера Садоя) | Третья свита (флоры окрестности озера Садоя) | | | | |
| | | Вторая свита | Вторая свита | | | | |
| <i>Taxodium-Pinaceae</i> | <i>Pinaceae</i> | Первая свита (верх) | Первая свита (верх) | | | | |
| | | Первая свита (низ) | Первая свита (низ) | | | | |
| | <i>Taxodium</i> | Верх | Верх | | | | |
| | | Середина | Середина | | | | |
| <i>Podocarpaceae-Cedrus</i> | <i>Podocarpus</i> | Опоясывающая | Опоясывающая | | | | |
| | | Глаукохитовая (флоры окрестности озера Садоя) | Глаукохитовая (флоры окрестности озера Садоя) | | | | |
| | <i>Cedrus</i> | Саксаульская | Саксаульская | | | | |
| | | Тасаранская | Тасаранская | | | | |
| <i>Podocarpaceae-Cedrus</i> | <i>Podocarpus</i> | Опоясывающая | Опоясывающая | | | | |
| | | Глаукохитовая | Глаукохитовая | | | | |

Фиг. 7. Сопоставление групп, подгрупп и типов спектров голосеменных палеогеновых отложений Павлодарского Прииртышья и Северного Прииртышья. (Составила Е. Д. Заклинская).

которых входят 11 видов, сохранившихся от первой группы. Значительное участие в составе спектров принимает пыльца сосны из секции *Eurypitys*: *Pinus* aff. *silvestris*, *P. protosilvestris* sp. nov. (pollen). Встречается пыльца *P. aff. koraiensis* Sieb. et Zucc., *Abies sibiriciformis* sp. nov. (pollen), *Picea schrenkianaeformis* sp. nov. (pollen). Из сем. *Podocarpaceae* сохранился лишь один вид *Podocarpites gigantea* sp. nov. (pollen). Пыльца рода *Ced-*

rus обычно отсутствует. Единично встречается пыльца *Tsuga* и *Taxodium*, по непеременим членом является пыльца *Ephedra* (до 26%).

Эта группа спектров свидетельствует о значительном осушении климата, понижении температур и, в соответствии с этим, о значительном разреживании древесной растительности. Все данные указывают на то, что в период формирования III группы спектров преобладала растительность открытых местообитаний.

Группа *Ephedra* включает спектры четвертой свиты континентальных отложений¹ миоценовые, миоцен-плиоценовые и четвертичные спектры, которые, в свою очередь, весьма близки к современным, отличаясь от них лишь тем, что в современных спектрах род *Pinus* представлен только одним видом — *Pinus silvestris* L., а в спектрах миоцен-плиоценовых и нижнечетвертичных наблюдаются единичные находки *Pinus* aff. *strobilus*, *P. cembrae*, *P. aff. koraiensis*.

Спектры группы *Ephedra* отличаются небольшим содержанием пыльцы голосеменных (порядка 10—25—30%). В миоцен-плиоценовых отложениях спектры представлены единичными зернами *Tsuga*, *Supressaceae*, *Taxus*, *Taxodium*, *Cuscutaceae* и *Ephedra* (до 25%), а в нижнечетвертичных — единичными находками *Pinus* aff. *koraiensis*, *P. aff. silvestris*, *P. aff. strobilus*, *P. aff. cembrae*, *Picea*. В более высоких горизонтах четвертичных отложений вынадеют представители секции *Strobilus* и совершенно не встречается пыльца *Tsuga* и *Taxodium*. В основном в верхних горизонтах четвертичных отложений пыльца голосеменных представлена лишь *Pinus* aff. *silvestris* и родом *Ephedra*. Это же наблюдается и в спектрах из современных отложений, где, кроме пыльцы *Ephedra*, голосеменных обычно нет, за исключением спорово-пыльцевых спектров из поверхностных проб в районе Борового или близ Долбицких гор, где количество пыльцы *Pinus* aff. *silvestris* равно или выше, чем *Ephedra*, так как сосна здесь сидит на грантах палеозоя, образуя среди голой степи островные боры.

Группа спектров *Ephedra*, таким образом, подразделяется на следующие подгруппы: *Pinaceae*, включающую два типа спектров — олигоцен-миоценовый (IV свита континентальных отложений) и миоценовый (аральская свита), и *Pinus-Ephedra*, включающую три типа спектров: миоцен-плиоценовый и нижнечетвертичный (павлодарская свита и нижнечетвертичные отложения); верхнечетвертичные; современные.

Сопоставление групп, подгрупп и типов спектров голосеменных дано на фиг. 7.

¹ Отложения третьей свиты не охарактеризованы пыльцой, так как исследованные образцы не содержали пыльцы и спор.

VI. ФЛОРИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СПЕКТРОВ И ИХ СТРАТИГРАФИЧЕСКОЕ ЗНАЧЕНИЕ

Как видно из материала, изложенного в предыдущих главах палеогеографические условия, в которых формировались осадочные отложения Северного Приаралья и Павлодарского Припиртышья, имея много общих черт, в то же время в целом ряде деталей были различными, в особенности в начале третичного периода. Поэтому, несмотря на то, что оба исследуемых района находились в близких широтных условиях, видовой состав их спорово-пыльцевых спектров имеет различия.

В самом деле, если подсчитать общее количество видов голосеменных, представленных в спектрах Приаралья и Припиртышья, и сравнить спектры их синхронно формировавшихся свит, то получаются следующие соотношения¹:

- а) тасаранская, саксаульская и ооковая свиты представлены всего 71 видами голосеменных (от 23 до 36 видов в каждой из свит в отдельности), из которых у тасаранских с ооковыми спектрами 10 общих видов, у саксаульских с ооковыми — 10 общих видов;
- б) чеганская свита Приаралья и Припиртышья представлена также 59 видами голосеменных, из которых 12 видов общих;
- в) ащайрыкская и первая свиты Припиртышья и кутанбулакская (первая) свита Приаралья представлены 51 видом, из которых 12 видов общих;
- г) вторая свита континентальных отложений в Припиртышье и чилик-тинская (вторая) свита в Приаралье представлены всего 43 видами голосеменных, из которых 16 видов общих.

Если обратиться к ареалам современных родов и видов голосеменных, к которым принадлежит пыльца ископаемых видов или с которыми она имеет близкое сходство, то можно действительно прийти к выводу, что исходные флоры этих двух районов имели различные центры. Для Северного Приаралья, по-видимому, такой исходной флорой была древняя средиземноморская субтропическая, тропическая и умеренная флора, для Западной же Сибири и Припиртышского Казахстана — азиатская умеренная.

В то же время присутствие общих видов и родов в спорово-пыльцевых спектрах всех синхронно формировавшихся свит подтверждает положение Е. В. Вульфа и других о том, что третичный период ознаменовался становлением новой смешанной флоры на огромных пространствах суши северного полушария. Для территории северных пределов Средней Азии и прилегающего к ней Казахстана эта флора развивалась на базе древне-

¹ Следует оговориться, что количество видов пыльцы голосеменных взято приблизительно, в соответствии с числом видов, определенных при анализе. Вполне допустимо, что количество видов в отложениях аналогичных свит может несколько измениться при дальнейшем накоплении материала.

средиземноморского комплекса с большей или меньшей примесью умеренного азиатского, по-видимому, восточноазиатского, и умеренного же китайского элемента.

Кроме того, сходство и различие флористических элементов зависело и от различного географического положения участков палеогеновой суши и различного же рельефа и литологического состава субстрата, на котором формировались те или иные растительные элементы ландшафта.

Мугоджары и юго-западные берега Киргизской суши, непосредственно связанные со Средней Азией, были местом, где развивалась древняя тропическая средиземноморская флора, долгое время сохранявшая ксерофитный облик. На северо-восточных берегах Киргизского материка, ближе связанных с юго-восточной Азией, развивалась более умеренная флора — азиатско-американского типа. Древняя суша Киргизского материка была местом смещения этих флор, а в дальнейшем — местом формирования новой умеренной флоры своеобразного ксерофильного облика.

Существовавшая еще с нижних отделов палеогена, а возможно, и значительно ранее, вертикальная зональность в распространении растительности отразилась на составе спорово-пыльцевых спектров, полученных из третичных морских и континентальных отложений.

Спектры нижнего палеогена содержат и пыльцу вечнозеленых растений нижнего пояса горных склонов, и пыльцу растений с опадающей листвой из более высоких обитаний, и пыльцу растений пояса хвойных лесов.

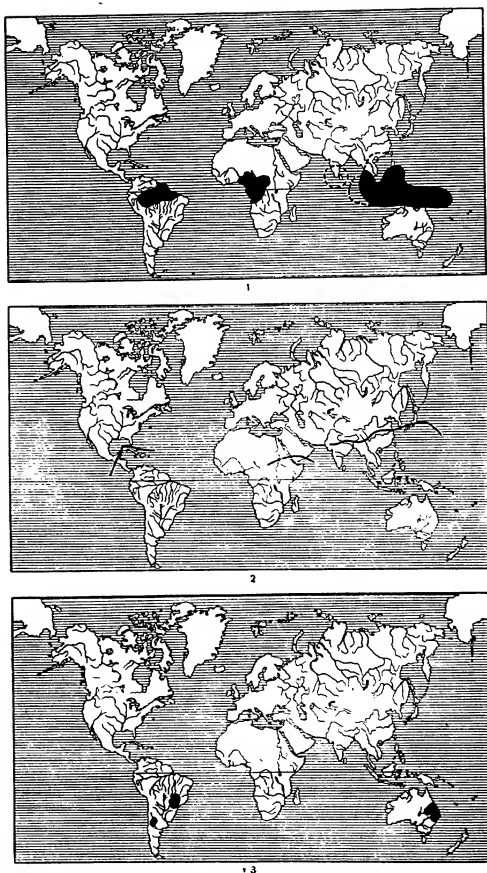
Нижнепалеогеновая флора Средиземноморья и Казахского материка, видимо, включала некоторое количество реликтов от древней тропической, возможно гондванской, флоры с *Phyllocladus*, *Aracaria*, *Gnetum*, *Casuarinaceae*, *Welwitschia*, современные ареалы которых связаны в большинстве случаев с Южной Америкой, Африкой и Австралией (фиг. 8).

В начале палеогена климат Павлодарского Припиртышья, а в особенности Северного Приаралья, по-видимому, был жарким и влажным, о чем свидетельствует участие в спектрах большого количества пыльцы рода *Cedrus* (видов, не имеющих аналогов среди современной флоры), *Podocarpus* и ряда видов спор древовидных папоротников.

В эоцене, возможно во вторую половину его, изменение физико-географических условий повлекло за собой осушение климата, возможно региональное, что сказалось на составе растительности участков суши, примыкающих к приаральскому и припиртышскому морям. Особенно сказалось это осушение климата на территории юга Мугоджар и, возможно, западных берегов Киргизской суши в период отложения тасаранской и нижних горизонтов саксаульской свит. Об этом говорят обилие пыльцы и макроскопических остатков ксерофитов с жестко-кожистой листвой, находки большого количества пыльцы растений из сем. *Myrtaceae*, *Proteaceae*, *Euphorbiaceae* и даже *Cactaceae*, находки пыльцы *Welwitschia*, *Ephedra* и др.

В период отложения нижних и средних горизонтов саксаульской свиты в Приаралье, а также песчаников ооковой свиты в Павлодарском Припиртышье на территории прилиitoralных зон Киргизского материка имелись пустынные ассоциации с *Zygophyllaceae*, *Cenopodiaceae*, *Umbelliferae* и др.

Среди голосеменных в это время были широко развиты различные виды родов *Pinus*, *Dacrydium*, *Podocarpus* и сем. *Aracariaceae*. Отмечены единичные находки *Ephedra* таких видов, которые не имеют аналогов среди современных видов (*Ephedra cocciniphytes* W o d h. и др.). Возможно, что некоторые виды рода *Ephedra*, произраставшие на окраинах эоценового Киргизского материка, имели предков за пределами распространения древней средиземноморской флоры, так же как и род *Welwitschia*. Но этот вопрос

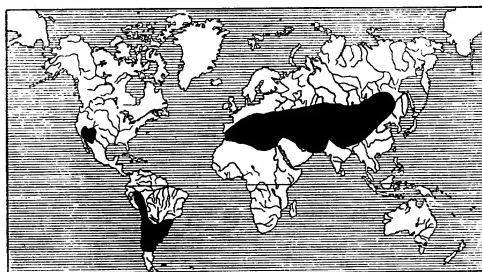


Фиг. 8. Ареалы современных видов рода *Gnetum* L., *Araucaria* Juss., *Podocarpus* L. Herit.

1 — *Gnetum* L.; 2 — *Podocarpus* L. Herit.; 3 — *Araucaria*

не входит в компетенцию автора и остается открытым. Исследования М. М. Ильина, П. П. Овчинникова и других ученых приводят к мысли, что флора *Ephedra* Казахстана, может быть, является дериватом древней средиземноморской флоры. Ареал современного распространения рода *Ephedra* разорван и имеет центры и в Средиземном море и в Азии, а также в Южной и Северной Америке (фиг. 9).

Заметное увлажнение и некоторое похолодание климата в нижнем и среднем олигоцене (в начале его) совершенно изменили облик растительного покрова суши, а последующие тектонические движения, изменившие размеры и конфигурацию материков, послужили причиной того, что изме-



Фиг. 9. Ареал современных видов рода *Ephedra* L.

нились и флористический состав растительного покрова за счет мигрантов из северо-восточных районов, а также состав растительности за счет развития аутохтонных и аллохтонных умеренных элементов.

На Киргизском материке и на юго-западных участках Мугоджар начинают развиваться смешанно-широколиственные леса, в Мугоджарах, по-видимому, с преобладанием средиземноморских вечнозеленых и жестколистных элементов, на Киргизском материке — с преобладанием азиатских листопадных умеренных.

Спектры чеганских отложений Северного Приаралья — более ксерофитные, чем спектры Павлодарского Прииртышья. Леса с болотным кипарисом впервые появились на Киргизской суше, в северо-восточных ее районах. Последнее хорошо увязывается с флорой сравнительно умеренных смешанно-широколиственных лесов с *Taxodium* из олигоценовых отложений кулундинских степей Западной Сибири.

Развитие смешанно-широколиственных лесов с большим или меньшим участием болотного кипариса одновременно наблюдается и в Крымско-Кавказской области также с начала олигодена. Последние данные по Азово-Кубанской впадине несколько изменяют деталь нарисованной автором в 1953 г. схемы продвижения сравнительно умеренной флоры с *Taxodium* с востока и более раннее появление пыльцы *Taxodium* в спектрах азиатских.

Более детальное исследование массового материала по северному Предкавказью, а также новый материал по западному Предкавказью показали, что в ряде регионов появилось большое количество пыльцы *Taxodium* приурочено не только к среднеолигоценовым, но и к нижнеолигоценовым отложениям, т. е. к хадумскому горизонту, который синхронизируется

с отложениями чеганских глин. Правда, принадлежность этой пыльцы именно к виду *Taxodium aff. distichum* еще не доказана, но находки пыльцы этого рода обычно связываются с эпохой развития широколиственных лесов, а спектры хадумских отложений, в которых обнаружено большое количество пыльцы *Taxodium*, содержат значительное количество пыльцы древесных пород, возможно, широколиственных.

Чеганское время в Приаралье и Прииртышье знаменуется притоком различных хвойных, в настоящее время приуроченных в основном к атлантическим берегам Северной Америки [сосны из секций *Strobus*, *Taeda Australis*, *Banksia*, а также *Taxodium Rich.* (фиг. 10).]

В конце среднего и в верхнем олигоцене облажаются большие пространства суши в связи с интенсивными поднятиями в области Мугоджар и окраин Казахского нагорья. В Северном Приаралье и в Павлодарском Прииртышье это время примерно совпадает с почти полным выпадением из спектров пыльцы *Taxodium distichum*. Этот период знаменуется широким распространением различных видов сосен и других родов сем. *Pinaceae* (роды *Picea*, *Keteleeria*, *Abies*, *Tsuga*), основное число видов которых в настоящее время приурочено к атлантическому побережью Северной Америки и Западной Европы, Средиземноморью и юго-востоку Азии (фиг. 11 и 12). При этом основная масса родов и видов, близких к ныне обитающим на востоке Азии, отмечена в спектрах Павлодарского Прииртышья. В спектрах Северного Приаралья их значительно меньше.

Спектры, содержащие наибольшее число видов сосен и характеризующиеся абсолютным преобладанием пыльцы рода *Pinus* над всеми видами других хвойных, обычно связаны с появлением и широким развитием широколиственной листопадной флоры со значительным участием сережкоцветных.

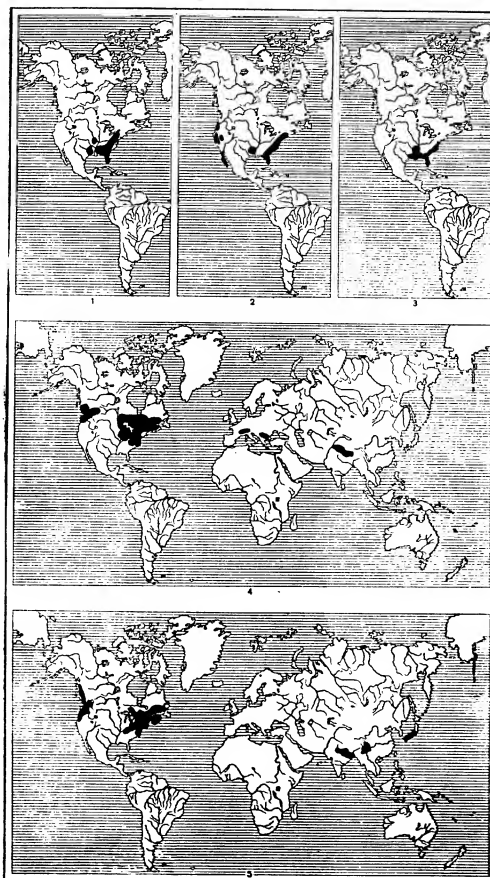
Волна распространения широколиственной умеренной листопадной флоры, в основном двигающаяся из азиатских центров (Китай?), охватила все пространство обширного Киргизского материка и Западной Сибири, от оз. Зайсан до оз. Чаны, и на запад — до Мугоджар. Но это широкое распространение широколиственной флоры нельзя рассматривать как сплошное покрытие, как это предполагали большинство исследователей на основании листовых отпечатков. Распространены были широколиственные породы на большой территории, но распространение это было не сплошным, а приуроченным к соответствующим высотным отметкам и к обитаниям с достаточно богатыми влагой почвами.

Одновременно с развитием широколиственных лесов распространены были обильно произраставшие хвойные: на песчаных террасах рек, на кристаллических массивах нагорья, на высоких берегах мелющего моря располагались самые разнообразные сообщества сосновых и смешанных хвойных лесов с различными видами елей, кедров, сосен, *Tsuga* и тиссов.

На литоральных моря и солончаковых почвах обильно развивались полупустынные и пустынные ассоциации с массой травянистых ксерофитов, которые проникали внутрь страны. В это время в северных и южных районах Казахстана, по-видимому, уже начали закладываться элементы саванного типа, в Приаралье же укоренились полупустынные сообщества.

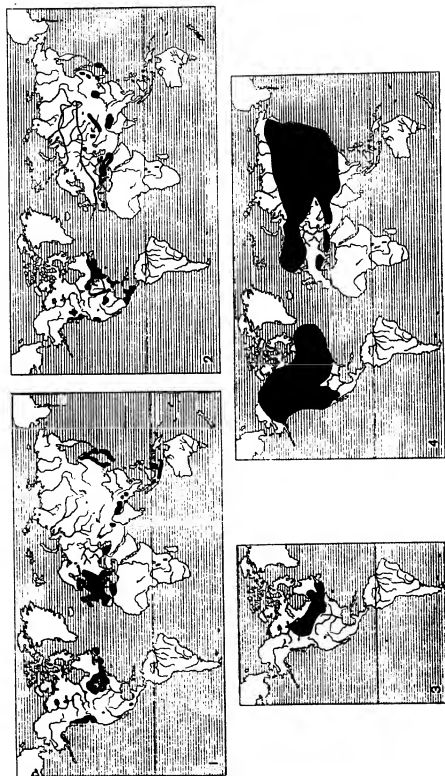
В самых верхних горизонтах чеганской свиты и в нижних горизонтах первой свиты континентальных отложений Павлодарского Прииртышья, а также в нижних горизонтах кутаубулакской свиты Северного Приаралья спектры изобилуют пылью хвойных значительно более умеренного типа, чем в морских отложениях.

В верхних горизонтах среднего олигоцене и в верхнем олигоцене некое осушение климата и постепенное похолодание его сказываются в почти полном исчезновении пыльцы *Taxodium* и в постоянном участии пыльцы *Ephedra*.



Фиг. 10. Ареалы современных видов *Pinus* секции *Australis* L. o. d.; *Pinus* секции *Taeda* S. p. a. c. h., *Pinus* секции *Strobus* S. h. a. w. и родов *Taxodium* R. i. c. h. и *Tsuga* C. a. r. r.

1 — *Pinus polastris* M. H. n.; 2 — *Pinus* секции *Taeda* S. p. a. c. h.; 3 — *Taxodium* R. i. c. h.,
4 — *Pinus* секции *Strobus* S. h. a. w.; 5 — *Tsuga* C. a. r. r.



Фиг. 11. Современное распространение рода *Pinus* в секции *Banksia* М. и У. Г. и рода *Pinus* Д. и Г. Г. 1 — *Pinus* секции *Banksia* М. и У. Г.; 2 — *Pinus* секции *Banksia* М. и У. Г.; 3 — *Pinus* секции *Banksia* М. и У. Г.; 4 — *Pinus* Д. и Г. Г.

Приток хвойных, приуроченных в настоящее время к восточным окраинам Азиатского материка, именно в это время особенно интенсивен. В составе спектров хвойно-широколиственных лесов умеренного типа особенно ярко выражено участие видов, подобных восточносибирским и азиатско-китайским: например *Picea alata* sp. nov. (pollen), подобная *Picea jezoensis* С. и Г., *Keteleeria davidianaeformis* sp. nov. (pollen), *Abies protofirma* sp. nov. (pollen), *Abies sibiriciformis* sp. nov. (pollen) и др. Во всех спектрах второй свиты континентальных отложений Павлодарского Прииртышья широко распространена сосна типа *Pinus silvestris*. В спектрах синхронной ей чиликтинской свиты Северного Приаралья участие азиатского элемента выражено значительно слабее.

К концу олигоцена в районе Прииртышья начинается значительное обеднение лесными формациями, которое становится еще заметнее в миоцене и уже к миоцен-плиоцену приводит к почти полной смене лесных ландшафтов открытыми сухостепными. Аналогичное явление наблюдается и в Приаралье, где миоценовая фауна указывает на значительное участие степных и полупустынных элементов в общем комплексе млекопитающих и птиц.

Можно представить себе, что волна наступающих с севера и северо-востока широколиственных листопадных представителей лесной флоры «тургайского типа» (в понимании А. Н. Криштофовича), двигавшаяся на окончательно освободившиеся от моря участки суши и отразившаяся в резком повышении процентного содержания пыльцы широколиственных пород в спектрах, значительно ослабла.

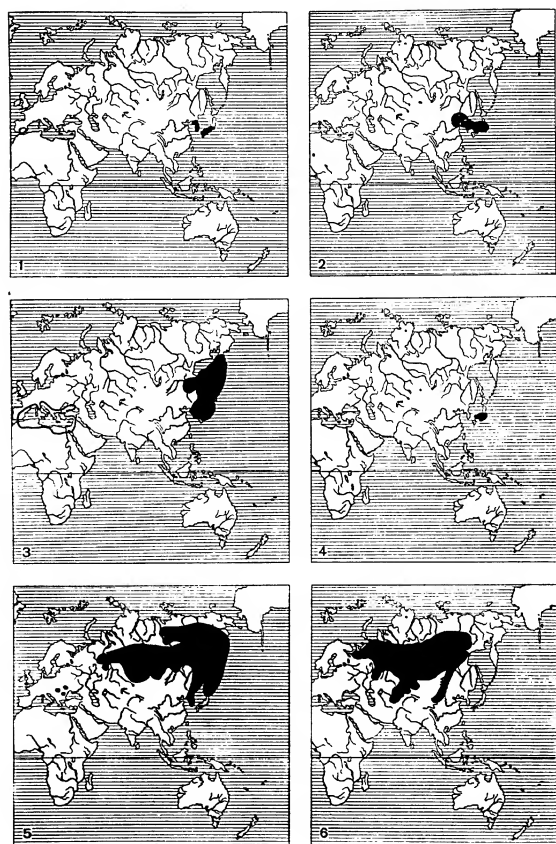
Произошло это, по-видимому, под влиянием общей аридизации и повышения континентальности климата и в связи с этим — распространения среднее- и южноазиатских ксерофитов. Лесная растительность, распространявшаяся было на обширных территориях не смогла больше развиться и отступила к западу, оставив в горных районах суши своих хвойных представителей. Отступала она, видимо, в направлении Тургайского пролива, на территории которого, по данным Е. П. Войцовой¹, И. М. Покровской, Р. Я. Абузаровой и других исследователей, еще в миоцене существовали большие массивы смешанно-широколиственных лесов с участием болотного кипариса. Широколиственные леса локального распространения существовали в Приаралье в миоценовую эпоху.

В спектрах Павлодарского Прииртышья находки пыльцы *Ephedra* cf. *distachya* L. и *Ephedra* aff. *intermedia* Schleg. становятся все более обычным явлением. Встречается вид *Ephedra* cf. *Przewalskii* Stapf, находки которой еще раз подтверждают тесную связь прииртышской флоры с пустынными областями Азии.

Время формирования осадков солоноватоводной аральской свиты в Приаралье и широко распространенных гипсоносных глин озерного происхождения в Прииртышье связано уже с ярко выраженным осушением климата и общим обеднением лесной растительности, которая, очевидно, в виде островов сохранялась вблизи озерных водоемов. Фауна этих отложений свидетельствует не только о наличии лесных массивов (бобры, медведи), но и о широком распространении открытых ассоциаций, где обитали пищухи, тушканчики, наземные черепахи и др.

Спорово-пыльцевые спектры олигоцена бедны видами голосеменных. Основная масса их уже перестала существовать на территории Приаралья.

¹ По последним данным К. В. Някафоровой и А. Л. Няшина, отложения, относимые Е. П. Войцовой к нижнему миоцену, являются верхнеолигоценовыми, соответствующими по возрасту четвертой свите континентальных отложений в Павлодарском Прииртышье. К сожалению, к моменту составления сводки по голосеменным автору не удалось еще подтвердить это положение данными спорово-пыльцевой флоры.



Фиг. 12. Современное распространение *Pinus* секции *Cembrae*, *Sciadopitys*, *Picea jezoensis*, *Abies firma*, *Abies sibirica*, *Abies firma* и рода *Keteleeria*.
1 — *Abies firma* Sieb. et Zucc.; 2 — *Keteleeria* Carr.; 3 — *Picea jezoensis* Carr.; 4 — *Sciadopitys* Sieb. et Zucc.; 5 — *Pinus* секции *Cembrae* S. p. a. c. h.; 6 — *Abies sibirica* Ledeb.

и Казахстана. Голосеменные представлены всего пятью-шестью видами, встречающимися в спектрах спорадически.

Постепенное обеднение спектров пыльной древесных пород и одновременное обогащение их различными видами травянистых и кустарниковых ксерофитов подводит нас к почти абсолютно «бездонным» спектрам миоцено-плиоцена. Здесь во время отложения павлодарской свиты и песков с обильной гиппарионовой фауной голосеменные играли незначительную роль. Находки пыльцы голосеменных в миоцено-плиоценовых спектрах содержат единичные зерна *Picea*, *Pinus*, *Tsuga*, *Taxus*, *Ephedra*. Это совпадает с почти полным исчезновением пылцы широколиственных и вообще ископаемых древесных пород. Флора *Ephedra* развивается параллельно с широким распространением травянистых ксерофитов различных семейств, родов и видов (*Chenopodiaceae* — 5 sp., *Compositae* — 3 sp., *Plumbaginaceae*, *Gramineae*, *Umbelliferae* (*Ferula* sp. (?) и др.).

Однако следует отметить, что, несмотря на то, что резко усилившаяся континентальность климата и значительная аридизация вели к полному исчезновению лесных формаций еще в раннечетвертичное время, — условия влажности и уровень грунтовых вод по долинам рек способствовали развитию галерейных лесов или роц.

В верхнечетвертичных отложениях мы уже находим лишь единичные зерна пыльцы *Pinus silvestris* и большое количество *Ephedra*.

Итак, флористический анализ пыльцы голосеменных, являющийся частью флористического анализа спорно-пыльцевых спектров вообще, дает возможность выделить руководящие спорно-пыльцевые спектры для целей дробного стратиграфического расчленения морских и континентальных отложений и сопоставить отложения как смежных, так и удаленных районов.

Проследивая флористические комплексы голосеменных в спектрах из последовательно изученных оловянных разрезов третичных и более молодых отложений Павлодарского Припиртышья и Северного Припиртышья, можно подойти к обоснованию дробного стратиграфического расчленения осадочных отложений, чего не позволяет сделать стандартный анализ с простым подсчетом встречающихся форм и сопоставлением процентного содержания их. Так, наиболее трудная для расчленения толща солончатоводных и континентальных отложений Припиртышья, Припиртышья и прилегающих к ним Тургай и Западной Сибири обычно делится на свиты на основании литологических особенностей, флористических находок и стандартных пыльцевых анализов, в результате чего возникают разногласия о количестве этих свит как в Тургае, так и в Припиртышье. Р. И. Абузирова и В. В. Лавров от двучленного деления континентальных отложений Тургай перешли к четырехчленному. Е. П. Бойцова и И. М. Покровская для этого же района предлагают трехчленное деление континентальной толщи.

В Припиртышье при предварительных исследованиях К. В. Никифоровой выделено четыре свиты континентальных отложений. Проведение границы между первой свитой и верхними горизонтами чеганских отложений сильно затруднено в связи с исключительной фаунальной изменчивостью последних и значительным единообразием спорно-пыльцевых спектров этих отложений. В настоящее время К. В. Никифорова пришла к выводу, что отложения, залегающие непосредственно на верхних горизонтах чеганских глин с морской фауной и представленные обычно песками с маломощными прослойками глины и с обилием растительных остатков (как правило, в виде растительной трухи), следует относить к первой свите континентальных отложений. Это вполне совпадает с данными спорно-пыльцевых спектров. Большинство спектров из горизонтов песков и озерно-старичных глин с растительной трухой относятся к подгруппе *Pinus — Taxodium — Tsuga*, к которой принадлежат спектры континентальных отложений.

гальных отложений среднего олигоцена. Все спектры континентальных свит в большей или меньшей степени богаты пылью широколиственных пород и сережкоцветных, а также содержат значительное количество пыли хвойных. При помощи анализа пыли голосеменных выделяются руководящие группы и подгруппы спектров, которые выдерживаются в стратиграфической последовательности и в Павлодарском Прииртышье и в Северном Приаралье.

Так, выясняется, что первая свита в Павлодарском Прииртышье (с растительными остатками и раковинами *Cyrena*), представленная мелко-слоистыми глинами, переслаивающимися с песком, и слоистыми глинами с ярозитом и массой растительной трухи, расчленяется на два горизонта. Нижние слои (горизонты) свиты содержат спектры с примесью некоторого количества ксерофитов и еще близки к спектрам верхних горизонтов чеганских глин (оз. Селеты-Тенгиз, обн. 2, скв. 4, пос. Подпук). В них содержится еще сравнительно небольшое количество пыли голосеменных. Спектры более верхних горизонтов свиты (Аган-Сай, дог Кара-Кулдук и др.) содержат спектры, аналогичные спектрам кутанбулакской свиты в Северном Приаралье с обилием голосеменных. Естественным выводом отсюда будет, что нижние горизонты первой свиты являются как бы переходными от морского к континентальному олигоцену. Основная масса отложений первой свиты отлагалась уже одновременно со слоями кутанбулакской свиты Северного Приаралья и содержит оолитовые железные руды (оз. Кара-Су, обн. 13, 14, 15). Спектры, выделенные из глин и песков в этих пунктах, содержат пыльцу *Tsuga crispata* sp. nov. (pollen), *T. torulosa* sp. nov. (pollen), *Pinus minutus* sp. nov. (pollen). В Тургае (если сравнивать с данными Р. Я. Абузяровой, которая строит стратиграфическое расчленение континентальной толщи, придерживаясь схемы В. В. Лаврова, в последнем ее варианте) отложениями первой свиты Павлодарского Прииртышья и Северного Приаралья соответствует «пристиноториевая» свита с примесью ксерофильной флоры в нижних слоях.

К сожалению, мною лично еще не проделаны спорово-пыльцевые анализы континентальных отложений Тургайской впадины и поэтому пока нет достаточных данных, чтобы сопоставить их со свитами Приаралья и Прииртышья на основании руководящих форм голосеменных. Однако наблюдения К. В. Никифоровой и предварительный просмотр спорово-пыльцевых спектров, а также сравнение данных спорово-пыльцевых анализов с выводами В. С. Корниловой (1955) о макроскопических остатках флоры говорят в пользу того, что вторая свита Павлодарского Прииртышья, чиликтинская свита в Приаралье и индрикториевая свита (включая болотатамские слои) Тургайской впадины отлагались одновременно (фиг. 13).

Четвертая свита континентальных отложений в Прииртышье, несмотря на то, что она по возрасту относится к верхней группе спектров *Ephedra*, по типу спектров принадлежит к верхней группе спектров *Ephedra*, к которой также относятся миоценовые и миоцен-плиоценовые, а также и четвертичные спектры. В этой группе выделяется нижняя подгруппа спектров Ринасеа, к которой относятся два типа спектров — олигоцен-миоценовый четвертой свиты и миоценовый — аральской. Группа спектров *Ephedra* выделена на основании того, что время формирования их характеризуется постепенным выпадением большинства видов и родов голосеменных, представленных в двух предыдущих группах. Начало объединения спектров относится ко времени отложения четвертой свиты континентальных отложений.

Итак, судя по составу спорово-пыльцевых спектров морских и континентальных отложений и флористическому анализу состава пыли голосеменных в этих спектрах, с учетом палеогеографических данных, выясняется следующее.

| Павлодарское Прииртышье | | Тургайская впадина | | | Северное Приаралье |
|-------------------------|----------------------------------|---------------------------------|--------------------------------|--|---|
| Возраст | Свита по схеме К. В. Никифоровой | Свита по схеме Е. Я. Абузяровой | Свита по схеме В. В. Лаврова | Свита по схеме Е. П. Войцовой и И. М. Покровской | Свита по схеме А. Я. Ишени и Л. Н. Формозовой |
| Четвертичные отложения | Q ₄ | | | | |
| | Q ₃ | Палева | | | |
| | Q ₂ | Голубая | | | |
| | Q ₁ | | | | |
| Плиоцен | верхний | Павлодарский | | | |
| Миоцен | верхний | | Павлодарский | Краснобурые пески и глина | |
| | средний | | | Желтые типососные глина (аральская свита) | |
| | нижний | Аральская | Аральская | Аральская | Аральская |
| Олигоцен | верхний | Четвертая | Тургайская (песчано-глинистая) | Тургайская | Липитонская, песчаная и песчано-глинистая свита |
| | средний | Третья | Болотатамская | Болотатамская | Бурные и краснобурые алевроиты |
| | | Вторая | Индрикториевые слои | Индрикториевые слои | Глина карбонатная (мало-сарыпский слой) |
| | | Первая | Пристиноториевые слои | | |
| | нижний | Чеганская | Чеганская | Чеганская | Чеганская |
| Эоцен | верхний | Опчкова | Свита кварцитовых песчаников | | Саксульская |
| | средний | Глаукопидовая | | | Тасарипская |
| Мел-палеоген | | Подглаукопидовая | | | |

Фиг. 13. Сопоставление свит морских и континентальных отложений Павлодарского Прииртышья, Тургайской впадины и Северного Приаралья

1. Голосеменные растения имели весьма существенное значение в палеогеновой растительности Киргизского материка, Мугоджар, а также близлежащих участков суши Средней Азии и восточных окраин Кавказа.

2. Для доэоценового времени характерно меньшее участие голосеменных в растительном покрове. Особенно сильного развития голосеменные достигают в верхнем эоцене и среднем олигоцене. В этот период в спектрах наблюдается особенное разнообразие пыльцы видов голосеменных. Наиболее широко в среднем олигоцене развиты представители рода *Pinus*. Начиная с верхнего олигодена наблюдается резкий спад в распространении голосеменных, продолжающийся в миоцене и плиоцене. К концу плиоцена голосеменные, по-видимому, были представлены в основном только двумя родами: *Pinus* и *Ephedra*.

3. Среди голосеменных палеогена основное место занимали различные представители класса *Coniferales*; в подчинении были *Cycadaceae*, *Ginkgoaceae* и др.

4. Состав голосеменных вообще и класса хвойных в частности был неодинаков в продолжение различных веков кайнозоя; изменение состава голосеменных происходило под влиянием изменения климата, рельефа и расширения площади материков.

5. В более древних отложениях палеогена флористический облик спектров голосеменных был своеобразен. В них сочетались представители древних тропических и субтропических флор Гондваны (?) и древнего Средиземноморья при незначительном участии умеренного азиатского элемента.

6. В средне- и верхнеолигоценное время, под влиянием расширения материков Азии и Европы, а затем исчезновения Тургайского пролива, осуществляется смещение флор, происходящих от древнего субтропического средиземноморья, с флорами умеренными, происходящими из восточных и китайских центров Азии. В результате формируется новая флора, значительно более умеренная и более богатая родами и видами хвойных из сем. *Pinaceae*, чем флора эоцена.

7. В связи с общим осушением климата и прогрессирующим увеличением континентальности его, в особенности в Приаралье, растительность открытых местообитаний вытесняет древесные ассоциации. Приток хвойных растений из азиатских центров на территорию Киргизии приостанавливается. Хвойные постепенно отступают к горным районам.

8. В миоцен-плиоцене древесная растительность, в том числе и хвойная, почти полностью исчезает на изучаемых территориях и одновременно приобретает большое значение флора *Ephedra*.

9. Проследив последовательные этапы развития голосеменных на территории Приаралья и Казахстана, начиная от нижних горизонтов палеогена и до наших дней, удается выделить определенные этапы в ее развитии, которые отражаются на составе спектров, извлеченных из палеогеновых, неогеновых и четвертичных отложений последовательно. Эти спектры не только отражают историко-флористические этапы развития голосеменных, но имеют и коррелирующее значение. Выделены группы, подгруппы и типы спектров и некоторые руководящие формы для них (фиг. 14 и 15).

1. Для группы *Podocarpaceae* — *Cedrus* в Припиртынье характерны:

а) Спектры подглауконитовой свиты

Dacrydium elatumiformis sp. nov. (pollen) — около 20%,
Podocarpus (3 sp.):
Podocarpites kasakhstanica sp. nov. (pollen),
Podocarpus sellowiformis sp. nov. (pollen),
P. andiniformis sp. nov. (pollen);
Cedrus (5—6 sp.) — около 28%;

Cedrus parvisaccata Zauer (pollen),
C. longisaccata Zauer (pollen),
C. laxireticulata Zauer (pollen),
C. pusilla Zauer (pollen),
C. aff. decodara Loud.;
Picea tasaranica sp. nov. (pollen),
Pinus gerardianaeformis sp. nov. (pollen),
P. banksianaeformis sp. nov. (pollen),
P. protoembra sp. nov. (pollen), около 18%,
Welwitschiacites protomirabilis sp. nov. (pollen),
Taxus cuspidataeformis sp. nov. (pollen).

б) Спектры оококовой свиты

Cedrus (5 sp.) — около 12%:

Cedrus Janchinii sp. nov. (pollen),
C. pusilla Zauer (pollen), около 5%,
C. longisaccata Zauer (pollen),
Pinus ponderosaformis sp. nov. (pollen), около 10%,
P. bicornis sp. nov. (pollen),
Picea tasaranica sp. nov. (pollen),
Agathis ovataformis sp. nov. (pollen),
Araucaria elegans sp. nov. (pollen);
Podocarpites kasakhstanica sp. nov. (pollen),
Podocarpus nageiaformis sp. nov. (pollen),
Torreya и *Torreya californiformis* sp. nov. (pollen) — около 14%,
Pinus секции *Combrae* — около 20%.

В Северном Приаралье верхней части этой группы (т. е. спектрам, оококовой свиты) соответствует группа *Podocarpaceae*, для которой характерно присутствие пыльцы следующих видов:

а) Спектры тасаранской свиты

Cedrus laxireticulata Zauer (pollen), около 10%,
C. longisaccata sp. nov. (pollen), около 10%,
Dacrydium elatumiformis sp. nov. (pollen), около 10%,
Podocarpus nageiaformis sp. nov. (pollen), около 10%,
Picea tasaranica sp. nov. (pollen),
Araucaria elegans sp. nov. (pollen),
Pinus protoembra sp. nov. (pollen), около 15%,
P. banksianaeformis sp. nov. (pollen), около 20%,
Taxus cuspidataeformis sp. nov. (pollen).

б) Спектры саксаульской свиты

Dacrydium elatumiformis sp. nov. (pollen),
Podocarpus sellowiformis sp. nov. (pollen),
P. andiniformis sp. nov. (pollen),
Podocarpites gigantea sp. nov. (pollen),
Agathis ovataformis sp. nov. (pollen), около 10%,
Cedrus laxireticulata Zauer (pollen), около 10%,
C. piniformis sp. nov. (pollen), около 12%,
C. longisaccata sp. nov. (pollen),
C. Janchinii sp. nov. (pollen), около 20%,
C. pusilla Zauer (pollen),
Picea tasaranica sp. nov. (pollen),
Torreya californiformis sp. nov. (pollen) и *Torreya*, около 10%,

Podocarpites gigantea sp. nov. (pollen),
Pinus секции *Strobus*, около 30%,
Pinus taedaformis sp. nov. (pollen), около 20%.

II. Для группы *Taxodium* — *Pinaceae* в Припиртышье и *Taxodium* — *Pinus* в Приаралье характерно появление пыльцы рода *Taxodium* Rich. *Tsuga* С. а. г., *Pinus peuceformis* sp. nov. (pollen), *P. minutus* sp. nov. (pollen) и др., а также особенное обилие видов рода *Pinus*, представленного различными секциями.

В Павлодарском Припиртышье подгруппа *Taxodium* этой группы, к которой относятся спектры чеганской свиты, в основном представлена следующими видами:

Zamites sp. nov. (pollen),
Encephalarites cycadioides sp. nov. (pollen),
Ginkgo bilobaeformis sp. nov. (pollen), около 10%,
Ginkgoites sp. (pollen),
Abies protofirma sp. nov. (pollen),
Taxodium aff. distichum L. (Rich.), около 44%,
Pinus strobiliformis sp. nov. (pollen),
P. protosilvestris sp. nov. (pollen), около 12%,
P. секции *Banksia* Мау., около 18%.

Подгруппа *Pinus* — *Taxodium* — *Tsuga*, к которой относятся спектры первой и второй свит, в основном содержит:

а) Спектры первой свиты

Podocarpus aff. dactyloides A. Rich.
 Максимум пыльцы рода *Pinus* (до 80%), в том числе:
Pinus peuceformis sp. nov. (pollen), около 15%,
P. protosilvestris sp. nov. (pollen), около 12%,
P. minutus sp. nov. (pollen),
Picea schrenkianaeformis sp. nov. (pollen),
P. alata sp. nov. (pollen)
Keteleeria gen.,
Tsuga crispa sp. nov. (pollen),
Tsuga torulosa sp. nov. (pollen),
Taxodium aff. distichum L. (Rich.).

б) Спектры второй свиты

Pinus singularis sp. nov. (pollen), около 10%,
Tsuga aff. canadensis (L.) С. а. г.,
T. crispa sp. nov. (pollen),
T. torulosa sp. nov. (pollen),
Pinus excelsaeformis sp. nov. (pollen), около 20%,
P. longifoliaformis sp. nov. (pollen), около 10%,
Ephedra aff. Przewalskii Staph.,
E. aff. distachya L.

В Северном Приаралье подгруппа *Cedrus* — *Taxodium*, соответствующая подгруппе *Taxodium* Припиртышья и включающая спектры чеганской свиты, в основном представлена следующими видами:

Ginkgo aff. biloba L. и *G. bilobaeformis* sp. nov. (pollen), около 10%,
Aracaria elegans sp. nov. (pollen), около 10%,
Podocarpus nageiaformis sp. nov. (pollen),
Cedrus aff. libani Laws.,
C. aff. atlantica Manetti,
C. pusilla Zaueg (pollen), около 12%.

Максимум пыльцы рода *Pinus* (около 60%), среди них:
Pinus singularis sp. nov. (pollen),
Taxodium aff. distichum L. (Rich.), около 12%,
Gnetumites sp. (pollen).

Подгруппа *Pinus* — *Taxodium* — *Tsuga*, к которой относятся спектры кутанбулакской и чиликтинской свит, в основном содержит:

а) Спектры кутанбулакской свиты

Taxus baccataeformis sp. nov. (pollen), 5—10%,
Pinus aff. koraiensis Sieb. et Zucc. (около 10%),
P. minutus sp. nov. (pollen),
P. секции *Eupitys*, около 30%,
P. singularis sp. nov. (pollen),
Taxodium aff. distichum L. (Rich.),
Tsuga crispa sp. nov. (pollen),
Podocarpites kasakhstanica sp. nov. (pollen),
Abies sibiriciformis sp. nov. (pollen).

б) Спектры чиликтинской свиты

Pinus taedaeformis sp. nov. (pollen),
P. singularis sp. nov. (pollen), от 10 до 5%,
P. секции *Eupitys*,
P. minutus sp. nov. (pollen),
Ephedra gen. (2 sp.),
Taxodium aff. distichum L. (Rich.),
Taxus baccataeformis sp. nov. (pollen), 5—10%.

III. Для группы *Ephedra*, выделенной только для Припиртышья, характерно прогрессирующее обеднение видового состава голосеменных, выпадение целых родов и семейств их и особенно интенсивное развитие *Pinus aff. silvestris*, а затем *P. silvestris* и рода *Ephedra*.

Основными руководящими видами для подгруппы *Pinaceae* этой группы, включающей спектры четвертой и аральской свит, являются:

Ephedra aff. intermedia Schg.,
Picea alata sp. nov. (pollen),
Picea schrenkianaeformis sp. nov. (pollen),
Pinus секции *Cembrae*,
P. aff. silvestris L.,
P. aff. exelsa Wall.

Для подгруппы же *Pinus* — *Ephedra*, в которую включены спектры павлодарской свиты и всех свит четвертичных отложений, основными руководящими видами являются:

а) Для спектров павлодарской свиты и нижнечетвертичных отложений —
Ephedra gen. (3 sp.), около 26%,
Pinus aff. koraiensis Sieb. et Zucc.,
P. aff. strobilus L.,
P. aff. silvestris L.,
Tsuga aff. canadensis (L.) С. а. г.,
T. crispa sp. nov. (pollen),
T. torulosa sp. nov. (pollen), +¹
Taxodium aff. distichum L. (Rich.) +

б) Для спектров свит голубой, палеовой и позднечетвертичных отложений —

¹ Знак + обозначает единичные находки.

Picea секции *Eurpicea*,
Pinus aff. *cembra* L.,
P. aff. *strobilus* L.
P. aff. *silvestris* L.,
Ephedra (2 sp.), около 22%.

10. Коррелирующие группы спектров позволяют выделить подглаукозитовую толщу песков и глин в Прииртышье в самостоятельную, наиболее древнюю свиту — мел-палеоценовую; сопоставить опоковую свиту Прииртышья с саксаульской и отчасти с тасаранской свитами Приаралья; сопоставить верхние горизонты ащайрыкской свиты О. С. Вялова (?) в Тургае с нижними горизонтами кутанбулакской свиты в Приаралье и с нижними слоями первой свиты в Павлодарском Прииртышье, а континентальные озерные отложения первой свиты в Прииртышье — со средними и верхними горизонтами кутанбулакской свиты в Приаралье; выделить в отдельную группу свиты: четвертую, аральскую, павлодарскую и свиты четвертичных отложений. Для этой группы характерен упадок развития голосеменных. По видимому составу голосеменных следует выделить отложения четвертой свиты в особую подгруппу олигоцен-миоценового возраста, а отложения аральской свиты — в подгруппу миоценового возраста; выделить на основании видового состава голосеменных ряд типов спектров, характеризующих миоцен-плиоценовые, нижние, средние и верхнечетвертичные и современные отложения.

11. Границы флористических групп спектров совпадают с границами свит, выделенных при помощи фацального анализа. Флористический анализ спорово-пыльцевых спектров дает возможность детально расчленять эти свиты в тех случаях, когда изучение их литологического состава не дает должного эффекта.

12. Схема стратиграфического положения руководящих групп пыльцевых спектров голосеменных является частью общей схемы стратиграфического положения руководящих спорово-пыльцевых спектров и голосеменных, покрытосеменных и спор в комплексе; в настоящей работе автор сделал попытку выявить возможность разработки такой схемы на примере изучения пыльцы голосеменных, выделенных из третичных и более молодых отложений Северного Приаралья и Павлодарского Прииртышья.

В дальнейшем эта схема должна быть значительно расширена и уточнена при помощи изучения спорово-пыльцевых спектров неогеновых и верхнепалеоценовых отложений Северного Приаралья, а также в процессе пересмотра материалов по Тургайскому прогибу, с проведением анализа состава пыльцы голосеменных по той схеме, которой придерживался автор при изучении голосеменных в Приаралье и Прииртышье.

В заключение следует отметить совершенною необходимость введения в практику спорово-пыльцевых исследований третичных отложений флористического анализа. Последнее позволит использовать ареалы современных видов и родов для решения вопросов о происхождении и миграции флор, а также облегчит сопоставление разновозрастных отложений на территориях, значительно удаленных одна от другой.

Надо полагать, что это в настоящее время единственно правильный путь к расшифровке данных спорово-пыльцевого анализа и к расширению возможностей применения его в области стратиграфии.

Сиг. 15. Руководящие спектры гомогенизированных для радиационных откликов Паломарского Прототипа. Составлен Е. Д. Демидовым.

1-бетон; 2-свинец; 3-дерево; 4-алюмин; 5-сталь; 6-сталь; 7-сталь; 8-сталь; 9-сталь; 10-сталь; 11-сталь; 12-сталь; 13-сталь; 14-сталь; 15-сталь; 16-сталь; 17-сталь.

VII. МОРФОЛОГИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПЫЛЬЦЫ ГОЛОСЕМЕННЫХ, ВЫДЕЛЕННОЙ ИЗ КАЙНОЗОЙСКИХ ОТЛОЖЕНИЙ ПАВЛОДАРСКОГО ПРИПРТЫШЬЯ И СЕВЕРНОГО ПРИАРАЛЬЯ

Спорово-пыльцевые спектры, выделенные автором из палеогеновых отложений Павлодарского Припиртышья и Северного Приаралья, разнообразны по составу; они содержат более 300 различных видов пыльцы и спор, среди которых пыльца голосеменных играет немалую роль, и участие ее в спектрах, принадлежащих различным стратиграфическим горизонтам, во многих случаях может иметь коррелирующее значение.

Так как использование данных спорово-пыльцевого анализа для стратиграфического расчленения третичных отложений с каждым годом расширяется, а отсутствие соответствующих атласов и справочников заметно затрудняет аналитическую работу, автор решается опубликовать данные по пыльце голосеменных до завершения всей предпринятой им работы по морфологическому описанию третичных пыльцы и спор Павлодарского Припиртышья и Северного Приаралья.

К сожалению, до сих пор еще нет схемы порядка описания и наименования ископаемых пыльцы и спор, но, по-видимому, одним из правильных методов является сравнение ископаемых форм с известными формами ныне живущих растений. Конечно, это применимо лишь при описании пыльцевых оболочек, извлеченных из отложений послепалеозойского времени, когда уже появились растения, принадлежащие к тем же семействам, а может быть, и родам, что и многие растения современных растительных ассоциаций. В частности это применимо к ископаемым оболочкам пыльцы и спор третичных растений, так как флора третичного периода в основной массе была уже близка к современной флоре тропиков, субтропиков и, отчасти, умеренных зон.

Поэтому, описывая формы пыльцевых зерен голосеменных, выделенных из третичных отложений, и по возможности приводя их к естественной системе, автор прибегал к употреблению наиболее распространенных в палеонтологии обозначений. Для обозначения предположительной принадлежности к современному семейству, роду или виду употреблялось окончание *ites*, например *Pinites*. Сходство с пыльцой современного вида достаточно близко по совокупности признаков обозначалось сокращением «aff» (*affinis*); при близком сходстве, но невозможном полном сравнении из-за плохой сохранности — «cf.» (*conformis*). Морфологическое сходство с современным видом обозначалось окончанием *formis* при условии установленного рода, например *Pinus longifoliaformis*. В том же случае, если ископаемые формы были тождественны с формами современных, им придавалось современное наименование, но после него в скобках ставилось *fossilis*. Обычно это употребляется для наименования плиоценовых и четвертичных видов. Этим автор указывал на принадлежность

формы к ископаемому растению. Такой способ характеристики ископаемых пылевых зерен, с одной стороны, приближает определение к естественной системе, а с другой — показывает, что автор не считает возможным полностью отождествлять по пыльце ископаемый вид растения с современным даже и в том случае, если морфологическое сходство пыльцы их очевидно.

Только в тех случаях, когда встреченная хорошей сохранности ископаемая форма пыльцевой или споровой оболочки имела характерные (выделяющие ее среди прочих известных ископаемых форм) и повторяющиеся морфологические особенности, но не имела аналогов среди пыльцы современных видов растений, ей придавалось новое название, основанное на характере этих морфологических особенностей. При этом чтобы показать, что вид описан только по пыльце, добавлялось в скобках слово «pollen»¹. Впоследствии, когда будут созданы систематические справочники по морфологии пыльцы современных растений, наименования ископаемых форм в большей мере могут быть уточнены. В настоящее же время очень важно, чтобы одни и те же формы всегда имели одно и то же название и ископаемый материал был бы сравним.

Автор полагает, что, возможно, им допущены некоторые погрешности в определении пыльцы, а поэтому замечания, которые могут возникнуть у лиц, использующих его работу, он с готовностью примет во внимание при дальнейшей работе.

Описание встреченных форм делалось параллельно с подсчетом зерен при анализе. Поэтому выявление основных морфологических признаков ископаемых пылевых зерен (оболочек) зачастую было сделано по одному-двум экземплярам. Все пробы обрабатывались ацетилирующей смесью, так что ископаемая пыльца была приведена в состояние, сравнимое с эталонным материалом. Большинство описанных форм документировалось при помощи микрофотографирования или зарисовок. При дальнейших аналитических работах вносились поправки на уклонения в размерах и в характере структурных элементов. Такой метод описания допускает, конечно, пробелы и неточности определения, которые должны исправляться по мере накопления фактического материала.

Комплекс пыльцы голосеменных, встреченных в спорово-пыльцевых спектрах палеогена, содержит три морфологически различных типа зерен (фиг. 16):

I. Пыльцевые зерна сфероподобные, однокамерные, без воздушных мешков, однопоровые или беспоровые (фиг. 16, графа I, 1—8). К этому типу относятся пыльца *Taxaceae* и *Taxacites*, *Taxodiaceae*, *Pinaceae* (род *Tsuga*), *Aglaucariaceae* и *Araucarites*; *Cupressaceae* и *Cupressites*; *Gnetaceae* (*Gnetumites*).

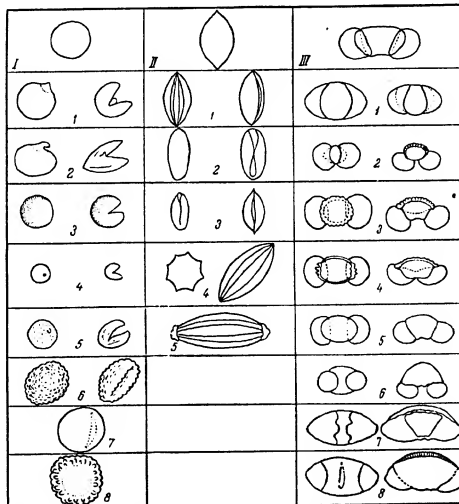
II. Пыльцевые зерна эллипсоидальные, беспоровые, однобороздные или безбороздные, без складок или со складками, без воздушных мешков или с зачаточными воздушными мешками (фиг. 16, графа II, 1—8). К этому типу относятся пыльца *Ginkgoaceae*, *Cycadaceae*, *Ephedraceae* и *Ephedrites* и *Welwitschiaceae* и *Welwitschiacites*.

III. Пыльцевые зерна сложной формы, обычно трехкамерные, в отдельных случаях четырехкамерные, с центральным телом и воздушными мешками (фиг. 16, графа III, 1—8). К этой группе относится пыльца *Pinaceae* (роды *Pinus*, *Picea*, *Abies*, *Cedrus*, *Keteleeria*), *Podocarpus* и *Dacrydium*.

Пыльца семейства гинкговых и цикадовых в настоящей работе охарактеризована недостаточно полно из-за редкости ее находок в кайнозойских спектрах. Кроме того, современная флора дает для них очень бедный сравнительный материал, значительно беднее, чем для других семейств. До-

¹ Аналогично «sp.» Эрдтмана (Erdtman, 1947).

статочно напомнить, что из обширного ранее рода *Ginkgo* в настоящее время известен только один вид — *Ginkgo biloba* L. Пыльца сем. *Pinaceae* охарактеризована полнее, так как сравнительный материал давал возможность довольно широкого сопоставления с пыльцой современных растений. Отождествление описываемой пыльцы с видами или родами ископаемой пыльцы, упомянутой в литературе, производилось не по голотипам,



Фиг. 16. Схематическое изображение различных морфологических типов пыльцы голосеменных.

I — пыльца сфероподобная, однопоровая или беспоровая (1—8), однобороздная или безбороздная (6—8); 1 — тип *Taxodium*; 2 — тип *Aguaia*; 3 — тип *Taxus*; 4 — тип *Torreya*; 5 — тип *Cupressaceae*; 6 — тип *Scedocarpus*; 7 — тип *Aglaucariaceae*; 8 — тип *Tsuga*. II — пыльца эллипсоидальная, однобороздная (1—5) или безбороздная (6—8). 1 — тип *Ginkgoaceae*; 2, 3 — тип *Cycadaceae*; 4 — тип *Ephedra*; 5 — тип *Welwitschia*. III — пыльца сложной формы с воздушными мешками: 1 — тип *Pinus protocrotoni*; 2 — тип *Podocarpus*; 3 — тип *Pinus* секция *Strobus*; 4 — тип *Pinus sibirica*; 5 — тип *Pinus silvestris*; 6 — тип *Pinus* секция *Banksia*; 7 — тип *Cedrus*; 8 — тип *Picea*.

а по описаниям или микрофотографиям. Голотипы в большинстве случаев оставались для нас недоступными.

Все препараты, по которым велось описание ископаемых форм, относятся к коллекции ГИН АН СССР № 3082. Препараты из Павлодарского Прииртышья имеют индекс $\frac{3}{K}$ и $\frac{H}{K}$, а из Северного Приаралья $\frac{3A}{K}$.

Микрофотографии сделаны в фотолaborатории Отдела стратиграфии ГИН АН СССР заведующим лабораторией А. И. Никитиным при непосредственном участии автора. Зарисовки выполнены автором.

ОБЩИЙ СПИСОК ВИДОВ, ПРИВЕДЕННЫХ
В ОПИСАНИЯХ

КЛАСС CYCADALES

СЕМ. CYCADACEAE

Zamites (pollen).
Encephalartes cycadioides sp. nov. (pollen).

КЛАСС GINKGOALES

СЕМ. GINKGOACEAE

Ginkgo bilobaeformis sp. nov. (pollen),
Ginkgoites (pollen).

КЛАСС CONIFERALES

СЕМ. TAXACEAE

Taxus cuspidataeformis sp. nov. (pollen).
T. baccataeformis sp. nov. (pollen).
Taxites (pollen).
Torreya californiformis sp. nov. (pollen).

СЕМ. PODOCARPACEAE

Podocarpus sellowiformis sp. nov. (pollen).
P. andiniiformis sp. nov. (pollen).
P. nageiaeformis sp. nov. (pollen).
Podocarpites kasakhstanica sp. nov. (pollen).
P. gigantea sp. nov. (pollen).
Podocarpus aff. *dacrydioides* A. R i g h.
Dacrydium elatumiformis sp. nov. (pollen).

СЕМ. ARAUCARIACEAE

Araucaria elegans sp. nov. (pollen).
Agathis ovataeformis sp. nov. (pollen).

СЕМ. PINACEAE

Abies sibiriciformis sp. nov. (pollen)
A. protofirma sp. nov. (pollen).
Keteleeria davidianaeformis sp. nov. (pollen).
Picea lasaranica sp. nov. (pollen).
P. schrenkianaeformis sp. nov. (pollen).
P. alata sp. nov. (pollen) (ex. gr. *P. jezoensis* C a r r.).
Cedrus aff. *deodara* L o u d.
C. lazireticulata Z a u e r (pollen).
C. piniformis sp. nov. (pollen).
C. Janschinii sp. nov. (pollen).
C. parvisaccata Z a u e r (pollen).
C. pusilla Z a u e r (pollen).
C. aff. libani L a w s.
C. longisaccata sp. nov. (pollen).
Pinus cembraeformis sp. nov. (pollen).
P. aff. koraiensis Sieb. et Z u c c.

P. microsibirica sp. nov. (pollen).
P. sibiriciformis sp. nov. (pollen).
P. ex. gr. sibirica (R u p r.) M a y r.
P. protoembra sp. nov. (pollen).
P. ex. gr. protoembra.
P. strobiliformis sp. nov. (pollen).
P. peuceformis sp. nov. (pollen).
P. exelsaeformis sp. nov. (pollen).
P. ex. gr. exelsa W a l l.
P. gerardianaeformis sp. nov. (pollen).
P. longifoliaeformis sp. nov. (pollen).
P. ponderosaeformis sp. nov. (pollen).
P. bicornis sp. nov. (pollen).
P. minutus sp. nov. (pollen).
P. taedaeformis sp. nov. (pollen).
P. singularis sp. nov. (pollen).
P. banksianaeformis sp. nov. (pollen).
P. halepensisformis sp. nov. (pollen).
P. protosilvestris sp. nov. (pollen).
P. aff. silvestris L.
Tsuga crispa sp. nov. (pollen).
T. torulosa sp. nov. (pollen).

СЕМ. TAXODIACEAE

Sciadopitys tuberculata sp. nov. (pollen) [ex. gr. *S. verticillata* S i e b. et Z u c c.].
Sequoia semperviriformis sp. nov. (pollen).
Taxodium aff. *distichum* L. (R i c h.).
Taxodiumites sp.
Cunninghamia aff. *lanceolata* L a m b.

СЕМ. CUPRESSACEAE

Thuoyites (pollen).
Libocedrus sp. (pollen).
Cupressites (pollen).
C. sp. (pollen), (aff. *Cupressus pallens* B o l c h.).
Chamaecyparites (pollen).

КЛАСС GNETALES

СЕМ. WELWITSCHIACEAE

Welwitschites protomirabilis sp. nov. (pollen).

СЕМ. EPHEDRACEAE

Ephedra eocenipites W o d e h o u s e.
E. aff. Przewalskii S t a p f.
E. aff. distachya L.
E. aff. intermedia S c h r.
Ephedrites trinata sp. nov. (pollen).

СЕМ. GNETACEAE

Gnetumites (pollen).

1. КЛАСС CYCADALES САГОВЫЕ

СЕМ. CYCADACEAE — САГОВНИКОВЫЕ

Zamites pollen

Пыльца сем. Cycadaceae и Ginkgoaceae относится к типу эллипсоидальных, беспоровых, однобороздных (или с одной складкой).

Zamites sp. (pollen)

Табл. I, рис. 1—3

Препарат № 191 $\frac{H}{K}$

Пыльца имеет сходство со следующими формами, известными по литературным данным:

1933. *Cycadites* sp. Wodehouse. Tertiary pollen. The oil shales of the eocene Green River formation, p. 485, fig. 1—3.
 1949. *Bennettites* — *Pollenites lucifer* sp. Thiergart. Der stratigraphische Wert mesozoischer Pollen und Sporen, Taf. IV/V, Fig. 12.
 1950. Cycadeen (oder Ginkgoaceen) Pollen Reissinger. Die «Pollenanalyse» ausgedehnt auf alle Sedimentgesteine der geologischen Vergangenheit, Taf. XVIII, Fig. 16—22.
 1950. Cycadeen (oder Ginkgoaceen) Pollen Reissinger. Там же, табл. XIII, фиг. 13—15.

Пыльцевое зерно эллипсоидальное, однобороздное. Длина зерна около 25 μ , ширина около 16 μ , отклонения в размерах в пределах от 3 до 5 μ . Очертание в боковом положении овальное. На дистальной стороне от одного полюса к другому проходит продольная борозда. У некоторых зерен борозда почти скрыта под завернувшимися краями (табл. I, рис. 2), так как зерно часто сминается таким образом, что края его образуют нечто вроде завернувшегося лещика. Экзина однослойная (при увеличении в 400 раз), в большинстве случаев гладкая или неяснобороздчатая. Контур зерна ровный или слабоволнистый.

Ископаемая форма, если судить по описаниям и рисункам, имеет сходство с пылью *Zamia muricata* Willd. в том случае, если зерно не смято и сохраняет округло-эллиптическое очертание. Пыльца ныне живущих *Zamia muricata* описана В. В. Зауер (1950) в числе прочих Cycadales. Автор отмечает, что пыльца *Zamia* имеет двуслойную оболочку, что различно при увеличении в 700 раз.

Если пыльцевое зерно *Zamites* деформировано и несколько сжато вдоль большой оси, оно имеет некоторое сходство с пылью растений семейства Umbelliferae или Leguminosae.

С. Н. Наумовой (1939) формы, подобные *Zamites* sp., включены в общую группу *Intorta*.

Все перечисленные выше синонимы не дают точного определения данной формы, так как авторы относят описанные ими пыльцевые зерна или к семейству цикадовых или к семейству бегониевых. Как известно, эти семейства являются наиболее древней ветвью голосеменных, ведущих свое начало еще с каменноугольного периода, причем Cycadales имели широкое распространение еще в юрское и меловое время. В более молодых отложениях значение их сильно снижается, и в верхнетретичных отложениях находят пыльцу растений, принадлежащих к семейству Cycadales, уже единичны.

Местонахождение: Павлодарское Прииртышье, Пос. Парамоновка, скв. 1; верхние горизонты чеганских глин.

Распространение: чеганские глины в пределах Казахстана; эоцен — лесс в Германии; верхний и средний мел — в Центральной Сибири.

Encephalartes cycadoides sp. nov. (pollen)

Табл. I, рис. 4 и 5

Препараты № 149 $\frac{H}{K}$ и 233 $\frac{H}{K}$

Голотип: Павлодарское Прииртышье, оз. Кемир-Туз, чеганские глины и глины второй свиты континентальных отложений среднего олигоцена (препарат № 149 $\frac{H}{K}$).

Пыльца имеет сходство со следующими формами, известными по литературе:

1930. *Cycadites* sp. Wodehouse. Tertiary pollen. The oil shales of the eocene Green River formation p. 485, fig. 1—3.
 1953. *Encephalartes cycadiformis* Волховитина. Спорово-пыльцевая характеристика меловых отложений центральных областей СССР, стр. 65, табл. X, рис. 17.

Пыльцевое зерно однобороздное, эллипсоидальное, беспоровое. Размер по большой оси около 30 μ , по меньшей — около 20 μ ; встречаются зерна размерами не более 18 μ по меньшей оси. Очертание в боковом положении эллиптическое. Борозда длинная, проходит от полюса к полюсу. Мембрана борозды гладкая. У большинства зерен края борозды в области экватора смыкаются. В результате этого края борозды образуют рисунок в виде восьмерки (табл. I, фиг. 4), что является одним из наиболее характерных диагностических признаков для пылицы Cycadaceae. Экзина двуслойная, тонкая. Поверхность экзины неравномерно мелкобугорчатая. У краев борозды оба слоя экзины выклиниваются.

С пылью современного вида *Encephalartos Lehmannii* описанная ископаемая форма имеет большое сходство как по форме и очертаниям, так и по характеру поверхности экзины. Отличие ископаемого вида от современного является более тонкая экзина и меньшее количество ее слоев [в описании В. В. Зауер (1950) для пыльцевых зерен *Encephalartos Lehmannii* указаны три слоя экзины, а пыльцевые зерна ископаемого вида имеют лишь два слоя].

Местонахождение: см. голотип.

Распространение: меловые отложения Казахстана и Сибири; эоцен Америки (флора Грин-Ривер), где пыльца описана под общим названием *Cycadites*; нижний и средний олигоцен Казахстана.

Пыльца Cycadales трудно отличима от пылицы Ginkgoales и в основном определения ведутся лишь до семейства. С. Н. Наумовой (1939) формы, подобные Ginkgoaceae и *Encephalartos Lehmannii*, вместе с пылью хвойных без воздушных мешков объединены в общую группу *Intorta*. Ископаемый вид близок к пыльце современного рода *Encephalartos Lehmannii*, два вида которого описаны В. В. Зауер (1950). В наше время этот род распространен в Южной и Юго-Восточной Африке. Пыльца, подобная *Encephalartes* в третичных отложениях Казахстана, видимо, может рассматриваться как реликт меловой флоры.

Согласно данным В. В. Зауер (1950), наибольшего распространения саговниковые достигли в конце юрского и в начале мелового периода. Однако, по данным Крейзеля (Krausel, 1949), в третичное время они представлены еще 21 видом.

На территории Казахстана ни пыльцы, ни макроскопических остатков Сусадаль до наших исследований не было найдено. В. В. Зауер отмечает обилие находок цикадовых (листовые отпечатки) в окраинных зонах Сибирской флористической провинции юрского периода (флоры Средней Азии).

В настоящее время семейство саговниковых объединяет 9 родов, причем большинство видов, относящихся к этим родам, являются обитателями тропиков.

Растения рода *Zamia* в настоящее время распространены в тропической и субтропической зонах Америки и представляют собой древовидные или кустарниковые формы, по внешнему виду несколько напоминающие кустарниковые формы пальмы или древовидные папоротники.

2. КЛАСС GINKGOALES — ГИНКГОВЫЕ

СЕМ. GINKGOACEAE — ГИНКГОВЫЕ

На основании находок макроскопических остатков и пыльцы установлено, что гинкговые принадлежат к весьма древним семействам, ведущим свое начало еще с девона (Наумова, 1939; Болховитина, 1952). Наиболее широко гинкговые были распространены в юрское время. В меловом периоде число видов их значительно снижается, а в третичных отложениях встречаются представители только одного рода — *Ginkgo*. Один из видов этого рода, а именно *Ginkgo biloba* L., существует и в наше время — в субтропической зоне.

Пыльца ископаемых видов, относимых к семейству Ginkgoaceae, имеет одноступенчатое строение, весьма близкое к строению пыльцевого зерна современного вида *Ginkgo biloba* L.

Пыльцевые зерна эллипсоидальные или округло-эллипсоидальные, одиобороздные и беспоровые. Размеры: 30—45 μ по большей оси и 15—25 μ — по меньшей. Очертание зерна в боковом положении округлое или эллиптическое. Контур зерна ровный или слегка волнистый. Борозда вытянута параллельно большей оси, широкая, имеет тонкую мембрану. Контур борозды иногда неровный. Экзина однослойная, тонкая (не более 2 μ), значительно утончается и резко обрывается к краям борозды, не выклиниваясь. Поверхность зерна гладкая или неяснобугорчатая. Смятое пыльцевое зерно (смятие обычно происходит в направлении, параллельном большей оси) несколько напоминает пыльцу Сусадаль. Наиболее распространенный тип ископаемых зерен, относимых к семейству Ginkgoaceae, ближе всего к пыльце современного вида *Ginkgo biloba* L. (табл. I, рис. 12—14). Ископаемый вид отличается от современного лишь более угловатыми очертаниями.

Ginkgo bilobaeformis sp. nov. (pollen)

Табл. I, рис. 6—11
Препараты № 170 $\frac{H}{K}$, 186 $\frac{H}{K}$ (рис. 6); 198 $\frac{H}{K}$, 244 $\frac{H}{K}$ и 255 $\frac{3}{K}$ (рис. 7);
191 $\frac{H}{K}$ (рис. 8 и 9); 334 $\frac{3}{K}$ (рис. 10 и 11)

Г о л о т и п: Павлодарское Прииртышье, пос. Парамоновка, скв. 1, слюдяные глины с растительными остатками; мел — палеоген (препарат № 186 $\frac{H}{K}$).

Пыльца имеет сходство со следующими формами, известными по литературе:

1933. *Cycadopsites* sp. Wodehouse. Tertiary pollen. The oil shales of the eosene Green River formation, p. 485, fig. 1—5.
1939. *Ginkgo parva* Наумова (in litt.). *Ginkgo gibberosa* Наумова (in litt.).
1949. *Aecuminella marginata* Маливкина. Определитель спор и пыльцы Юра — мел., табл. 3, рис. 58.
1950. Cycadeen (oder Ginkgoaceen) Pollen Reissinger. Die «Pollenanalyse» ausgehend auf alle Sedimentgesteine der geologischen Vergangenheit, S. 124, Taf. XIII, Fig. 13—23.

Строение пыльцевого зерна подобно приведенному в общей характеристике семейства. Размеры: 35—45 μ по большей оси и 16—22 μ — по меньшей.

М е с т о н а х о ж д е н и е: см. голотип.

Р а с п р о с т р а н е н и е: наиболее достоверные данные о находках пыльцы *Ginkgo* из юрских отложений Урала и Западной Сибири, а также из меловых и юрских отложений Казахстана. Известна пыльца *Ginkgo* из меловых и третичных отложений от эоцена до среднего олигоцена Казахстана, Среднего Урала и Западно-Сибирской низменности.

Присутствие пыльцы *Ginkgo* отмечено в эоцене Западной Германии и Грин-Ривер в Америке, где пыльцевые зерна типа Ginkgoaceae многие авторы относили к группе «Cycadeen oder Ginkgoaceen pollen».

Ginkgotes (pollen)

Табл. I, рис. 15, 16
Препарат № 193 $\frac{H}{K}$

Пыльцевые зерна по внешнему облику подобны пыльце *Ginkgo*. Отличаются значительно большими размерами (до 60 μ и более по большей оси). Экзина часто имеет разрывы по борозде.

М е с т о н а х о ж д е н и е: Павлодарское Прииртышье, оз. Кемпр-Туз; четвертая свита континентального олигоцена (верхний эоцен).

3. КЛАСС CONIFERALES — ХВОЙНЫЕ

СЕМ. TAXACEAE — ТИССОВЫЕ

Пыльца тиссовых относится к типу сфероидальных, безбороздных, беспоровых или однопоровых пыльцевых зерен.

Размеры варьируют в пределах от 16 до 30 μ , в зависимости от принадлежности к роду или виду. Очертания обычно округлые или неправильные в связи со вторичной деформацией. Пыльцевое зерно безбороздное, часто имеет трещину (*Torreyia*), разрывающую его от центра к периферии. По видимому, трещины образуются в местах, предназначенных для прорастания пыльцевой трубки. Некоторые зерна имеют складки (*Taxus*). Экзина пыльцевых зерен одно- или двуслойная. Поверхность экзины обычно гладкая или имеет бугорчато-шиповатые выросты. В зависимости от наличия или отсутствия скульптурных выростов контур зерна гладкий или неровный. Ископаемая пыльца семейства Taxaceae, так же как и пыльца современных растений этого семейства, имеет морфологическое сходство с пыльцой растений семейства Cupressaceae. Пыльца, отнесенная нами к роду *Taxus*, отличается от пыльцы, отнесенной к семейству Cupressaceae, более толстой и всегда скульптурной экзиной, а также отсутствием трещины.

В третичных отложениях Северного Казахстана автором была найдена пыльца тиссовых, представленная тремя видами, довольно близкими по морфологическим признакам к пыльце современных родов *Taxus* L. и *Torreya* Agnott.

В. В. Зауер (1950) отмечала, что пыльца тиссовых в ископаемом состоянии встречается довольно редко, но, по-видимому, это верно только для некоторых ботанико-географических провинций, так как, например, в палеогене Нижнего Дона и Кавказа пыльца тиссовых была обнаружена неоднократно.

Род *Taxus* L. — Тисс

Taxus cuspidataeformis sp. nov. (pollen)

Табл. I, рис. 17, 18
Препарат № 188 $\frac{H}{K}$

Г о л о т и п: Павлодарское Прииртышье, Парамоновка, скв. 2; слюдяные глины подглауконитовой свиты (верхний мел).

Пыльцевое зерно сферическое, безбороздное, беспоровое; размер 16—20 м; очертание округлое или эллиптическое. Экзина двуслойная (?), скульптура мелкобугорчатая, что обуславливает точечный рисунок на поверхности зерна. Некоторые зерна имеют бугорки с заостренными вершинами, что создает впечатление шиповатости. Экзина часто сминается в мелкие складки, при этом зерно не теряет первоначальной формы и остается сферическим. Контур зерна — мелкофестончатый.

Пыльца описанного вида имеет большое сходство с пыльцой *Taxus cuspidata* Sieb. et Zucc., характеристика которой дана в работе В. В. Зауер (1950). Сходство отмечается как по общим морфологическим признакам, так и по размерам.

М е с т о н а х о ж д е н и е: см. голотип.

Р а с п р о с т р а н е н и е: ископаемые остатки тисса известны еще в юрское и меловое время на островах Дальнего Востока. Веточки с отпечатками листьев (хвои) тисса найдены в ряде пунктов СССР, где они известны начиная от отложений датского яруса до сармата включительно. В палеогене пыльца тисса обнаружена по рр. Уралу, Волге и Дону и на Северном Кавказе. В виде единичных находок пыльца *Taxus* отмечена в палеогене и неогене Среднего Поволжья вместе с пыльцой *Sciadopitys*. А. Н. Криштофовичем (1941) отмечены находки тисса в неогене Дона. В Казахстане пыльца тисса встречается в верхнемеловых и третичных отложениях. Эрдтман (1943) указывает на находки пыльцы *Taxus* в межледниковых отложениях Польши. В настоящее время вид *Taxus cuspidata* Sieb. et Zucc. растет в лесах Дальнего Востока, в Китае, Маньчжурии и Японии.

Taxus baccataeformis sp. nov. (pollen)

Табл. I, рис. 19 и 20
Препараты № 193 $\frac{H}{K}$, 165 $\frac{H}{K}$ (рис. 19); 334 $\frac{H}{K}$ (рис. 20)

Г о л о т и п: Павлодарское Прииртышье, пос. Парамоновка, скв. 1 опоковые глины, верхний — средний эоцен (препарат № 193 $\frac{H}{K}$).

Пыльцевое зерно сферическое, безбороздное, беспоровое. Размер от 25 до 29 м. У большинства зерен образуется клиновидная трещина от

96

периферии к центру, но при этом зерна не сминаются и сохраняют первоначальные округлые очертания. Экзина толстая (до 2 м), двуслойная, верхний слой ее имеет бугорчато-шиповидные выросты, расположенные равномерно по всей поверхности зерна. У некоторых зерен выросты расположены радиально. Контур зерна неровный.

От пыльцы *Taxus* aff. *cuspidata* Sieb. et Zucc. пыльца *Taxus baccataeformis* отличается строением поверхности, более толстой экзиной и несколько большей величиной.

М е с т о н а х о ж д е н и е: см. голотип.

Р а с п р о с т р а н е н и е: эоцен, нижний и средний олигоцен Павлодарского Прииртышья, средний олигоцен Северного Приаралья. Единичные находки в палеоцен-эоценовых и верхнемеловых отложениях Казахстана.

В настоящее время *Taxus baccata* L. — тисс ягодный или европейский — распространен спорадически почти по всей Западной Европе, по Черноморскому побережью, Кавказу и Малой Азии и в горах Северной Африки. В горных районах тисс доходит до высоты 2300 м над уровнем моря. Характерен для лесной зоны; растет под пологом хвойно-широколиственных лесов.

Taxites (?) (pollen)

Табл. I, рис. 21
Препарат № 193 $\frac{H}{K}$

Пыльцевое зерно сферическое; размер его от 26 до 36 м. Иногда наблюдается трещина от периферии к центру. Экзина толстая (до 3 м). Поверхность экзины мелкошпиговатая. У некоторых зерен выросты расположены радиально. По величине зерна имеют сходство с пыльцой современного вида *Taxus baccata* L.

М е с т о н а х о ж д е н и е: Павлодарское Прииртышье, пос. Парамоновка, скв. 1; опоковые глины среднего эоцена. В палеогеновых спорово-пыльцевых спектрах Павлодарского Прииртышья и Северного Приаралья встречается в комплексе с различными видами *Cedrus*, *Sciadopitys*, *Pinus* и представителями ксерофитной флоры покрытосеменных.

Torreya californiformis sp. nov. (pollen)

Табл. I, рис. 22 и 23
Препараты № 198 $\frac{H}{K}$ (рис. 22), 259 $\frac{H}{K}$ (рис. 23)

Г о л о т и п: Павлодарское Прииртышье, оз. Кемир-Туз; глины с отпечатками растений, вторая свита континентальных отложений среднего олигоцена.

Пыльцевое зерно сферическое, безбороздное, беспоровое или с одной мало заметной порой. Величина пыльцевого зерна 22—27 м. Экзина тонкая, однослойная или двуслойная, гладкая, иногда сминающаяся в мелкие, произвольно расположенные складки. Контур ровный.

С *Torreya californica* Torr., изученным автором по гербарному материалу из коллекции Н. А. Болховитиной, имеет большое сходство по всем морфологическим признакам за исключением небольших отклонений в размерах. Отдельные ископаемые пыльцевые зерна *Torreya californiformis* достигают величины 27 м, пыльца же ныне живущей *T. californica* Torr. не превышает 25 м.

От описанной В. В. Зауер (1950) пыльцы *Torreya nucifera* Sieb. et Zucc. ископаемая пыльца, определенная как *T. aff. californica*, отличается следующими признаками:

7 Труды ГИН, вып. 6

97

1) диаметр пыльца *T. aff. californica* не превышает 27 μ , а большинство пыльцевых зерен *T. nucifera* достигает 33 μ ;

2) пыльцевые зерна *T. aff. californica* имеют округло-правильные очертания, а *T. nucifera* — округло-неправильное;

3) пыльцевые зерна *T. californiformis* (так же как и у ныне живущей *T. californica* T o r r e y — гладкие, лишённые каких-либо выростов, пыльца же *T. nucifera* имеет мелкие бугорчатые выросты. Кроме того, толщина экзины *T. nucifera* значительно превышает толщину экзины пыльца *T. californiformis*.

Местонахождение: см. голотип.

Распространение: Навлодарское Припутье, нижний эоцен, низы среднего олигоцена. Северное Припутье, верхний эоцен — нижний олигоцен. Единичные находки известны из олигоцен-миоценовых отложений Воронежской обл.

Растения, принадлежащие к роду *Torreya* A g r o t t., относятся к вечнозеленым формам. В настоящее время *Torreya californica* произрастает в Калифорнии. Представляет собой дерево, высотой до 35 м; приурочено к лесной зоне. Некоторые виды *Torreya* приурочены к южным широтам. Часть из них произрастает в Южном Китае, в Японии и на о-ве Флорида.

СЕМ. PODOCARPACEAE — ПОГОНОЛОДНИКОВЫЕ

Ископаемые растительные остатки растений из сем. Podocarpaceae, определенные до вида, на территории СССР известны еще с 1859 г., когда Г. В. Абрихтом были определены отпечатки листьев из третичных толщ Кнеппины. Находки древесины и листьев *Podocarpus* обычны для эоцена и палеоцена Донбасса и Киевской обл. В более древних отложениях известны находки древесины различных *Podocarprotylon* в средней и верхней юре, в мелу (где в нижних и средних отделах этот род представлен наиболее широко). В своей книге, посвященной обзору растительности прошлых веков, А. Сьюорд (1936) упоминает о находках хвойного, так называемого *Archaeopodocarpus*, который может быть отнесен к наиболее древним представителям сем. Podocarpaceae.

Нигде в литературе не упоминается о находках листьев или древесины *Dacrydium*. Причиной этого может быть некоторое несогласие относительно систематического положения этого рода, который, как известно, некоторые авторы относят к семейству тиссовых. Возможно, что ранние находки «тиссовых» содержали в себе часть видов, принадлежащих к роду *Dacrydium*.

Пыльцевые данные свидетельствуют о чрезвычайно раннем появлении растений сем. Podocarpaceae. Пыльца типа *Podocarpus* найдена уже в пермских отложениях. Как отмечает В. В. Зауер, пыльца пермских Podocarpaceae отличается большей величиной, чем выделяемая из третичных отложений. Кроме того, пыльцевые зерна Podocarpaceae из перми имеют густую, часто двойную сетку на воздушных мешках, значительно более четкую, чем сетка у пыльцы Podocarpaceae из третичных отложений. По внешнему облику более древние формы пыльцы Podocarpaceae имеют большое сходство с *Podocarpites gigantea* и *P. kasakhstanica*, чем с *Podocarpus aff. Nageia* или с другими мелкими формами, обычно встречающимися в третичных отложениях.

Большое разнообразие пыльцы Podocarpaceae отмечается в меловых отложениях Казахстана, Приуралья, Сибири, Дальнего Востока, а также в южнотретичных отложениях Азиатской и юга Европейской частей СССР.

Недостаточное знакомство с морфологией пыльцы различных видов современных Podocarpaceae привело к неправильному взгляду на прекращение распространения погонлодниковых уже в олигоцене. Авторы многих

описаний спорово-пыльцевых спектров из кайнозойских отложений относили пыльцу, весьма близкую по морфологическим признакам к пыльце описанных видов *Podocarpus*, к особому виду *Pinus*, условно называемому или *Pinus Haplozyton*. Так, например, пыльца, описанная Потонье, Тиргартом и др. под названием *Pinus Haplozyton*, или *Pinus Haplozyton* Тур., по-видимому, в действительности в большинстве случаев принадлежит к роду *Podocarpus*, что конечно не исключает возможности находок пыльцы сосен, принадлежащих к подроду *Haplozyton* в отложениях меловой и третичной систем.

Современное географическое распространение семейства, представленного в настоящее время шестью родами (*Podocarpus*, *Dacrydium*, *Phorophora*, *Phyllocladus*, *Saxagothea*, *Microcachrys*), приурочено к тропическому поясу южного полушария. Многие виды Podocarpaceae, как *Podocarpus chilense* A. Rich., *P. dactyloides* A. Rich., *P. Totara* N. Don и роды *Saxagothea* L i n d e n *Dacrydium* S o l a n d, составляют значительную часть хвойных и смешанных тропических и субтропических лесов тропической и южной части Южной Америки, Африки, Новой Зеландии. Многие виды деревьев, принадлежащие к роду *Podocarpus*, являются основными лесобразующими породами в горных частях Южной Африки, где они составляют массивы с подлеском из можжевельника.

Отдельные виды *Podocarpus* широко распространены в Австралии, Японии, Южном Китае и Южной Америке. Обычными спутниками различного рода *Podocarpus* во влажных тропиках являются *Araucaria* и *Agathis*. Чустарниковые формы Podocarpaceae распространены в южном полушарии на юге умеренной зоны.

Все пыльцевые зерна, выделенные из палеогеновых отложений Навлодарского Припутья и Северного Припутья, относящиеся к сем. Podocarpaceae, принадлежат к двум родам: *Podocarpus* L' H e r i t. и *Dacrydium* S o l a n d. Пыльцевые зерна этих родов относятся к типу пыльцы хвойных, состоящей из центральной части, или тела, и двух или более воздушных мешков, прикрепленных к телу с брюшной стороны (фиг. 16, 111). Величина пыльцевых зерен варьирует, в зависимости от принадлежности к виду, от 50 до 120 μ . Борозда, расположенная на брюшной стороне тела, выражена неясно или совсем не обнаруживается. Пор нет. Экзина тела обычно двух- или трехслойная на спинной части тела и однослойная или двуслойная на брюшной. Воздушные мешки представляют собой выросты экзины, обычно однослойные. Структура и скульптура экзины тела и воздушных мешков различны. Экзина тела обычно имеет крупнозернистую или столбчатую структуру и бугорчатую или лакунообразную скульптуру. На спинной поверхности зерна экзина утолщается подобно шпигу у пыльцы сем. Pinaceae. Утолщение это пропигируется в боковом положении в виде гребня. Экзина воздушных мешков имеет сетчатую структуру. Контур тела неровный, волнистый; контур мешков — обычно ровный.

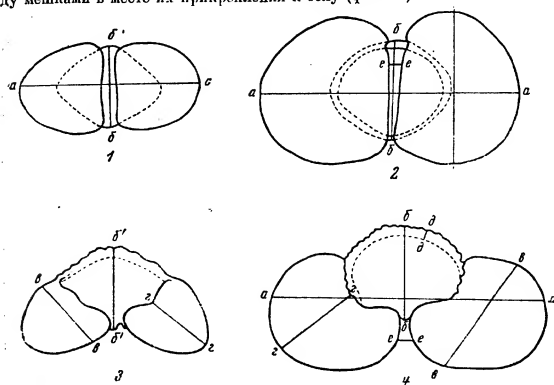
Внешне пыльцевые зерна родов *Podocarpus* и *Dacrydium* сходны с пыльцевыми зёрнами сем. Pinaceae, в частности с видами родов *Pinus* и *Abies*. В отношении признаков морфологического различия между пыльцой Podocarpaceae, снабженной воздушными мешками, и Pinaceae, — специальных исследований нет. В. В. Зауер (1950) указывает следующие черты отличия пыльцевых зерен *Podocarpus* от сем. Pinaceae (в частности, рода *Pinus*): более мелкие размеры, резко очерченные зародышевые борозды, тонкие, обычно смятые воздушные мешки.

Однако в ископаемом состоянии в спорово-пыльцевых спектрах встречаются такие пыльцевые зерна Podocarpaceae (в особенности рода *Podocarpus*), которые по ряду признаков значительно уклоняются от норм, приведенных В. В. Зауер для современной пыльцы рода *Podocarpus*. Также и среди ископаемой пыльцы рода *Pinus*, сходной с пыльцой рода *Podocarpus*.

sarpus, встречено много форм, уклоняющихся от обычных норм для пыльцы современных видов этого рода. Поэтому для определения палеогеновой пыльцы этих родов пришлось заняться выявлением их основных, характерных диагностических признаков.

За основу диагностических признаков ископаемой пыльцы родов *Podocarpus* и *Dacrydium* брались следующие элементы:

- 1) форма и очертание тела пыльцевого зерна (в полярной и боковой проекциях);
- 2) форма и очертание воздушных мешков;
- 3) способ прикрепления воздушных мешков к телу;
- 4) структура и скульптура оболочек тела;
- 5) характер сетчатости воздушных мешков;
- 6) размеры: а) общая длина пыльцевого зерна (наибольшая ось, проходящая через тело и мешки), б) ширина и высота тела, в) ширина (диаметр) и высота воздушного мешка, г) толщина экзины, д) расстояние между мешками в месте их прикрепления к телу (фиг. 17).



Фиг. 17 Основные элементы измерения пыльцевых зерен сем. Podocarpaceae, имеющих воздушные мешки.

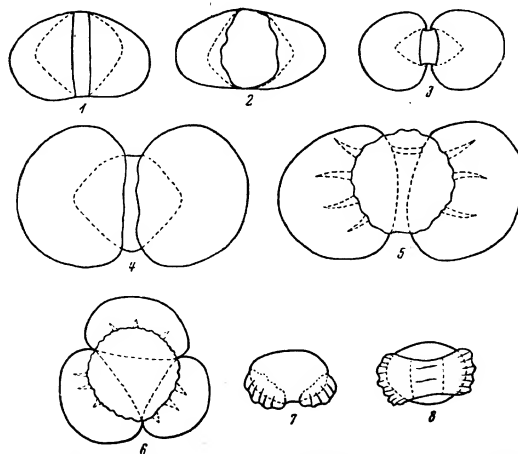
1, 2 — полярная проекция; 3, 4 — боковая проекция; а — общая длина зерна; б — ширина тела; в — высота тела; г — ширина воздушного мешка (диаметр); е — высота воздушного мешка; ж — ширина (толщина) экзины тела — высота гребня; з — расстояние между мешками в месте их крепления к телу

Разумеется, измерения имеют значение только в случае, если пыльцевое зерно не деформировано, не смято и не разорвано. Замеры производились при строго полярном или строго боковом положении зерна, в зависимости от того, какие элементы его требовалось измерить (см. фиг. 17). Так как описание пылинки велось по глицериновым препаратам, т. е. в жидкой среде, то можно было расположить пыльцевые зерна в нужном положении при помощи легкого постукивания карандашом или препаровальной иглой по поверхности покровного стекла.

Все описанные в настоящей работе пыльцевые зерна Podocarpaceae не имели ясно выраженной зародышевой борозды.

По форме и очертанию все выделенные нами виды родов *Podocarpus* и *Dacrydium* можно разбить на следующие группы (фиг. 18):

1. Пыльцевые зерна с округло-ромбовидным очертанием тела в полярной проекции, с двумя воздушными мешками, прикрепленными к телу широкими основаниями на его брюшной части. Границы прикрепления мешков к телу проецируются либо в виде двух параллельных линий, либо в виде двух кривых, составляющих дуги эллипса.



Фиг. 18. Схема очертания различных видов пыльцевых зерен сем. Podocarpaceae (роды *Podocarpus* и *Dacrydium*).

1, 2 — пыльцевые зерна с округлым телом ромбовидального очертания и с двумя воздушными мешками, прикрепленными широкими основаниями (полярная проекция); 3, 4, 5 — пыльцевые зерна с округлым телом и ромбовидным очертанием в полярной проекции, с двумя воздушными мешками, диаметр которых превышает высоту тела; мешки прикреплены узкими основаниями; 6 — пыльцевое зерно с округлым телом и тремя воздушными мешками (полярная проекция); 7 — пыльцевое зерно с правильно эллипсовидальным телом и двумя воздушными мешками, диаметр которых меньше высоты тела (боковая проекция); 8 — то же в полярной проекции.

Высота тела и диаметр мешков приблизительно равны. В полярной проекции (когда пыльцевое зерно обращено к наблюдателю спинной или брюшной стороной¹⁾ линии очертания тела и мешков не образуют угла (фиг. 18, 1, 2). Размер пыльцевых зерен этого типа от 50 до 80 м. Пыльцевые зерна имеют сходство с пылью современного вида *Podocarpus Selowii* Klotzsch.

2. Пыльцевые зерна с округлым телом, несколько сдвинутым по оси, перпендикулярной к полярной, и с ромбовидным очертанием в боковой

¹ Брюшная сторона, по Вудхаузу, наружная, по Козо-Поляискому, — дистальная (внешняя) по отношению к положению микроспоры в тетраде. Спинная сторона, по Вудхаузу, внутренняя, по Козо-Поляискому, — проксимальная (внутренняя) по отношению к положению микроспоры в тетраде.

проекции. Воздушных мешков два, диаметр их значительно превышает высоту тела. Мешки прикрепляются суженными основаниями к боковым частям тела и сильно сдвинуты один к другому. Внутренняя линия прикрепления воздушных мешков на брюшной части тела прощупывается в виде двух параллельных прямых. Внешняя линия очертания воздушных мешков образует с линией очертания тела значительный угол, приближающийся к прямому. Сетка на мешках четкая и крупная. Поверхность тела мелкобугорчатая или неравномерно крупнобугорчатая. В некоторых случаях поверхность мешков собрана в радиально расположенные складки, отходящие от места прикрепления мешков. Величина (общая длина) пыльцевых зерен в зависимости от их видовой принадлежности варьирует от 50 до 150 μ . Пыльцевые зерна этого типа имеют сходство с пыльцой *Podocarpus Nageia* R. В г., но в большинстве случаев значительно крупнее их (фиг. 18, 3, 4, 5).

3. Пыльцевые зерна с округлым телом и с тремя воздушными мешками, прикрепленными с брюшной поверхности тела. Величина мешков равна или несколько превышает величину тела. Очертание тела — почти правильная окружность, очертания воздушных мешков также округлы. Сетка на мешках мелкая (4—5 μ), поверхность спинной части тела неравномерно бугорчатая. Размеры тела 45—47 μ (см. фиг. 18, 6). К этому типу зерен относятся *Podocarpus dacrydioides*, описанный Эрдтманом по коллекционным материалам из Новой Зеландии (Erdtman, 1943, табл. XXV, фиг. 429).

4. Пыльцевые зерна с правильно эллипсоидальным телом. Мешки прикреплены суженным основанием к боковым частям тела и сильно сдвинуты к брюшной части его. В полярной проекции прекрасно видна внутренняя граница прикрепления воздушных мешков, которая прощупывается в виде двух параллельных линий, близко расположенных одна к другой.

Диаметр мешков несколько превышает высоту тела. Основными морфологическими признаками пыльцы этого типа являются крупная сетка мешков и сборчатая складчатость их экзины. Складки расположены радиально. Кроме того, этот тип зерен выделяется своей четкой и рельефной скульптурой экзины тела, которая представляет собой морщинистоподобные выпосты на его поверхности. Скульптура тела обуславливает его волнистый контур. Величина пыльцевых зерен от 40 до 80 или до 90 μ . Схематически зерна изображены на фиг. 18, 7 и 8.

У мелких зерен этого типа мешки значительно меньшего размера, чем тело. Камеры мешков не целиком заполнены воздухом; несколько обвисают, собираясь в складки и морщины. В проекции воздушные мешки кажутся свисающими в виде бахромок, обычно прозрачной и слабо окрашенной. К этому типу зерен относится пыльца современного рода *Dacrydium* S o l a n d.

Сетчатая структура экзины мешков, прощупывающаяся на их поверхности в виде более или менее четкого сетчатого рисунка, не отражается на строении поверхности их, так как представляет собой шнуровидные утолщения экзины на внутренней стороне (Монозон-Смолина, 1949).

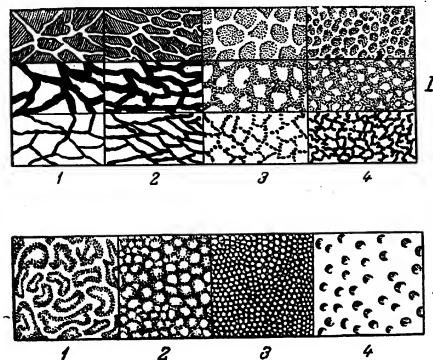
Воздушным мешкам пыльцы *Podocarpaceae* присуща сетка двух типов: четкая, крупная, обычно с продольно вытянутыми ячейками (фиг. 19, 1, 2); менее четкая, часто трудно уловимая, с ячейками различной конфигурации (фиг. 19, 3, 4).

Кроме того, при описании пыльцевых зерен иногда встречаются промежуточные и комбинированные типы сеток.

Скульптура поверхности тела пыльцы хвойных с воздушными мешками обуславливается характером строения одного или двух верхних слоев экзины, облегающей его. Тело пыльцы *Podocarpaceae* обычно покрыто двумя слоями экзины, несколько более толстой на спинной поверхности и более тонкой на брюшной стороне. Характер складок экзины, смятый,

бугорчатости или ямчатости является также диагностическим признаком при определении видов пыльцы и всегда выдерживается одинаково у представителей одних и тех же видов.

Пыльца *Podocarpaceae*, встречаемая мною в меловых, палеогеновых и неогеновых отложениях Северного Приаралья и Павлодарского Прииртышья, не отличается большим многообразием. Скульптура ее поверхности в основном может быть трех типов: мраморовидно-складчатая (фиг. 19, 1, 2), бугорчатая (фиг. 19, 3, 4), мелкоямчатая (фиг. 19, 1, 4).



Фиг. 19. Строение различных типов сетки воздушных мешков и скульптур поверхности тела пыльцы ископаемых видов сем. *Podocarpaceae*. I — строение сетки воздушных мешков: 1 — сетка четкая с неравными, беспорядочно расположенными или продольно вытянутыми ячейками различной величины и различных очертаний; 2 — сетка четкая с неравными, обычно крупными ячейками, вытянутыми продольно от линии прикрепления мешков к их периферии; 3 — сетка крупная, более или менее четкая, или прерывистая, с толстыми, изгибающимися рельефными линиями. Очертание ячеек неправильно-округлое; 4 — сетка мелкая, прерывистая, с неправильными и разнообразными очертаниями ячеек, часто изогнутыми из-за того, что линии, составляющие сетку, прерываются. II — скульптура поверхности тела: 1 — мраморовидно-складчатая; 2 — бугорчатая; 3 — мелкобугорчатая; 4 — мелкоямчатая.

В общем можно прийти к выводу, что среди всего разнообразия форм ископаемой пыльцы сем. *Podocarpaceae*, относимой в основном к родам *Podocarpus* и *Dacrydium*, выделяются следующие характерные особенности, позволяющие одновременно отличать ее от пыльцы сем. *Pinaceae*:

- 1) диаметр воздушных мешков обычно превосходит высоту тела; исключением является род *Dacrydium*, пыльца которого не имеет аналогов среди сем. *Pinaceae*;
- 2) мешки сильно сдвинуты к брюшной стороне тела;
- 3) мешки в большинстве случаев несколько собраны в складки, радиально расходящиеся от центра к периферии;
- 4) линия прикрепления мешков четко выражена на брюшной стороне зерна, тесно сдвинуты и представляют собой две параллельные линии или овал с вытянутыми вершинами;

- 5) сетка мешков четкая, крупная и процирирующаяся в виде двойных линий, с ячейками, обычно вытянутыми продольно, или нечеткая, прерывистая и мелкая;
- 6) скульптура экзаны тела мраморовидно-складчатая, или неравномерно бугорчатая, или мелкоямчатая.

Род *Podocarpus* L. Herit. — Ногоплодник

Пыльцевые зерна относятся по морфологическим признакам к третьей группе (фиг. 16, III). Тело округло-ромбoidalное, мешки крупные, плотно надвинутые на тело с брюшной стороны, прикреплены к телу широкими или узкими основаниями. Внутренние границы прикрепления воздушных мешков близко сходятся и процирируются в виде двух параллельных прямых. Экзана тела бугорчатая, сетка на мешках четкая, с продольно вытянутыми ячейками.

Ископаемая пыльца *Podocarpaceae* (род *Podocarpus*) выделена С. Н. Наумовой (1939) в отдельную подгруппу *Platysaccus* из группы хвойных с воздушными мешками — *Saccata*.

Podocarpus sellowiformis sp. nov. (pollen)

Табл. II, рис. 1
Препараты № 188 $\frac{H}{K}$ и 170 $\frac{H}{K}$

Г о л о т и п: Павлодарское Прииртышье, скв. 1, 2; слюдяные глины с растительными остатками подглауконитовой свиты, верхний мел (препарат № 188 $\frac{H}{K}$).

Длина зерна 50—70 м, высота тела около 35 м, ширина воздушных мешков 32—36 м, высота мешков около 35 м.

Тело округло-ромбoidalное, очертание в боковой проекции — ромбическое. Мешки прикреплены к брюшной поверхности зерна, плотно охватывают поверхность тела широкими основаниями. Линии прикрепления воздушных мешков на брюшной стороне, при полярном положении, процирируются в виде двух четких параллельных линий с небольшим промежутком между ними.

Экзана тела двуслойная, тонкая, оба слоя на спинной и боковых сторонах зерна одинаковой толщины. Граница между нижним и верхним слоем экзаны просматривается с большим трудом. На некоторых экземплярах наружный слой экзаны, более толстый на спинной части тела и более тонкий на брюшной и боковых сторонах его, постепенно переходит в экзину мешков. Поверхность бугорчатая, из плотно расположенных бугорков. Контур тела слегка волнистый. Сетка на мешках четкая, крупно-продольно-ячеистая.

Пыльцевое зерно по морфологическим признакам довольно близко к *Podocarpus sellowii* Klotzsch., приведенному в работе В. В. Зауер (1950), но не имеет четко выраженного шита. У пыльцы *Podocarpus sellowiformis* выделить границы шита не удалось.

По общим морфологическим признакам пыльца *Podocarpus sellowiformis* несколько приближается к форме, описанной Н. А. Болховитиной как *Podocarpus gracilentia* из комплекса спор и пыльцы верхне- и средне-меловых отложений Казахстана и Центральной Сибири (1953, стр. 77, табл. XI, фиг. 15).

От пыльцы сем. *Pinaceae* описанный вид отличается ромбовидным очертанием тела в боковой проекции, плотной насадкой воздушных мешков на тело зерна и отсутствием четкой границы между утолщенным слоем экзаны спинной части зерна и более тонкой на боковых и брюшных сторонах его.

В тех же отложениях встречается пыльца того же вида, но значительно худшей сохранности (табл. II, рис. 2; препараты № 170 и 186).

Границы прикрепления воздушных мешков у этой формы процирируются прямыми параллельными линиями, расстояние между которыми достигает 12 м.

Местонахождение: см. голотип.

Распространение: Северный Казахстан, мел — палеоген — олигоцен; Северное Приаралье, нижний палеоген.

В настоящее время растения из сем. *Podocarpaceae* приурочены к тропическим и субтропическим зонам Америки, Африки и Австралии.

Podocarpus andiniiformis sp. nov. (pollen)

Табл. II, рис. 3—7
Препараты № 170 $\frac{H}{K}$, 161 $\frac{H}{K}$, 364 $\frac{3}{K}$

Г о л о т и п: Павлодарское Прииртышье, скв. 1, 2; слюдяные глины датского (?) яруса верхнего мела (препарат № 170 $\frac{H}{K}$).

Пыльца имеет близкое сходство со следующими формами, известными по литературным данным:

1934. *Pinus edulis* Potonié. Zur Mikrobotanik der Kohlen und ihrer Verwandten, zur Morphologie der fossilen Pollen und Sporen, Taf. 2, Fig. 4.
1935. *Pinus haploxyton* — Typ. Rudolph. Mikrofossillische Untersuchung tertiärer Ablagerungen im Nördlichen Böhmen, Taf. IV, Fig. 1, 2.
1940. *Pinus haploxyton* — Typ. Thiergart. Die Mikropaläontologie als Pollenanalyse im Dienst der Braunkohlenforschung. Schrift., Taf. IV, Fig. 14; Taf. VII, Fig. 2.
1949. *Pollenites cf. alatus* R. ob. Potonié-Thiergart. Der Stratigraphische Wert mesozoischer Pollen und Sporen, Taf. II, Fig. 20, 22.
1949. *Pinus haploxyton* — Typ. Rudolph Thiergart. Там же, табл. III, фиг. 17, 18, 41.
1950. Coniferpollen verschiedener Arten von Podocarpaceen — Typ. Reissinger. Die «Pollenanalyse» ausgedehnt auf alle Sedimentgesteine der geologischen Vergangenheit, Taf. XV, Fig. 12.
1950. Podocarpaceepollen Reissinger. Там же, табл. XVIII, фиг. 38.
1950. Cf. *Podocarpus* sp. Kirchheim. Mikrofossilen aus Salzablagungen des Tertiärs, Taf. XX.
1953. *Podocarpus cretaceae* Наумова, Болховитина. Споры-пыльцевая характеристика меловых отложений центральных областей СССР, табл. XI, фиг. 10, стр. 76.
1953. *Pinus*, подрод *Haploxyton*. Зависимая. Материалы к истории флоры и растительности палеогена Северного Казахстана в районе Павлодарского Прииртышья, табл. V, рис. 20.

Длина зерна около 73 м; высота тела 45—48 м, ширина тела равна его высоте; ширина воздушных мешков около 50 м, высота — 35—38 м; расстояние между линиями прикрепления мешков 6—9 м.

Тело сферoidalное, очертание в боковой проекции несколько угловатое — приближается к ромбу. Общая толщина экзаны около 4 м. Экзана тела двуслойная; слои, как правило, равной толщины, но на некоторых экземплярах внешний слой несколько тоньше внутреннего. На спинной и боковых сторонах общая толщина оболочки несколько больше, чем на брюшной. Шит неясно выражен. Поверхность тела неравномерно бугорчатая, скульптура шита трудно различима, на брюшной стороне поверхность мелко- и редкобугорчатая, бугорчатость процирируется (при высоком положении тубуса) в виде мелко- и редкоточечного рисунка.

Форма мешков приближается к сферoidalной. У большинства экземпляров мешки несколько сдвинуты по высоте и оттянуты по направлению от брюшной поверхности. Мешки прикреплены или широким, или несколько суженным основанием. Граница прикрепления мешков в полярной проекции (мешками кверху) четко выделяется в виде двух параллельных

линий или правильного овала. Сетка на периферийных поверхностях мешков крупная, четкая и у некоторых экземпляров состоит из двойных линий, рельефно выделяясь при обычном увеличении. Форма ячеек сетки округло-прямоугольная. Величина ячеек резко уменьшается к внутренней поверхности мешков и становится мелкой, до точечной, в месте прикрепления мешков к телу.

По морфологическим признакам (форма, размеры, характер сетки мешков и пр.) описанный вид чрезвычайно близок к пыльце *Podocarpus spicata* (*Podocarpus andinus*) Роерр, изученной по гербарному материалу Эрдмана (Erdman, 1943, табл. 25, фиг. 430). Величина пыльцы современного вида *Podocarpus andinus* варьирует в пределах от 56 до 70 м, причем крупные зерна встречаются чаще, чем мелкие.

От *Podocarpus* aff. *Sellowii* зерно *Podocarpus andinus* отличается большей округлостью мешков, наличием более ясной сетки на них и более частой встречаемостью зерен с мешками, прикрепленными к телу несколько суженным основанием.

Местонахождение: см. голотип.

Распространение: пыльца *Podocarpus andiniiformis* (или морфологически подобная ей) отмечена различными авторами в отложениях среднего и верхнего мела Западной Европы (Германии, Дании), Сибири, Казахстана, а также в третичных отложениях (от эоцена до нижних горизонтов миоцена включительно) в Казахстане, на Южном Урале, в Башкирии, в Приаралье, в Кызылском районе, на Северном Кавказе, в Среднем и Нижнем Поволжье, на Нижнем Дону и в Прикаспии. В Припиртышье отмечена автором в чеганских глинах (нижний олигоцен) и в палеоцен-эоценовых отложениях. В последнее время пыльца, подобная описанной выше, встречена в верхнемеловых отложениях Приднестровья.

Родина *Podocarpus andinus* Роерр. [*P. spicata* Роерр., *Nageia andinus*, *Podocarpus valdiviana* (Nelson) Senilis] — Чилийские Анды. Растение является одним из наиболее устойчивых видов из семейства ногоплодных.

Podocarpus nageiaformis sp. nov. (pollen)

Табл. II, рис. 8—11

Препарат № 191

Голотип: Павлодарское Припиртышье, пос. Парамоновка, скв. 1; чеганские глины с зубами акул (нижний олигоцен).

Пыльца морфологически близка к следующим формам, известным по литературным данным:

1939. Класс *Aporosa*, группа *Saccata*, подгруппа *Platynococcus* Наумова. Споры и пыльца углей СССР, стр. 355.
1940. Cf. *Podocarpus* Thiergart. Die Micropaläontologie als Pollenanalyse im Dienst der Braunkohlenforschung, Schrift..., Taf. IV, Fig. 9.
1943. *Pollenites macroalatus* Stockmans. Les lignites néoènes de Mol (Belgique), tab. 2, fig. 11.
1949. Cf. *Podocarpus* Thiergart. Der stratigraphische Wert mesozoischer Pollen und Sporen, Taf. IV—V, Fig. 40.
1950. Coniferpollen verschiedener Arten von Podocarpaceen.—Typ. Reissinger. Die «Pollenanalyse» ausgedehnt auf alle Sedimentgesteine der geologischen Vergangenheit, Taf. XV, Fig. 11.
1950. *Podocarpus* sp. Зауер. Морфологическое описание пыльцы Gymnospermae. В кн. «Пыльцевой анализ», табл. II, фиг. 15 и 16.
1953. *Podocarpus zaklajensis*. Описание некоторых видов пыльцы и спор, выделенных из третичных отложений Пасековского карьера Воронежской области, стр. 104, табл. I, фиг. 4.
1953. *Podocarpus kairarensis* Болховитина. (*Platynococcus kairarensis* Болховитина). Спорово-пыльцевая характеристика меловых отложений центральных областей СССР, стр. 76, табл. XI, фиг. 13.

Общая длина зерна 75—82 м, средняя — 80 м; ширина — 35 м; ширина воздушных мешков (около 38 м) равна его высоте. Встречаются мелкие

экземпляры, размеры которых близки к размерам пыльцы современного вида *Podocarpus Nageia* R. В г.

Тело зерна округло-ромбическое. На спинной и боковых частях эскиза двуслойная, а на брюшной — однослойная. Эскиза на спинной стороне образует утолщение, подобное щиту у пыльцы *Pinassea*. Внешний слой эскиза значительно тоньше внутреннего и не имеет структуры. Внутренний слой эскиза имеет складчато-столбчатую структуру, которая выражается на спинной и боковой поверхностях тела в виде бугристости. На границе, которую можно мысленно провести между спинной и брюшной поверхностями тела, внешний слой эскиза прекращается, образуя едва заметный узкий шнуровидный валик, различимый только в боковой проекции. Внутренний слой эскиза к этой границе несколько утончается и теряет структурность.

Воздушные мешки имеют сфероидальную форму. Диаметр (ширина) мешков превышает диаметр (ширину и высоту) тела. К телу мешки прикреплены сильно суженными основаниями и значительно сдвинуты к брюшной стороне тела. Внутренняя граница прикрепления мешков с брюшной стороны пронизывается в виде двух параллельных или слегка изогнутых в форме овала линий, расстояние между которыми равно 5—15 м.

Сетка на воздушных мешках мелкая и у большинства экземпляров четкая, с округлыми ячейками, величина которых не превышает 3,2 м. Тяжи сетки тонкие и ровные, и при высоком поднятии тубуса микроскопа, при обычном увеличении, кажутся темными (см. табл. II, рис. 11). Ячейки сетки по всей поверхности мешков равномерны и уменьшаются только в области прикрепления мешков к телу.

Угол в месте пересечения контура мешков и тела приближается к прямому. У некоторых экземпляров мешки несколько вытянуты по длине, но можно допустить, что это результат деформации при изготовлении препарата (погружение в глицерин-желатиновую среду).

При любом положении зерна, в полярной или боковой проекции, контуры тела ясно просвечивают сквозь нежную и прозрачную ткань воздушных мешков.

У некоторых экземпляров пыльцевых зерен эскиза на спинной поверхности несколько сминается в продольные складки. У некоторых экземпляров такие же складки образуются и на брюшной части. Последнее обуславливает более темную окраску вдоль длинной оси тела.

Местонахождение: см. голотип.

Распространение: пыльца типа *Podocarpus nageiaformis* имеет довольно широкое распространение как по вертикали (от верхней юры до сармата), так и в широтном направлении. В литературе пыльца *Podocarpus* под различными названиями (см. синонимы) упоминается в верхней юре Башкирского Приуралья, в меловых отложениях Сибирской платформы, Казахстана и Западной Европы, в палеоцене Среднего Поволжья, эоцене и олигоцене Дальнего Востока (Эльген), Казахстана, Прикаспия, Приаралья, Урала, среднего и нижнего течения Волги, нижнего Дона, Приазовья, Северного Казахстана, Западной Украины и Западной Европы, в сарматских отложениях низовьев Днепра, Северного Кавказа и Западного Прикаспия.

Такое широкое распространение и устойчивость описанной формы позволяют полагать, что растение, продуцировавшее эту пыльцу, обладало широким ареалом и широкой экологической амплитудой. Возможно, это растение входило в состав полихронных флор А. Н. Криштофовича (1946), которые особенно долго существовали на обширных пространствах материковой суши с конца мезозоя. Впоследствии, как полагал А. Н. Криштофович, такие полихронные флоры конца мезозоя положили начало со-

временной растительности земного шара (в различных его ботанико-географических провинциях.)

Современное распространение *Podocarpus Nageia* R. Br. (*P. Nagei* Pilg.) ограничено горными районами Южной Японии и Южного Китая. Устойчивость против низких температур у *P. Nageia* несколько ниже, чем у *P. andinus* Poir., что и обуславливает его узкий современный ареал.

Podocarpites kazakhstanica sp. nov. (pollen)

Табл. II, рис. 12—15

Препарат № 255 $\frac{3}{K}$

Голотип: Павлодарское Прииртышье, оз. Кемир-Туз, лигнитовые глины второй свиты континентальных отложений олигоцена (средний олигоцен).

Пыльца *Podocarpites kazakhstanica* sp. nov. относится к типу зерен сем. Podocarpaceae с резко ограниченным телом и мешками, превышающими своими размерами величину тела (фиг. 18, 3, 4, 5). Подобные формы пыльцевых зерен, но не тождественные им, отмечались в значительно более древних отложениях, чем третичные.

Рейссингер (Reissinger, 1950) описывает форму, близкую к нашей, под названием «Pollen Podocarpaceae — Turus (Reissinger)».

С. Н. Наумова (1939) пыльцу, подобную *Podocarpites kazakhstanica*, в числе прочих Podocarpaceae относит к группе *Saccata*.

В. С. Маливкиной описана и изображена пыльца значительно более крупных размеров, но по формам тела и воздушных мешков имеющая большое сходство с пылью *Podocarpites kazakhstanica*. Форму эту по морфологической номенклатуре В. С. Маливкина назвала *Dipterella tricosca* cf. *typica* (1949, табл. 3, фиг. 7).

Однако, как это будет видно из приводимого ниже описания, выделенный нами вид из третичных отложений обладает достаточно характерными морфологическими особенностями, чтобы отнести его к роду *Podocarpus*.

Общая длина зерна 125—128 м; ширина тела, около 67 м, равна его высоте; высота воздушных мешков около 70 м, ширина — около 80 м.

Форма тела близка к сфероидальной. Очертание в полярной проекции ромбоидально-округлое.

Экзина, покрывающая тело, двуслойная; у большинства зерен двуслойность экзины просматривается слабо. Структура экзины столбчатая, что обуславливает наличие поперечной штриховатости спинной области и бугорчатую поверхность зерна. На спинной поверхности зерна экзина толще, чем на брюшной. Границы шита не удалось обнаружить, так как пыльцевые зерна в большинстве случаев ложатся в полярной проекции. Наличие же и границы шита, если он действительно ясно выражен, обычно просматриваются лишь при боковом положении зерна.

Воздушные мешки почти правильно сфероидальные. Ширина их превышает ширину тела. Мешки прикреплены к телу суженным основанием и сдвинуты на его брюшную сторону. Границы прикрепления мешков к телу с брюшной стороны процируются в виде двух дугообразных линий, наибольшее расстояние между которыми достигает 15 м. У большинства зерен концы этих линий сходятся и тогда внутренняя линия границ прикрепления воздушных мешков процируется в виде овала.

Сетка на воздушных мешках мелкая, прерывистая, неясная. Ячейки сетки заметно мельчают в месте прикрепления мешков на брюшной стороне. На спинной поверхности, ближе к месту прикрепления мешков,

сетка имеет такой же мелкий, неясный рисунок, как и вся поверхность мешков.

Линии очертания воздушных мешков и тела при пересечении образуют угол, близкий к прямому. Контур тела — неровные, иногда фестончатые, прекрасно просматриваются сквозь прозрачную ткань воздушных мешков.

Пыльца *Podocarpites kazakhstanica* в составе олигоценового комплекса встречена автором впервые. Все формы, перечисленные выше в числе морфологически близких, относятся к формам, выделенным из более древних отложений.

Местонахождение: см. голотип.

Распространение: как упоминалось выше, пыльца, весьма близкая по морфологическим признакам к описанному виду, отмечена еще в спорово-пыльцевых спектрах юрского и мелового комплексов Сибири, Казахстана и Урала. В Павлодарском Прииртышье известны единичные находки в верхнем мелу, эоцене и нижнем олигоцене. В Северном Приаралье основные находки приурочены к среднему олигоцену. Распространение пыльцы *Podocarpites kazakhstanica* в третичных отложениях прослеживается впервые. Можно полагать, что производившее пыльцу растение, было в палеогене одной из реликтовых флор мезозоя.

Podocarpites gigantea sp. nov. (pollen)

Табл. III, рис. 1—4

Препарат № 255 $\frac{3}{K}$

Голотип: Павлодарское Прииртышье, обн. 6, песчано-глинистые отложения четвертой свиты континентального олигоцена (верхний олигоцен).

Общая длина зерна 112—120 м; ширина тела 65—75 м, высота тела около 80 м, ширина воздушных мешков около 85 м, высота 65—70 м.

Тело сфероидальное, округлое в очертании. Экзина тела толстая, значительно толще экзины мешков; двуслойность экзины при увеличении в 400 раз трудно различима. На спинной части тела экзина имеет столбчатую структуру, что обуславливает ее поперечную штриховатость. На спинной же части тела структурные элементы выделяются в виде тесно расположенных бугорков с вдавленными вершинами, вследствие чего поверхность зерна имеет мелкоямчатую скульптуру.

На брюшной стороне поверхность тела почти гладкая или плоскобугорчатая, что различимо лишь на тех препаратах, у которых воздушные мешки не близко сдвинуты к центру.

Воздушные мешки почти правильно сфероидальные. Сетка на мешках четкая, двойная. Крупная основная сетка хорошо выступает в виде рельефных тяжей с угловатыми ячейками; промежуточная сетка мелкая, с неравномерными ячейками. В местах прикрепления мешков к телу сетка становится мельче.

Расстояние между местами прикрепления мешков на брюшной стороне не более 3—5 м; чаще мешки смыкаются. Границы прикрепления мешков в полярной проекции обычно процируются в виде двух параллельных прямых или слегка расходящихся линий.

По форме и очертанию тела пыльца *Podocarpites gigantea* очень близка к *P. kazakhstanica*. Отличиями первого вида являются: более правильное очертание, более толстая экзина, яснее выраженная скульптура поверхности тела, более четко выраженная сетка на мешках, которая у *P. gigantea* всегда имеет двойной рисунок.

Наличием двойной сетки, размером и формой тела *P. gigantea* очень похожа на пыльцу современного рода *Abies* Hill., но отличается от по-

следяго отсутствием гребня и правильным округлым очертанием воздушных мешков; у пыльцы *Abies Hill* мешки несколько вытянуты по высоте, а тело снабжено широким, ясно выраженным гребнем с мелкофестончатым контуром.

Местонахождение: см. голотип.

Распространение: Павлодарское Припиртышье, нижние горизонты палеогена — олигоцен. Северное Припиртышье, эоцен — олигоцен. Основная масса находок связана с отложениями эоцена и нижнего олигоцена.

Podocarpus aff. *dacrydioides* A. Rich.

Табл. III, рис. 7

Препарат № 331 $\frac{3}{K}$

Пыльцевое зерно, в отличие от предыдущих видов, имеет три воздушных мешка. Общий диаметр зерна, включая тело и мешки, при строго полярной проекции 80—85 μ , диаметр тела около 45 μ , ширина воздушных мешков 30—40 μ , высота около 30 μ .

Сетка на воздушных мешках мелкая, с толстыми тяжами; ячейки сетки радиально вытянуты. Поверхность тела мелкобугорчатая, на спинной стороне смята в произвольные складки.

Пыльца описанной формы почти тождественна пыльце современного вида *Podocarpus dacrydioides* A. Rich., описанного Эрдтманом (1943, табл. XXV, фиг. 429).

Местонахождение: Павлодарское Припиртышье, р. Кара-Су, континентальные отложения среднего олигоцена.

Распространение: пыльца *Podocarpus* aff. *dacrydioides* отмечена в верхнеюрских отложениях близ г. Тюмени и в палеогеновых отложениях юга Европейской части СССР (единичные находки), в олигоценовых спектрах Павлодарского Припиртышья встречается впервые.

Род *Dacrydium* Soland. — Дакридиум

Пыльца *Dacrydium Soland* относится к типу пыльцевых зерен (фиг. 18, 7, 8), для которых характерны мелкие размеры (до 50 μ) и особое строение воздушных мешков: мелких и не вздутых, а морщинистых и сбранных в складки.

Dacrydium elatumiformis sp. nov. (pollen)

Табл. III, рис. 8—12

Препараты № 170 $\frac{H}{K}$ и 185 $\frac{H}{K}$

Голотип: Павлодарское Припиртышье, г. Павлодар, скв. 1, слюдяные глины датского (?) яруса (препарат № 170 $\frac{H}{K}$).

Длина зерна около 50 μ , ширина около 35 μ , высота около 35 μ ; ширина мешков около 30 μ .

Тело эллипсоидальное, в боковой проекции — овального очертания. Экзина тела тонкая, однослойная, с зернистой структурой. Поверхность тела на спинной стороне мелко- и редкобугорчатая. Воздушные мешки небольших размеров, округлые, несколько сплюснутые и чаще всего, из-за смятия, имеют неправильные очертания; прикрепляются они к телу суженным основанием и сильно сдвинуты на брюшную сторону. Граница между мешками и телом не всегда ясно выражена. Экзина между мешками

на брюшной стороне часто бывает смята в продольные складки. Контур тела и воздушных мешков неровный.

Пыльца *Dacrydium elatumiformis* имеет большое сходство с пыльцой современного вида *D. elatum* Wall., описанного В. В. Зауер (1950) и Эрдтманом (1943), отличающаяся от нее лишь более четко выраженными воздушными мешками. Форма мешков у современного вида *D. elatum* несколько напоминает форму мешков пыльцы *Cedrus*. В то же время пыльца *D. elatumiformis* имеет некоторое сходство с пыльцой современного вида *D. Francini*, отличающаяся от него менее четкой границей прикрепления воздушных мешков и значительно более тонкой экзиной тела.

Местонахождение: см. голотип.

Распространение: пыльца *Dacrydium* отмечалась в третичных и меловых отложениях СССР в виде единичных находок. Автором найдена в верхнемеловых и палеогеновых отложениях Северного Казахстана, в палеогене Северного Кавказа (фораминиферные слои) и в палеоцене средней Волги.

Современное распространение рода *Dacrydium* — о-в Тасмания, тропики Австралии, Новой Зеландии. Типичное хвойное горных районов влажной субтропической зоны.

СЕМ. ARAUCARIACEAE — АРАУКАРИЕВЫЕ

Семейство Araucariaceae — древнейшее из класса голосеменных и имеет, по-видимому, южное происхождение. Растительные остатки *Araucarites* отмечаются еще с нижнего карбона.

С. Н. Наумовой (1939, табл. I) пыльцевые зерна, подобные *Araucaria*, были выделены в особую группу под рубрикой: «пыльца из группы *Infralata*, подгруппа *Psophosphaera*».

Остатки *Araucaria* встречаются и в пермских отложениях, но наибольшего распространения это семейство достигло в триасе. В юре и в мелу находят разнообразных видов Araucariaceae известны в Сибири и Казахстане. В третичных отложениях сохранились, по-видимому, только два рода Araucariaceae, с небольшим количеством видов. Отдельные находки отпечатков *Araucaria* отмечались для палеоцена и олигоцена Украины.

В настоящее время араукариевые имеют ограниченное распространение в Австралии, Южной Америке, на островах Полинезии и в Новой Гвинее. Здесь они составляют светлые тропические леса паркового типа, без густого подлеска. В основном все представители этого семейства имеют ксерофильный облик (в особенности это относится к роду *Araucaria* Juss.) и обладают кроной с вечнозеленой листвой.

Пыльца растений сем. Araucariaceae встречается автором в меловых и нижнетретичных отложениях Казахстана и Припиртышья. Пыльцевые зерна Araucariaceae относятся к типу одноклеточных, сферидальных, лишенных воздушных мешков, однобороздных с двуслойной скульптурной экзиной.

В палеогеновых отложениях изучаемого района выделяются два вида пыльцы Araucariaceae, по морфологическим признакам близкие к пыльце рода *Araucaria* Juss. и *Agathis* Salisb.

Araucaria elegans sp. nov. (pollen)

Табл. III, рис. 13

Препараты № 193 $\frac{H}{K}$, 165 $\frac{H}{K}$ и 182 $\frac{H}{K}$

Голотип: Павлодарское Припиртышье, пос. Парамоновка, скв. 2, опокые глины среднего — верхнего эоцена (препарат № 182 $\frac{H}{K}$).

Формы, морфологически близкие, известны по литературным данным: 1953. *Araucaria incisa* Болховитина. Спорово-пыльцевая характеристика меловых отложений центральных областей СССР, стр. 67, табл. X, фиг. 24—26.

Пыльцевое зерно сферондальное, округлое в очертании, одноборозд-нос. Диаметр зерна от 46 до 60 μ , средний — около 50 μ .

Зародышевая борозда меридиональная, не доходит до полюсов. Поверхность борозды гладкая, затянутая тонкой бороздной мембраной. Экзина образует ластообразный выступ над одним из краев борозды. Если пыльцевое зерно расположено сверху бороздой, то ластовидный выступ экзины процируется в виде кольцеобразного утолщения — валика. Экзина двуслойная, тонкая. Внутренний слой экзины толще внешнего и структура его неясна; внешний слой — тонкий с мелко- или крупном-чатой структурой. В проекции стенки ямок (лакун) выступают по краю зерна в виде шиповатых выростов, что придает контуру зерна ложноши-поватый вид.

Описываемая пыльца по морфологическим признакам сходна с пыльцой современного вида *Araucaria brasiliana* A. R. i. c. h., но несколько меньше ее по размерам (Зауер, 1950).

Местонахождение: см. голотип.

Распространение: в ископаемом состоянии встречается очень редко, возможно вследствие плохой сохранности. (В литературе присут-ствие пыльцы *Araucaria* в спорово-пыльцевых спектрах палеогена от-мечается очень редко.) Автором *Araucaria* найдена в отложениях бурой ситы (верхний эоцен), в глинах верхнего майкопа (средний олигоцен) Северного Кавказа; в опокидных глинах (эоцен) и в отложениях ниж-него олигодена Северного Казахстана.

В настоящее время род *Araucaria* распространен в Южной Америке, Австралии и на архипелагах южной части Тихого океана. *A. brasiliana* A. R. i. c. h. — светолюбивое ксерофитное растение, образует в южной уме-ренной зоне светлые леса со слабо выраженным подлеском (чаще всего *Ilex*). В Чили араукария распространена совместно с *Podocarpus*, *Liboced-rus*, *Saxegothea*.

Agathis ovataeformis sp. nov. (pollen)

Табл. III, рис. 14

Препарат № 2 Зя К

Голотип: Северное Припаралье, г. Тас-Аран, тасаранская свита, средний эоцен.

Пыльцевое зерно сферондальное, в очертании — правильная окру-жность. Диаметр зерна около 35 μ . Зародышевая борозда — меридиональ-ная, расположена далеко от полюсов. Экзина двуслойная; внутренний слой ее более толстый, чем внешний. Поверхность зерна мелкобугорчатая. Бугорчатые выросты представляют собой правильные полушария, распо-ложенные плотно одно к другому, что придает контуру зерна правиль-нофестончатые очертания. Высота бугорков 0,5—0,8 μ . Рисунок на поверх-ности зерна крупносетчатый. Экзина образует ластообразный выступ по одному из краев борозды. Если зерно расположено бороздой вверх, то ла-стообразный выступ процируется в виде дугообразного утолщения. Если же зерно лежит не бороздой вверх, а в любом другом положении, то борозда часто не видна за ластообразным выростом экзины.

С пыльцой современной *Agathis ovata* W a g b. ископаемый вид почти тождествен; лишь в единичных случаях встречаются расхождения в величине зерна.

112

От пыльцы *Araucaria J u s s.* описанный вид отличается меньшим раз-мером, более толстой экзиной, наличием бугорчатых выростов и более чет-ко выраженной бороздой.

Местонахождение: см. голотип.

Распространение: пыльца *Agathis (Dammar)* отмечена в юрских отложениях средней полосы СССР, в палеоцен-эоцене юга Евро-пейской части СССР, в эоцене и олигоцене Павлодарского Прииртышья, в отложениях среднего и верхнего эоцена и нижнего олигодена Северного Приаралья и в бурой свите Северного Кавказа. Также отмечено присут-ствие ее в виде единичных зерен в бучакских слоях (палеоцен-эоцен?) нижнего Дона.

СЕМ. PINACEAE — СОСНОВЫЕ

Третичные отложения (в особенности это относится к верхним отделам палеогена и к неогену) чрезвычайно богаты пыльцой растений из сем. Pi-насеае. В отличие от юрских и меловых хвойных, большинство родов, а в ряде случаев и видов их имеет весьма близкое родство с современными представителями флоры южных широт. Сем. Pinaceae в третичных отло-жениях Северного Казахстана и Приаралья представлено шестью родами (*Keteleeria*, *Abies*, *Tsuga*, *Picea*, *Pinus* и *Cedrus*), которые, в свою очередь, пред-ставлены большим числом видов. Род *Pinus* в кайнозое насчитывает до де-сяти видов. Как упоминалось ранее, голосеменные в настоящее время за-нимают весьма скромное место во флоре изучаемой территории. Сем. Pi-насеае, например, представлено всего двумя видами *Pinus*, одним видом *Picea*, одним видом *Larix* и двумя видами *Abies*. При этом основная масса видов приурочена к горным местообитаниям. Лишь один вид — *Pinus silbestrii* L. — обитает на северной окраине Казахстана, в равнинной его части.

Pinaceae на территории Казахстана и в Приаралье особенно разнооб-разно были представлены в середине олигодена, что, возможно, объяс-няется возобновлением общей аридизации климата, которая несколько при-остановилась в начале олигодена, и в связи с оживлением тектонических явлений. Ассоциации, в которых сочетались различные виды сосен, разви-лись, по-видимому, на участках суши с высокими отметками; в это же вре-мя влажные широколиственные леса заняли пониженные участки.

Если проследить последовательную эволюцию голосеменных на терри-тории Казахстана, то станет очевидным, что сем. Pinaceae представляет особый интерес и для стратиграфических построений и для палеофито-логических целей. К тому же пыльца Pinaceae в достаточной мере обла-дает характерными признаками для ее распознавания. Поэтому морфоло-гии пыльцы современных и ископаемых растений Pinaceae посвящено немало трудов, из которых следует отметить работы М. Х. Монозон-Смолиной (1949), В. В. Зауер (1950, 1954), Н. А. Болховитиной (1952, 1953) и И. С. Штана (1954).

Пыльца всех родов и видов сем. Pinaceae, за исключением *Larix* и *Tsuga*, состоит из центрального тела и двух воздушных мешков. Эта осо-бенность сближает пыльцу большинства видов Pinaceae с пыльцой Подо-саграсеае.

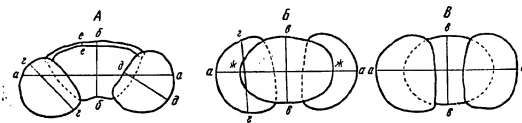
Пыльца Pinaceae, имеющая воздушные мешки (кроме *Cedrus*), обладает некоторыми общими характерными особенностями. В большинстве слу-чаев эта пыльца имеет достаточно хорошо выраженную зародышевую борозду на брюшной (дистальной) стороне тела и утолщенный слой экзи-ны, образующий так называемый «щит» на спинной (проксимальной) стороне. Воздушные мешки представляют собой разрастание экзины в виде полых камер, обычно формы, близкой к сферондальной. Расположены воздушные мешки в большинстве случаев по бокам тела.

8 Труды ГИН, вып. 6

113

Пыльца *Cedrus* не имеет резко ограниченного щита. Утолщенный слой экзигмы на спинной поверхности тела обычно непосредственно, без резких границ, переходит в ткань воздушных мешков, которые образованы во внутреннем слое экзигмы, а внешним. Воздушные мешки *Cedrus* не являются обособленными образованиями на теле пыльцевого зерна, а составляют с ним как бы единое целое.

При определении пыльцы *Pinaceae*, снабженной воздушными мешками, за основные диагностические признаки принимались: 1) общие размеры зерна и размеры его отдельных частей (центрального тела, воздушных мешков); 2) форма и очертание зерна и форма и очертание основных частей его; 3) структурные особенности отдельных частей зерна.



Фиг. 20. Основные элементы измерения пыльцевых зерен *Pinaceae*, имеющих воздушные мешки.

A — боковая проекция; B — полярная проекция при положении телом вверх; B' — полярная проекция при положении телом вниз; a — a' — общая длина пыльцевого зерна; b — b' — высота тела; c — c' — ширина тела; a'' — a''' — ширина мешков; b'' — b''' — высота мешков; c'' — c''' — высота гребня; ж — ж' — длина тела.

Так как форма и размеры отдельных частей пыльцевого зерна могут меняться в зависимости от его положения, то при определении ископаемых пыльнок хвойных все измерения и наблюдения производились либо в строго полярном положении зерна, либо в строго боковом. Направления, по которым велись основные измерения при определении видов, схематически изображены на фиг. 20¹.

Измерения велись при положении пыльцы в боковой проекции (A), в полярной проекции, спинкой вверх (B), и в полярной же проекции — воздушными мешками вверх (B'). К сожалению, не всегда удавалось одно и то же зерно замерить во всех трех позициях; в этих случаях замеры производились по нескольким зернам и затем брались крайние отклонения и средняя величина для каждого элемента замеров.

Почти для всех родов, пыльца которых снабжена воздушными мешками, удалось установить ряд таких устойчивых величин (размеров) отдельных элементов, которые могли быть приняты за диагностические эталоны. К сожалению, для пыльцы *Keteleeria*, из-за ее редкой встречаемости, устойчивого эталона размеров не выведено. Поэтому определения пыльцы *Keteleeria* велись по тем диагностическим признакам, которые даны в ключе В. В. Зауер (Пыльцевой анализ, 1950).

Весь комплекс диагностических признаков для определения видов и родов пыльцы хвойных с воздушными мешками, выделенных из кайнозойских отложений, сводится к следующим элементам:

1. Форма тела и его очертание (второе является функцией первого). Основные формы тела можно характеризовать как сфероидальные и эллипсоидальные; отклонения определяются рисунком очертаний тела в полярной или в боковой проекциях (фиг. 21).

¹ При микрофотографировании, которое делается с постоянных препаратов, не всегда удается найти пыльцевое зерно, расположенное в строго полярном или строго боковом положении, и поэтому размеры их на снимках могут несколько уклоняться от тех, которые указаны на основании измерений пыльцевого зерна в подвижной среде.

Сфероидальное тело может иметь следующие очертания:
а) округлое в полярной и боковой проекциях (*Pinus ponderosa*);
б) ромбовидно-округлое — в полярной проекции, трапециевидно-округлое — в боковой (*Pinus Gerardiana*).

Эллипсоидальное тело может иметь следующие очертания:
а) эллиптическое в полярной проекции (*Pinus taeda* L.);
б) угловато-эллиптическое в боковой проекции (*Cedrus pusilla* Zaue'r);
в) эллиптическое в полярной проекции и трапециевидное в боковой (*Abies Hill*);

| I. Сфероидальная форма тела | | II. Эллипсоидальная форма тела | |
|-----------------------------|---------|--------------------------------|-----------|
| Проекция: | | Проекция: | |
| полярная | боковая | боковая | полярная: |
| a | a' | b | b', e' |
| b | b' | c | c' |
| | | d | d' |
| | | e | e' |
| | | ж | ж' |
| | | з | з' |

Фиг. 21. Схематическое изображение очертания тела пыльцы с воздушными мешками у различных видов сосны

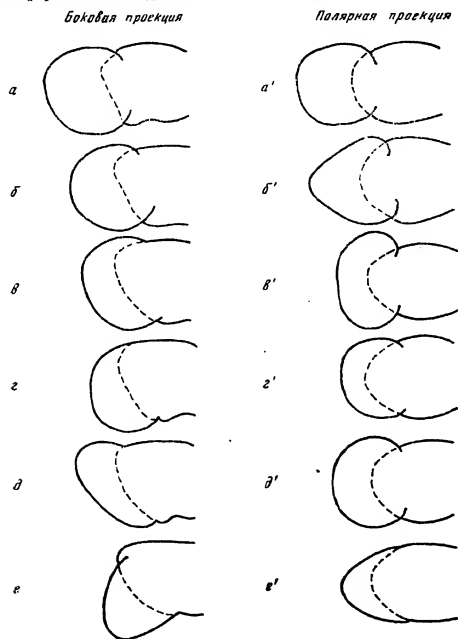
a — a' — округлость в боковой и полярной проекциях; б — трапециевидно-округлые очертания в боковой проекции; б' — ромбовидно-округлые очертания в полярной проекции; e' — e' — эллиптическое очертание в полярной проекции; e — угловато-эллиптическое очертание в боковой проекции; d — трапециевидное очертание в боковой проекции и d' — эллиптическое очертание в полярной проекции; e — треугольное очертание в боковой проекции и e' — эллиптическое очертание в полярной проекции; ж — трапециевидно-округлые очертания в боковой проекции и ж' — эллиптическое очертание в полярной проекции; з — трапециевидное очертание в боковой проекции и з' — угловато-овальное очертание в полярной проекции

г) эллиптическое в полярной проекции и треугольное в боковой (*Cedrus longisaccata* Z a k l.);

д) эллиптическое в полярной проекции и трапециевидно-округлое в боковой (*Pinus silvestris* L.);

е) угловато-овальное в полярной проекции и трапециевидное в боковой (*Pinus секция Australes* L o u d.).

2. Форма воздушных мешков и их очертания. Форма воздушных мешков в основном близка к сфероидальной, но, в зависимости от принадлежности к тому или иному роду или виду, конфигурация их несколько уклоняется от этой формы, что нередко определяется способом прикрепления мешков к телу зерна. Можно выделить следующие основные формы мешков (фиг. 22):



Фиг. 22. Схематическое изображение очертаний воздушных мешков и различных типов их прикрепления к телу.

а—а'—сфероидальные; б—б'—угловато-сфероидальные; в—в'—эллипсоидальные; г—г' и д—д'—полусфероидальные; е—е'—конусообразные

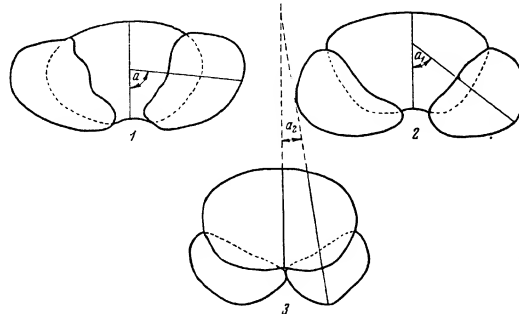
- а) сфероидальные, прикрепленные к телу несколько суженными основаниями (мешки значительно больше полусферы); в боковой и полярной проекциях — почти правильная окружность (фиг. 22, а, а');
б) угловато-сфероидальные, прикрепленные к телу суженными основаниями; очертание в полярной проекции почти треугольное, в боковой проекции — окружность (фиг. 22, б, б');

в) эллипсоидальные, прикрепленные к телу суженным основанием; очертание в полярной проекции — правильный овал, в боковой — полуокружность (фиг. 22, в, в');

г) полусфероидальные, прикрепленные к телу широким основанием; очертание в полярной проекции — почти правильная полуокружность; в боковой проекции — полуокружность или полуовал (фиг. 22, г, г', д, д');

д) конусообразные, прикрепленные к телу широким основанием; в боковой и полярной проекциях — треугольные очертания (фиг. 22, е, е').

3. Прикрепление воздушных мешков к телу. Воздушные мешки, образованные внутренним или внешним слоем экзаны, отходит от тела у пыльцы различных родов или видов в различных ме-



Фиг. 23. Схема прикрепления воздушных мешков:

- 1 — воздушные мешки прикреплены к боковым сторонам тела, угол α близок к прямому;
2 — мешки несколько сдвинуты к брюшной стороне тела, угол α_1 меньше прямого;
3 — мешки прикреплены к брюшной стороне тела, угол α_2 небольшой, острый

стах. В зависимости от этого ось мешков (высота их) находится в различных соотношениях с осью симметрии тела (высотой его). Если мешки отходят от боковых сторон зерна, то линия высоты мешка образует внутренний угол с высотой тела, близкий к прямому (фиг. 23, 1, а).

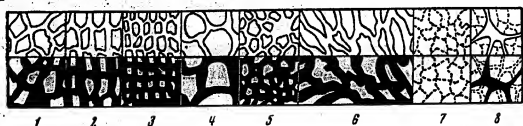
Если мешки несколько сдвинуты к брюшной стороне, то внутренний угол между высотой мешков и высотой тела будет меньше прямого (фиг. 23, 2, а).

И, наконец, если мешки прикреплены к брюшной стороне зерна, то угол между высотой тела и высотой мешка будет острый, небольшой (15—20°), чем теснее будут сдвинуты к брюшной стороне мешки, тем меньше будет угол (фиг. 23, 3, а₁). Точка пересечения высот мешков и высоты тела в этом случае находится вне зерна.

4. Структура экзаны мешков. Экзана воздушных мешков пыльцы Pinaceae обладает сетчатой структурой, весьма схожей с Rodosagraceae. Сетка мешков вырисовывается на их поверхности в виде более или менее четкого рисунка (фиг. 24). Рисунок сетки может быть ясным или неясным. Среди ясно выраженной, четкой сетчатости можно выделить:

- а) неравномерную четкую (фиг. 24, 1);
б) равномерно-прямоугольную четкую с крупными или мелкими ячейками (фиг. 24, 2, 3);

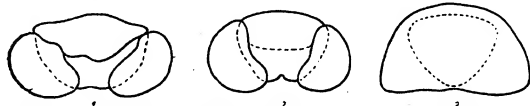
в) округлоячеистую с крупными или мелкими ячейками (фиг. 24, 4, 5);
 г) неравномерноячеистую с крупными или мелкими вытянутыми ячейками (фиг. 24, 6).
 К неясно выраженной можно отнести одинарную или комбинированную сетчатость — крупная сетка налагается на мелкую (фиг. 24, 7, 8).



Фиг. 24. Схема различных типов сетки воздушных мешков у пыльцы сем. Pinaceae.
 1 — сетка четкая, неравномерноячеистая; 2 — то же, равномерноячеистая, с крупными ячейками; 3 — то же с мелкими ячейками; 4 — сетка четкая, округло-ячеистая, с крупными ячейками; 5 — то же с мелкими ячейками; 6 — сетка четкая, неравномерноячеистая с вытянутыми ячейками; 7 — сетка неясно выраженная, прерывистая, одинарная; 8 — сетка неясно выраженная, комбинированная

Обычно величина ячеек сетки крупнее на периферийных частях воздушных мешков и мельче на участках, близких к границе с телом.

5. Структура и скульптура экзины тела. У большинства пыльцевых зерен Pinaceae с воздушными мешками поверхность тела на спинной и брюшной части не одинакова. Зависит это от того, что



Фиг. 25. Схематическое изображение различных видов пыльцы сем. Pinaceae (боковая проекция).

1 — пыльцевые зерна, тело которых слабо или ясно выражено щитом; 2, 3 — пыльцевые зерна, границы щита которых выражены неясно

экзина неравномерно отслаивается от тела, имеет неодинаковую толщину на различных участках его и снабжена неодинаковыми скульптурными выростами. Брюшная поверхность тела имеет тонкую однослойную экзину (гладкую или снабженную мелкими, неравномерно разбросанными выростами, бугорками, извилистыми складками, ямками).

На спинной поверхности тела экзина двуслойная, структурная и имеет скульптурные выросты. Это так называемый щит. Одни ископаемые виды и роды имеют ясно выраженный щит (фиг. 25, 1), у других границы щита менее резко выражены или совпадают с границей прикрепления мешков, или перекрывают ее (фиг. 25, 2, 3). В частности, у пыльцы *Cedrus* ясно выраженной границы щита нет и утолщенная экзина спинной поверхности тела непосредственно переходит на мешки, являясь их оболочкой.

Щит у пыльцы Pinaceae может иметь резкие границы, с небольшим выгибом по краю (род *Abies*), или границы без выгиба (*Pinus silvestris*). По своему строению двуслойный щит может иметь слой равной или неравной толщины.

В зависимости от ясности структуры или от наличия скульптурных выростов на поверхности экзины, поверхность щита бывает:

а) крупнобугорчатая, бугорчатость — неравномерная или равномерная (фиг. 26, 1);

б) мелкобугорчатая, бугорчатость — равномерная или неравномерная (фиг. 26, 3, 4);
 в) мраморивно-складчатая (фиг. 26, 2);
 г) крупно- или мелкоямчатая (фиг. 26, 5);
 д) неясно- или ясоточечная (фиг. 26, 6).



Фиг. 26. Скульптуры щитов пыльцы сем. Pinaceae.

1 — поверхность крупнобугорчатая; 2 — поверхность мраморивно-складчатая; 3, 4 — поверхность мелкобугорчатая; 5 — поверхность мелкоямчатая; 6 — поверхность неясно- или ясоточечная

6. Контур тела. Утолщенный слой экзины на спинной части тела при боковом положении зерна простирается в виде так называемого гребня. Ширина и контур гребня и контур тела зерна являются одним из диагностических признаков при определении и в значительной степени зависят от строения щита.



Фиг. 27. Типы очертания спинной части тела (контур гребня) пыльцы сем. Pinaceae:
 1 — контур ровный; 2 — контур мелковолнистый; 3 — контур крупноволнистый; 4 — контур крупнозубчато-волнистый; 5 — контур неясно- или слабоволнистый

В зависимости от структуры экзины и скульптуры поверхности щита гребень имеет различный контур: он может быть ровный, или волнистый (мелко или крупно), или зубчатый (фиг. 27, 1-5).



Фиг. 28. Схематическое изображение различных пыльцевых зерен сем. Pinaceae со щитом.

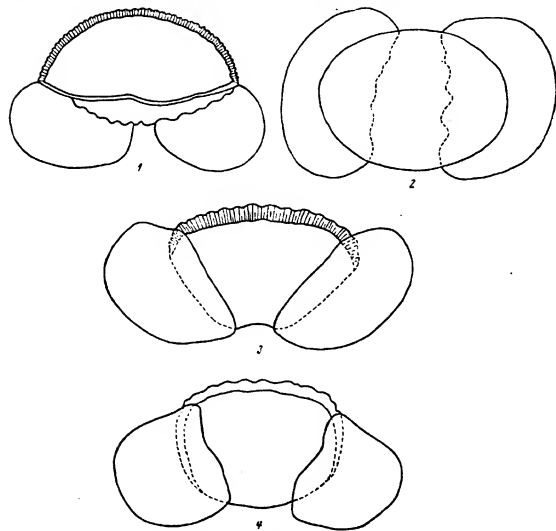
1 — контур тела ровный; 2 — контур тела волнистый только в области прикрепления воздушных мешков; 3 — контур тела волнистый

В зависимости от того, простирается щит до места прикрепления мешков или, несколько утолщаясь, перекрывает границу прикрепления мешков к телу, контур тела в полярном и боковом положениях различен у разных видов. Например, если щит прекращается у точки прикрепления мешков, как у пыльцы *Pinus silvestris* или у большинства *Pinus* других родов *Strobilus*, то тело имеет волнистый контур лишь на спинной части (лучше

всего это наблюдается при боковом положении зерна, но различимо и в полярной проекции). Если же щит простирается за границу прикрепления воздушных мешков, то в боковой проекции контур спинной части зерна изображается волнистой линией, а над мешками заметно утолщение. В полярной же проекции контур тела изображается волнистой линией и на спинной и на боковой частях (фиг. 28). Это часто наблюдается у пыльцевых зерен некоторых представителей *Pinus* секций *Strobilus*, *Cembrae*, *Pseudostrobus*, *Paracembrae* и некоторых других.

Род *Abies* Hill

В работе В. В. Зауер (1950) приведены достаточно четкие диагностические признаки, характеризующие пыльцу растений рода *Abies* и отличающие ее от пыльцы прочих родов сем. *Pinaceae*. Придерживаясь в основном



Фиг. 29. Схема строения пыльцы родов *Abies* и *Keteleeria*.
1, 3 — *Abies sibirica* и *Keteleeria*; 2, 4 — *Abies firma* (1, 3 и 4 — боковая проекция, 2 — полярная проекция)

этих данных, удалось выделить из общего комплекса пыльцы *Pinaceae* кайнозой Приаралья и Казахстана два вида пыльцы *Abies*. Общие признаки обнаруженной нами ископаемой пыльцы *Abies* следующие.
Общая длина пыльцевых зерен колеблется от 105 до 200 μ , высота тела — от 55 до 95 μ , высота воздушных мешков — от 50 до 75 μ , ширина гребня — от 5 до 12 μ .

Форма тела эллипсоидальная, в очертании овальная в полярной проекции и округло-трапециевидная — в боковой. Борозда расположена на брюшной стороне тела.

Экзина тела двустойная, со столбчатой структурой. Щит ясно выражен. На спинной части зерна экзина щита сильно утолщается и в боковой проекции изображается в виде широкого гребня. Очертание гребня крупно- или мелковолнистое. Поверхность щита мраморовидная, обусловленная шнуровидно-извилистой скульптурой. Поверхность брюшной части тела мелкобугорчатая. Структура экзины мешков четкая, крупно- или мелко-сетчатая.

Воздушные мешки сфероидальные, в очертании — почти правильная окружность. Мешки прикрепляются к телу суженным основанием, линия прикрепления четкая. Высота мешков всегда больше ширины их. В боковой проекции линия очертания тела и мешков образует угол, близкий к прямому.

Отличительными признаками, характеризующими пыльцу растений рода *Abies*, можно считать (фиг. 29):

- 1) наличие ясно выраженного щита и гребня на спинной части тела;
- 2) шаровидную форму воздушных мешков;
- 3) четкую границу прикрепления мешков к телу и наличие ясно выраженного угла между линиями контура тела и мешков;
- 4) величину пыльцевых зерен, обычно превышающую величину пыльцевых зерен *Picea*.

К сожалению, пыльца пихты ныне живущих видов описана весьма слабо, в литературе известны лишь описания пыльцы *Abies firma* Sieb. et Zucc. (Зауер, 1950), *A. sibirica* Ldb. (Erdman, 1943), *A. cephalonica* Loud., *A. pinsapo* Boiss., *A. concolor* Mill. (по зарисовкам автора). Поэтому для определения видов, выделенных из кайнозойских отложений Приаралья и Казахстана, имеется очень бедный сравнительный материал.

Abies sibiriciformis sp. nov. (pollen)

Табл. IV, рис. 1, 2

Препарат № 255 $\frac{3}{K}$

Голотип: Павлодарское Припиртыше, оз. Кемпир-Туз, глины с растительными остатками второй свиты континентального олигоцена (средний олигоцен).

Формы, морфологически близкие, известные по литературным данным:

1940. *Abies*. Thiergart. Die Micropaläontologie als Pollenanalyse im Dienst der Braunkohlenforschung, Taf. I, Fig. 6, 8.

Общая длина зерна 112—122 μ ; длина тела 90—100 μ , высота 47—60 μ , высота воздушных мешков 47—50 μ , ширина 45—50 μ ; высота гребня 3,5—6 μ . Строение пыльцы — обычное для рода *Abies*.

По форме тела и очертаниям, а также по структуре щита и мешков ископаемая пыльца имеет большое сходство с пыльцой современного вида *Abies sibirica*. Небольшие расхождения отмечаются лишь в размерах пыльцевых зерен. По данным В. В. Зауер, пыльца *Abies sibirica* Ldb. имеет высоту мешков 51—69 μ , у ископаемой формы высота мешков не превышает 54 μ , а в среднем составляет 50 μ .

Местонахождение: см. голотип.

Распространение: пыльца *Abies sibiriciformis* под названием *Abies* sp. отмечена, судя по опубликованным иллюстрациям и спискам,

в пыльцевых спектрах плиоцена Западной Европы, Европейской части СССР, в третичных отложениях (преимущественно в миоценовых) Башкирии, Урала и в четвертичных отложениях севера Европейской части СССР, Зауралья, Сибири и на Дальнем Востоке. Кроме того, пыльца *Abies sibiriciformis* sp. nov. (pollen) и *Abies* aff. *sibirica* неоднократно обнаруживалась в олигоценных (преимущественно в средней части) отложениях Павлодарского Прииртышья и Северного Приаралья. Ископаемые остатки растений рода *Abies* sp. найдены еще в меловых отложениях Сибири и Урала, в палеоцене Поволжья, в олигоцене и эоцене Украины и в миоцене Европейской и Азиатской частей СССР.

Современное распространение *Abies sibirica* — северо-восток Европейской части СССР, Восточная Сибирь, Казахстан, Монголия, Тувинская автономная область. Дерево приурочено обычно к долинам рек, растет в смеси с елью. В горных районах поднимается до высоты 1200—2000 м над уровнем моря. Растение морозостойчивое, выносит континентальный климат. Возможно, что заметное увеличение континентальности климата, похолодание и уменьшение общей влажности воздуха в связи с отступанием олигоценового моря и повлекло за собой распространение прародители *Abies sibirica* на Казахстанском континенте.

Abies protofirma sp. nov. (pollen)

Табл. IV, рис. 3

Препарат № 1 $\frac{3\mu}{K}$

Голотип: Северное Приаралье, г. Тас-Арап, тасаранская свита морского эоцена (средний эоцен).

Пыльца относится к типу зерен, изображенных на фиг. 29, 3, 4.

Общая длина зерна 112—120 μ ; длина тела 64 μ , высота 48—50 μ ; ширина воздушных мешков 47—50 μ , высота 50—60 μ ; ширина гребня 6,4 μ .

Тело округло-эллипсоидальное, очертание в боковой проекции — гексагональное. Экзина тела двуслойная; нижний слой тоньше, чем верхний. Структура экзины на спинной поверхности зерна — столбчатая. Экзина на спинной части тела сильно утолщена и образует щит с довольно ясными границами. В боковой проекции прекрасно выражен гребень с волнистым контуром. Поверхность тела на брюшной стороне неравномерно-мелкобугорчатая.

Мешки округло-овального очертания, вытянуты по высоте. В боковой проекции мешки имеют округло-трехлопастное очертание. Прикреплены мешки к телу чаще всего суженным основанием; линии очертания внешнего контура тела и мешков образует угол. Сетка на мешках комбинированная — в основном крупноячеистая, с мелкими добавочными ячейками.

Ископаемая пыльца несколько напоминает пыльцу ныне живущей *Abies firma* Sieb. et Zucc., описанную автором из гербарного материала Сухумского ботанического сада (сбори Н. А. Болховитиной). Отличается от нее формой воздушных мешков; у современного вида мешки имеют более правильную сферическую форму.

Местонахождение: см. голотип.

Распространение: Павлодарское Прииртышье, нижнеолигоценные отложения (чеганские глины); Северное Приаралье, отложения эоцена и нижнего олигоцена.

Родина современного вида *Abies firma* Sieb. et Zucc. — Центральная и Южная Япония. Распространена на южных островах, во влажных горных долинах, где растет совместно с *Chamaecyparis obtusa*, *Sciadopitys verticillata*, *Cryptomeria japonica*, *Torreya nucifera* и широколиственными породами.

Род *Keteleeria* Carr. — Кетелеерия

Общий тип, форма и очертания пыльцы *Keteleeria* изображены на (фиг. 29, 1, 2.) В схеме, как видно из приведенных рисунков, пыльцевые зерна *Keteleeria* весьма близки к *Abies*.

Пыльца *Keteleeria* относится к типу зерен с двумя воздушными мешками, имеет сходство с пыльцой *Picea* и *Abies*. Некоторые признаки сходства и различия пыльцы этих родов указаны ниже.

Из литературы известно, что пыльца *Keteleeria* почти всегда встречается в виде единичных зерен. Кроме того, во многих случаях принадлежность ее к роду *Keteleeria* подвергается сомнению.

Keteleeria davidianaeformis sp. nov. (pollen)

Табл. IV, рис. 4—6

Препарат № 198 $\frac{H}{K}$

Голотип: Павлодарское Прииртышье, оз. Кемпир-Туз, вторая свита континентального олигоцена (средний олигоцен).

Общая длина зерна 140—160 μ ; длина тела 118 μ , высота тела около 80 μ ; ширина воздушных мешков около 70 μ , высота около 65 μ ; толщина гребня около 32 μ ; диаметр ячеек сетки на мешках 3—5 μ .

Тело округло-эллипсоидальное, очертание в боковой проекции угловато-овальное. Экзина тела имеет столбчатую структуру. На спинной части тела экзина резко утолщается и образует щит, который пронизывается в виде неширокого, но ясно выраженного гребня, покрытого поперечными штрихами.

Воздушные мешки имеют сетчатую экзину, сетка — округло-ячеистая, равномерна по всей поверхности мешков. Поверхность бугорчатая. Поверхность щита мелкобугорчатая, контур — мелковолнистый.

Пыльца *Keteleeria* имеет очень большое сходство с пыльцой *Abies* и отличается от нее лишь большей величиной зерна и наличием мелкобугорчатого (зернистого) рисунка на поверхности щита; у пыльцы *Abies* щит снабжен скульптурными пилуридными выростами.

Местонахождение: см. голотип.

Распространение: пыльца *Keteleeria* aff. *Davidiana* Beissn. обнаружена в виде единичных зерен в общем комплексе пыльцы Ринассе в Северном Казахстане, в спектрах чеганской, первой и второй свит (нижний и средний олигоцен) и в некоторых горизонтах четвертой свиты континентального олигоцена (верхний олигоцен). В Северном Приаралье вид единично встречается от эоцена до среднего олигоцена. Присутствие пыльцы *Keteleeria* отмечается в палеоценовых спектрах Западной Европы, в СССР, в неогене Азиатской части СССР, в верхнепалеоценовых горизонтах Приаралья.

Родина *Keteleeria Davidiana* Beissn. — Юго-Западный и Западный Китай. В настоящее время этот род включает всего два вида, обитающих в Юго-Западном Китае в составе хвойных лесов; иногда образует самостоятельные рощи. Растет на высоте от 300 до 1500 м над уровнем моря.

Keteleeria sp. (K.) aff. *Davidiana* Beissn.)

Табл. V, рис. 1

Препараты № 198 $\frac{H}{K}$ и 146 $\frac{H}{K}$

Размеры пыльцевого зерна — те же или несколько крупнее, чем у *Keteleeria davidianaeformis* sp. nov. (pollen). Плохая сохранность в некоторых отличия в строении оболочек не позволяют провести полную анало-

гню с предыдущим видом. Отличается от пыльцы *Keteleeria* aff. *Davidiana* наличием толстого слоя экзины на воздушных мешках.

Местонахождение: Павлодарское Прииртышье, оз. Кемар-Туз, глины с растительными остатками второй свиты континентального палеогена (средний олигоцен).

Род *Picea* Dietr.—Ель

Пыльца *Picea* относится к типу пыльцевых зерен Pinaceae с воздушными мешками. Имея много общих морфологических признаков, объединяющих эту группу, пыльца *Picea* довольно четко отличается от пыльцы родов *Pinus*, *Abies*, *Keteleeria* и других присущими только этому роду признаками.

Пользуясь имеющимися в литературе данными по морфологии пыльцы ныне живущих видов *Picea* (Зауер, 1950; Гричук и др. in litt.) нам удалось выделить несколько видов ископаемой пыльцы *Picea*, принадлежащих к двум секциям.

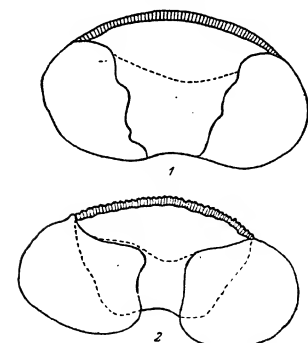
Пыльца рода *Picea* состоит из центральной части, или тела округло-эллипсоидальной формы, с овальным в боковой проекции, и из двух воздушных мешков. Общие размеры зерна колеблются от 80 до 120 μ .

У пыльцы современной ели из секции *Euripicea* Willk m. очертание тела в боковой проекции овальное (фиг. 30, 1), у пыльцы же из секции *Omorica* Willk m. — трапецевидное (фиг. 30, 2). В полярной проекции очертание тела пыльцы всех видов обеих секций обычно овальное. Воздушные мешки прикреплены к телу широкими основаниями и сдвинуты к его брюшной стороне.

У пыльцы обеих секций экзина тела образует ясно выраженный шит. Границы шита у пыльцы *Picea* секции *Euripicea* слажены, а у шита пыльцы секции *Omorica* более четкие, причем на некоторых экземплярах удается наблюдать нежные, едва заметные утолщения по его краю.

Утолщение экзины на спинной части тела пыльцы обеих секций образует гребень, который более ярко выражен у пыльцы секции *Omorica*. Структура экзины шита у пыльцы обеих секций столбчато-зернистая. Поверхность шита мелкоямчатая, в отличие от мраморовидной у пыльцы *Abies*.

Воздушные мешки *Picea* имеют сетку, ячейки которой обычно мелкие и неясно выраженные; обычно ячейки сетки уменьшаются в размере при приближении к месту прикрепления мешков и переходят в точечный рисунок тела. Зародышевую борозду на ископаемых экземплярах наблюдать



Фиг. 30. Схематическое изображение пыльцы рода *Picea*:
1—*Picea* секции *Euripicea* Willk m. (боковая проекция); 2—*Picea* секции *Omorica* Willk m. (боковая проекция)

приходится редко, так как выражена она нечетко. Характерным признаком пыльцы, относящейся к секции *Euripicea*, является почти полное отсутствие угла между линией очертания тела и мешков. Поэтому пыльцевое зерно в боковой или полярной проекции имеет очертание, близкое к правильному овалу. У пыльцы же, принадлежащей к секции *Omorica*, линия прикрепления мешков выражена четко и линии выпященного очертания тела и мешков в боковой проекции образуют угол, вследствие чего пыльца *Picea* секции *Omorica* несколько напоминает пыльцу *Abies*.

С. Н. Наумова (1939) пыльцу, подобную пыльце современных елей, относит, в числе прочих пыльцевых зерен хвойных с воздушными мешками, нерезко отделяющимися от тела, к классу *Aragosa* N a u m., группе *Saccata* N a u m., подгруппе *Oedemosaccus* N a u m.

Ископаемые остатки рода *Picea* известны с мелового периода. В больших количествах пыльца встречается начиная от верхнеюрских отложений. В третичных отложениях пыльца рода *Picea* широко распространена и является обычным компонентом лесных комплексов.

Picea секции *Euripicea* Willk m.

Picea tataranica sp. nov. (pollen)

Табл. V, рис. 2, 3
3а
Препарат № 1 К

Голотип: Северное Приаралье, г. Тас-Аран, листоватые глины тасаранской свиты (средний эоцен).

Формы, имеющие некоторое сходство с описанной пыльцой, известны по литературным данным:

1949. *Pinofella sacculifera* М а л и в к и н а. Определитель спор и пыльцы. Юра — мел. Табл. 25, фиг. 4, 5.
1950. Coniferpollen dem *Picea* typus R e i s s i n g e r. Die «Pollenanalyses» ausgedehnt auf alle Sedimentgesteine der geologischen Vergangenheit. Taf. V, Fig. 18.
1953. *Picea* секции *Euripicea* З а к л и н с к а я. Описание некоторых видов пыльцы и спор, выделенных из третичных отложений Пасековского карьера Воронежской области, стр. 67, табл. II, фиг. 16.

Перечисленные формы имеют некоторое сходство с пыльцой *Picea tataranica* sp. nov. лишь по внешнему облику и по очертаниям зерна в боковой проекции, но в деталях они отличаются от *P. tataranica*.

Пыльца *Picea tataranica* имеет следующие измерения: общая длина зерна 92,8 μ ; высота тела около 45 μ , ширина около 60 μ ; ширина воздушных мешков от 45 до 48 μ , высота около 30 μ . Гребень неширокий.

Тело зерна — эллипсоидальной формы, с овальным очертанием в полярной проекции и трапецевидно-овальным в боковой. Борозда выражена слабо.

Воздушные мешки тесно насажены на боковые стороны тела, охватывая его большей своей частью с брюшной стороны. Граница прикрепления мешков неясная. Сетка на мешках мелкая и неясно выражена.

Шит на спинной поверхности зерна имеет четкую, но нерезкую границу. Гребень узкий, поперечно исчерченный, сходящийся на нет к месту прикрепления мешков. Поверхность шита мелкоямчатая. Поверхность тела на брюшной стороне неясноточечная.

По внешнему облику и по основным морфологическим признакам, приведенным в описании, пыльца *Picea tataranica* должна быть отнесена к секции *Euripicea*. По общим очертаниям пыльца *Picea tataranica* несколько напоминает *P. exelsa* L i n s., но отличается от нее по величине и форме воздушных мешков. У *P. tataranica* мешки несколько вытянуты по вы-

соте и в боковой проекции имеют округло-конусовидное очертание, а у *P. exelsa* они уплощены.

Место нахождения: см. голотип.

Распространение: нижний и средний эоцен Приаралья. Пыльца, подобная *Picea tasarianica*, но иногда несколько больших размеров, отмечается в спектрах мел-палеоцена и единично в эоцене и нижнем олигоцене Павлодарского Прииртышья.

Picea schrenkianaeformis sp. nov. (pollen)

Табл. V, рис. 4

Препарат № 2 $\frac{3\mu}{K}$

Голотип: Северное Приаралье, г. Тас-Араи, тасаранская свита, листоватые глины, средний эоцен.

Общая длина зерна 115 μ ; высота тела около 55 μ ; ширина воздушных мешков 60 μ , высота 45 μ ; высота гребня около 6 μ .

Форма зерна приближается к овалу, так как граница прикрепления мешков к телу сглажена. Мешки насажены по бокам тела пыльцевого зерна широкими основаниями; граница линии прикрепления мешков улавливается плохо.

На спинной части зерна экзина щита сильно утолщена и образует поперечно исчерченный гребень, который, утоняясь к месту прикрепления мешков, постепенно сходит на нет. При боковой проекции хорошо видна двуслойность экзины гребня. Верхний слой экзины тоньше нижнего, он постепенно переходит на поверхность мешков. Щит на спинной части зерна имеет неясную ямчатую структуру. Рисунок на поверхности щита неясный, иногда поверхность его кажется просто исчерченной, иногда удается наблюдать мелкоямчатую скульптуру, но выражена она слабо.

Воздушные мешки снабжены мелкой сеткой, которая хорошо выражена на их боковых и брюшных поверхностях, но по мере приближения к границе прикрепления мешков к телу четкость рисунка сетки пропадает и постепенно переходит в мелкую исчерченность.

Пыльца *Picea schrenkianaeformis* по внешнему облику, величине, очертанию, характеру прикрепления мешков, по рисунку и ширине гребня и по форме и очертанию мешков очень близка к пыльце современной *Picea Schrenkiana* F. et M. Однако некоторые морфологические признаки обоих видов пыльцы остаются несходными. Например, щит пыльцы *Picea Schrenkiana* F. et M. имеет правильную мелкоямчатую скульптуру, а щит *P. schrenkianaeformis* sp. nov. — неясноямчатую скульптуру, переходящую в исчерченность. Граница прикрепления мешков у современной пыльцы выражена более четко, чем у ископаемого вида. Внутренний слой экзины гребня у *P. Schrenkiana* более толстый, чем внешний, а у *P. schrenkianaeformis* соотношения обратные. Все это заставляет относиться осторожно к проведению полной аналогии между современной и ископаемой формами. Поэтому и видовое название формы, описанной как *Picea schrenkianaeformis*, указывает лишь на большое сходство ее с современной пыльцой *P. Schrenkiana*, но не на полное их тождество.

Из песчано-гравийного горизонта континентальных отложений четвертой свиты олигоцена Северного Прииртышья неоднократно была выделена пыльца ели, весьма близкая к *Picea schrenkianaeformis*, но значительно худшей сохранности, что вызвано, по-видимому, условиями захоронения (см. табл. V, рис. 5, описание препарата № 259 $\frac{H}{K}$).

Общая длина зерна 110—120 μ ; высота тела 53—57 μ ; ширина мешков около 60 μ , высота — около 45 μ ; высота гребня около 5 μ .

Несмотря на плохую сохранность пыльцевых зерен, удалось установить, что ряд признаков сближает ископаемую пыльцу с *Picea Schrenkiana*. Например, высота гребня у ископаемой формы такая же, как и у современной; линия прикрепления воздушных мешков выражена явнее, чем у *Picea schrenkianaeformis* из эоценовых отложений, и сходна с линией прикрепления у *P. Schrenkiana*. На теле ископаемого зерна заметна мелкая точечность, подобная *P. Schrenkiana*. Скульптура щита неясноямчатая. Границы щита более ясно выражены, чем у *P. schrenkianaeformis* из эоценовых отложений.

Таким образом, сходство этой пыльцы из континентальных отложений олигоцена с пыльцой *P. Schrenkiana* выражено у некоторых зерен даже более ясно, чем у *P. schrenkianaeformis* из эоценовых отложений.

Место нахождения: см. голотип.

Распространение: пыльца, подобная *Picea schrenkianaeformis*, известна из эоценовых отложений Поволжья, в виде единичной находки отмечена в эоценовых отложениях Северного Приаралья. В Павлодарском Прииртышье в основном приурочена к олигоценовым отложениям.

Родина *Picea Schrenkiana* — Джунгарский Ала-Тай, почти весь Тянь-Шань и Китайский Туркестан. Это типично горный вид, растущий на северных склонах горных ущелий совместно с *Abies sibirica*. По Ферганскому хребту *Picea Schrenkiana* образует густые насаждения в смеси с *Abies Semenovii*, *Acer turkestanica*, а на южной границе своего распространения встречается вместе с *Juglans regia*.

По данным Н. В. Павлова (1947), тяньшаньская ель (*P. Schrenkiana*) на территории Казахстана в настоящее время является исключительно горным видом. Возможно, что описанная ископаемая пыльца *P. schrenkianaeformis* — далекий предок современной *P. Schrenkiana*, пришедший с южных гор древней Азии.

Секция *Omerica* Willkm.

Picea alata sp. nov. (pollen) ex gr. *P. jezoensis* Ca g r.

Табл. VI, рис. 1—5

Препарат № 255 $\frac{H}{K}$

Голотип: Павлодарское Прииртышье, оз. Кемир-Туз, глины с растительными остатками второй свиты континентальных отложений (средний олигоцен).

Общая длина зерна от 145 до 160 μ , высота около 65 μ ; высота воздушных мешков от 40 до 50 μ , ширина около 70 μ ; высота гребня 2—4 μ .

Форма тела эллипсоидальная, очертание в боковой проекции трансцевидное. Гребень широкий, с волнистым краем. Высота гребня по мере приближения к месту прикрепления воздушных мешков постепенно уменьшается, но в некоторых случаях остается неизменной.

Экзина тела двуслойная, внутренний слой тонкий, наружный — толстый и имеет столбчатую структуру в области щита. На спинной части тела экзина образует ясно выраженный щит. На некоторых экземплярах щит по краю имеет рубчик, но у большинства зерен этот рубчик незаметен. Поверхность щита мелкобугорчатая. Щит, как видно, далеко заходит на боковые и брюшную части тела и поэтому боковые его границы при полярном положении зерна хорошо просматриваются сквозь контур тела. Брюшная поверхность тела имеет неясно выраженную мелкобугорчатую скульптуру, которая при высоком положении тубуса микроскопа прощупывается в виде редкой точечности. Воздушные мешки имеют сфероидальную форму

с полуокруглым очертанием в полярной и в боковой проекциях. Прикрепляются мешки к телу несколько суженными основаниями, вследствие чего контур тела и мешков образует угол. Этот признак сближает пыльцу *Picea alata* секции *Omorica* с пыльцой рода *Abies*. Прикреплены мешки к боковым сторонам тела и несколько сдвинуты к брюшной, линия прикрепления мешков на брюшной стороне неясная. У некоторых экземпляров мешки настолько сильно сдвинуты к брюшной стороне, что внутренние линии их прикрепления смыкаются.

Сетка на периферийных поверхностях мешков четкая и ясная; к брюшной и спинной поверхностям ячейки сетки сильно мельчают и переходят в мелкий извилистый рисунок, который сливается с рисунком поверхности тела.

По внешним признакам и по отдельным морфологическим особенностям пыльца *Picea alata* sp. nov., отнесенная нами к секции *Omorica*, имеет близкое сходство с современной пыльцой *P. jezoensis* S. a. g. r., описанной В. П. Гринчук с соавторами (in litt.), отличающейся от нее лишь менее высоким гребнем.

Местонахождение: см. голотип.

Распространение: пыльца, подобная *Picea alata*, отнесенная нами к секции *Omorica*, встречается в высоких горизонтах континентального олигоцена в Казахстане. Отмечена автором в олигоцене и миоцене Северного Казахстана, в эоцене Поволжья и в олигоцене и эоцене Приаралья, а также в миоценовых отложениях Украины.

В настоящее время *Picea jezoensis* S. a. g. r. обитает в горах Дальнего Востока (Приморье), на Сахалине, на о-ве Иезо в Северной Корее, в Восточной Маньчжурии и на юге Якутии. *P. jezoensis* — горное дерево, которое доходит до верхней границы лесной полосы, но местами его можно встретить спускающимся близко к морю. Растет *P. jezoensis* вместе с сахалинской пихтой, каменной березкой и маньчжурским кедром. Южные варианты *P. jezoensis* на о-ве Иезо растут вместе с различными видами *Magnolia*, лианами и бамбуком.

Надо полагать, что пыльца *Picea* секции *Omorica*, выделенная из третичных отложений Казахстана, принадлежит растению, которое по своей экологии было наиболее близко к современному виду *Picea jezoensis*. Характерно, что появление и распространение пыльцы *P. alata* sp. nov. совпадает с почти полным исчезновением пыльцы болотного кипариса (*Taxodium*), что характеризует некоторое осужение климата. В то же время в спектрах отмечается обилие пыльцы *Pinus*, что, по-видимому, связано с тем же явлением.

Род *Cedrus* Link. — Кедр

В начале 1954 г. вышла в свет монографическая работа В. В. Зауер, посвященная изучению ископаемой пыльцы *Cedrus* и ее значению для стратиграфии. В этой работе приведено описание пыльцы современных видов рода *Cedrus*, а также дано описание 21 вида ископаемой пыльцы. Ископаемые формы *Cedrus*, описанные В. В. Зауер, относятся в основном к меловым и третичным отложениям. Большую часть находок пыльцы *Cedrus* в третичных отложениях Казахстана В. В. Зауер относит к верхнему олигоцену (лигитионосная свита восточного борта Тургайского прогиба). При этом автор отмечает, что в этих отложениях встречается в основном пыльца одного вида *Cedrus*, близкого по морфологическим признакам к пыльце современного вида *C. deodara*. В миоценовых отложениях Казахстана автор отмечает находки *C. deodariformis*, также близкого к

современному виду *C. deodara*¹. В более древних третичных отложениях (палеоцен — эоцен) Казахстана автор не отмечает находок пыльцы кедра и относит это за счет того, что отложения доолигоценового времени представлены морскими фашиями.

На основании изученного материала по Павлодарскому Прииртышью и Северному Приаралю у нас сложилось иное представление о времени распространения рода *Cedrus* в палеогеновых флорах на территориях, прилегающих к палеогеновому морскому бассейну, в пределах современного Казахстана.

Пыльца рода *Cedrus* в третичных отложениях Казахстана встречается довольно часто, причем по количеству видов и по абсолютному содержанию наибольший удельный вес ее приходится на нижние горизонты палеогена (палеоцен — эоцен), а затем на более верхние его горизонты — средний олигоцен.

Виды пыльцы *Cedrus*, обнаруженные в эоценовых и палеоцен-эоценовых отложениях Павлодарского Прииртышья и Северного Приаралья, значительно отличаются от видов, выделенных из континентальных отложений олигоцена. Особенным разнообразием форм кедра отличаются свиты из тасаранской свиты Северного Приаралья (средний эоцен). Вторичный расцвет *Cedrus* в Казахстане связан со временем отложения первой и второй свит континентального олигоцена.

Для ископаемой пыльцы рода *Cedrus* в основном характерны те же признаки, которые присущи и пыльце современных видов (Зауер, 1954), но у ископаемых видов эти признаки более подчеркнуты и несколько усложнены в деталях.

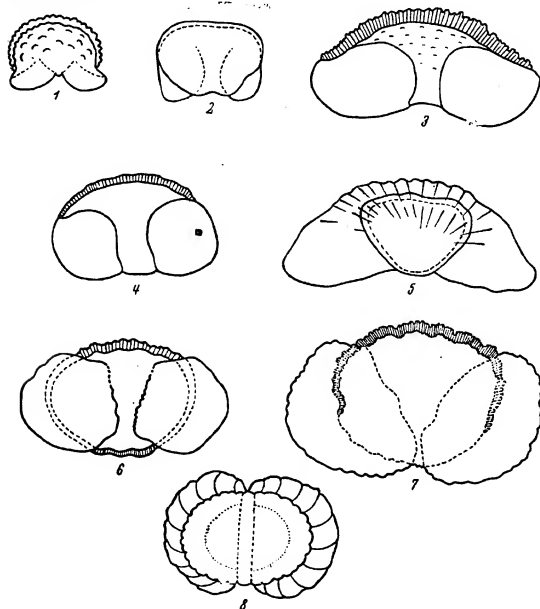
По основным чертам строения пыльца растений рода *Cedrus* близка к пыльце всех двухмешковых Ринасеев, в особенности к пыльце рода *Picea*. Однако ряд совершенно специфических черт в строении пыльцы *Cedrus* все же позволяет четко выделить пыльцу всех видов рода *Cedrus* из общего комплекса двухмешковой пыльцы сем. Ринасеев. В общем, для пыльцы *Cedrus* характерны следующие признаки: тело эллипсоидальное с округло-треугольным, овальным или трапециевидно-овальным очертанием в боковой проекции (фиг. 31). Экзина тела двуслойная, наружный слой тоньше, чем внутренний. На спинной части зерна внутренний слой экзины сильно или незначительно (в зависимости от принадлежности к виду) утолщается, образуя гребень. На боковых частях зерна утолщение исчезает, а внешний слой экзины отслаивается в виде камер, исполняющих, по-видимому, функции воздушных мешков. Камеры сильно сдвинуты к брюшной части тела. Поверхность спинной части тела обычно крупнобугристая или складчатая, что обуславливает крупный мраморовидный рисунок и в большинстве случаев — неровный контур гребня. Последнее особенно хорошо заметно тогда, когда зерно расположено в боковой проекции.

Воздушные мешки, облеченные вместе с телом общим верхним слоем экзины, отходят от тела сильно расширенными основаниями и у большинства видов имеют округлые или овальные очертания. У некоторых видов *Cedrus* воздушные мешки несколько вытянуты по высоте и тогда в очертании они округло-треугольные. В том месте, где камера воздушных мешков отходит от тела, экзина в большинстве случаев собрана в складки, вследствие чего пыльцевые зерна некоторых видов *Cedrus* имеют неправильно-волнистый контур (фиг. 31, 6—8). В том случае, если складки экзины отсутствуют, контур и мешков и тела ровный (фиг. 31, 1—4).

¹ По данным Казахстанской экспедиции Академии наук СССР, лигитионосная свита относится к среднему олигоцену. Соответственно миоценовые находки кедра следует относить к верхнему олигоцену.

Экзина тела и мешков обычно имеет сетчатую структуру. При этом неравномерный крупосетчатый рисунок мешков постепенно переходит в мелкоячеистую структуру тела.

В общем очертания пыльцевых зерен *Cedrus* несколько напоминают очертания пыльцы рода *Picea*. У пыльцевых зерен рода *Cedrus*, так же как и у рода *Picea*, отсутствует угол между линиями очертания тела и воздушных мешков.



Фиг. 31. Схема различных типов ископаемой пыльцы [рода *Cedrus*.

(1, 2, 3, 4, 5, 7 — боковая проекция; 6 и 8 — полярная проекция)

1, 2 — *Cedrus* типа *Saccata*; 3, 5 — *Cedrus* типа *C. atlantica* M a n e t t i; 4 — *Cedrus* типа *C. libani* L a w' s.
6, 7, 8 — *Cedrus* типа *C. deodara* L o u d.

Размеры пыльцевых зерен у *Cedrus* колеблются от 50 до 110 м по большей оси; при этом число видов пыльцы мелких размеров значительно преобладает над числом крупных.

Основными диагностическими признаками пыльцы ископаемых растений рода *Cedrus*, отличающими ее от пыльцы прочих *Pinaceae*, признаками:

130

- 1) отсутствие резкой границы щита на брюшной поверхности тела;
- 2) наличие ярко выраженного гребня (при боковом положении зерна), широкого или узкого, в зависимости от принадлежности к виду;
- 3) отсутствие резкой границы между мешками и телом в связи с тем, что мешки являются непосредственным продолжением общего с телом слоя экзины.

В. В. Зауер (1954) дополняет эти признаки еще деталями строения сетчатой структуры воздушных мешков, которая, по наблюдениям этого автора, обычно крупно- или мелкоячеистая, налегающая одна на другую.

В палеогене Казахстана автору удалось выделить восемь различных видов пыльцы рода *Cedrus*, схематическое изображение типов которой помещено на фиг. 31.

Находки пыльцы *Cedrus* в палеогеновых отложениях представляют значительный интерес, так как макроскопические остатки растений этого рода в Азиатской части СССР еще не известны.

Основная масса видов, открытых по находкам пыльцы, приурочена к самым нижним отделам палеогена. Следует отметить, что из выделенных верхнемеловых и палеогеновых форм *Cedrus* лишь немногие могут быть отождествлены с современными видами. В большинстве выделенные формы относятся к вымершим видам. Хотя общий характер строения пыльцевых зерен *Cedrus* и близок к современным видам, в деталях наблюдаются большие расхождения.

Находки пыльцы *Cedrus* в Европе и в Америке известны еще с юрского периода. Наиболее широкого распространения этот род достиг в меловом периоде, особенно в верхних его отделах. В верхнемеловых отложениях восточного склона Среднего Урала, по данным В. В. Зауер, в некоторых горизонтах пыльца *Cedrus* преобладает над пыльцой *Pinus* и представлена там большим многообразием форм. В верхнем мелу Западного Казахстана и юга Европейской части СССР отмечены два вида и шесть разновидностей пыльцы *Cedrus*, так же как и в палеогене Северного Казахстана, принадлежащие к формам, сходным с современными видами *C. libani* и *C. deodara*.

В третичных отложениях Горьковской обл., Средней Волги, Нижнего Дона, Прикаспия, Северного Кавказа, Северного Казахстана, Среднего Урала и Башкирии пыльца *Cedrus* встречается в палеоцен-эоцене и единично — в нижнем и среднем олигоцене.

По-видимому, в верхних горизонтах олигоцена род *Cedrus* уже прекратил свое существование на равнинах Евразии в связи с общим осушением климата и отступил в горные районы, защищенные от сильных ветров. Как известно, почти все современные виды кедров очень чувствительны к изменению почвенных и климатических условий. Возможно, что и более древние представители этого рода были также требовательны к природным условиям и поэтому усиление континентальности климата в Казахстане привело к вымиранию многих видов, к сокращению их ареалов и к отступанию оставшихся видов в горные районы более южных широт.

В верхних горизонтах палеогена мы отмечаем уже лишь единичные находки одного или двух видов *Cedrus*. В олигоцене уже широко начали развиваться различные виды *Pinus*, совершенно оттеснив последних представителей кедров.

В настоящее время на всем земном шаре род *Cedrus* представлен всего четырьмя видами с изолированными и ограниченными ареалами в горах Ливана, горах Атласа, в Гималаях и на о-ве Кипр.

Основные типы пыльцевых зерен рода *Cedrus*, выделенных из третичных отложений исследованных районов, следующие:

9* 131

1. *Cedrus* типа *C. deodara* Loud. (фиг. 31, 6—8). Пыльцевые зерна преимущественно крупные (120 μ и более), по внешнему облику несколько напоминают пыльцу *Podocarpus* или *Abies*. Имеют ясно выраженный поперечно исчерченный гребень, обусловленный крупнобугорчатой скульптурой щита.

2. *Cedrus* типа *Cedrus libani* L. a. s. (фиг. 31, 4). Пыльцевые зерна несколько меньшей величины (общая длина до 90 μ). Экзина щита сравнительно тонкая. Гребень невысокий (до 4 μ) со слегка волнистым или гладким контуром.

По внешнему облику пыльца этого типа имеет большое сходство с пыльцой рода *Picea* секции *Eurpicea*: у нее мелкая сетка воздушных мешков и сравнительно сглаженное очертание, приближающееся в полярной проекции к овалу.

3. *Cedrus* типа *Cedrus atlantica* Manetti (фиг. 31, 3 и 5, крайние вариации). У пыльцевого зерна этого типа сильно увеличенные по высоте воздушные мешки, несколько оттянутые по бокам, поперечно исчерченный, но слабо волнистый гребень и относительно небольшое, в сравнении с воздушными мешками, тело. Экзина воздушных мешков часто смята в произвольные складки. Общий размер зерна 50—90 μ .

4. *Cedrus* типа *Cedrus microscata* Z. a. u. g. (фиг. 31, 1, 2). Пыльцевое зерно резко отличается от предыдущих более нежной структурой экзины, мелкими размерами (до 50 μ) и очень небольшими воздушными мешками, отслаивающимися на брюшной стороне тела. Пыльца этого типа сходна с пыльцой ископаемых видов *Cedrus parviscata* Z. a. u. g., а из современных хвойных более всего имеет сходство с пыльцой различных видов рода *Dacrydium*.

Cedrus aff. *deodara* Loud.

Табл. VIII, рис. 1—6
Н
Препарат № 170 К

Общая длина зерна около 120 μ ; высота тела около 95 μ ; длина 98 μ ; высота воздушных мешков 48 μ ; ширина гребня около 10 μ .

Тело округлое, в боковой проекции — почти правильная окружность. Экзина тела толстая и скульптурная, состоит из двух слоев, из которых нижний значительно тоньше верхнего. Верхний слой экзины имеет сложную, видимо столбчатую, структуру, что обуславливает неравномерную поперечную штриховатость экзины, хорошо заметную при боковом положении зерна. Контур тела неровный, мелкофестончатый. На спинной части зерна экзина сильно утолщается и образует неясно выраженный щит, который не имеет резких границ. Брюшная часть тела неравномерно мелкобугорчатая. Зародышевая борозда выражена неясно.

Экзина тела, не утолняясь к боковым частям, непосредственно переходит на мешки, которые и представляют собой разросшиеся выросты верхнего слоя ее. Камеры воздушных мешков крупные, в боковом сечении полуокругло-эллипсоидальные, отходят от тела широкими основаниями.

Границы мешков выражены неясно, так как экзина, образующая их, облекает общим покровом и мешки и тело. Структура экзины на теле и на мешках различна. На мешках структура сетчатая, сетка неравномерноячеистая, двойная (крупные ячейки налагают на мелкие). Ячейки сетки вытянуты по направлению от центра к периферии. Размеры ячеек сетки мешков по мере приближения к месту отделения мешков от тела постепенно уменьшаются и сетчатость переходит в мраморовидный рисунок поверхности тела (табл. VIII, рис. 5). Граница между мешками и телом зерна улавливается по наличию угла между линиями очертания спинной части тела и мешков.

Описанный В. В. Зауер (1950) ископаемый вид, названный *Cedrus* aff. *deodara* Loud., по морфологическим признакам весьма близок к современному виду *Cedrus deodara* Loud. (табл. VII, рис. 4), за исключением размеров, которые у первого значительно больше. Из ископаемых форм пыльцы *Cedrus* приведенная форма ближе всего к *C. lazireticulata* Z. a. u. g., отличающаяся от него большей величиной ячеек сетки на мешках, а также тем, что структура его щита не имеет сетчатого рисунка.

Местонахождение: Павлодарское Прииртышье, г. Павлодар, скв. 1, слюдистые глины подглауколитовой свиты (мел — палеоген).

Распространение: меловые отложения Среднего Урала, меловые и нижнетретичные отложения Павлодарского Прииртышья.

Родина ныне живущего гималайского кедра *Cedrus deodara* — горы Афганистана, Северо-Западные Гималаи, Северный Белуджистан. Растет на высоте от 1000 до 3000 м над уровнем моря совместно с *Pinus exelsa*, *Picea morinda*, *Abies Webbiana*, *Quercus incana* — наиболее засухоустойчивый вид из всех представителей рода *Cedrus*.

Cedrus lazireticulata Z. a. u. g.

Табл. VIII, рис. 7, 8
3
Препараты № 170 К, 3 К

Общая длина зерна от 80 до 90 μ ; длина тела около 64 μ , ширина около 54 μ ; высота воздушных мешков около 25 μ , ширина — около 60 μ ; толщина экзины на спинной части около 6 μ .

Тело эллипсоидальное, почти правильный овал в полярной проекции. Экзина трехслойная; нижний и верхний слои представляют собой пленчатые бесструктурные образования, плотно прилегающие к среднему толстому слою экзины. Средний слой экзины имеет сложную столбчатую (?) структуру. Поверхность тела — крупнобугорчатая; бугорчатость особенно резко выражена на спинной части тела, где средний слой экзины сильно утолщается, образуя щит — гребень. Гребень прекрасно виден при боковом положении зерна.

При увеличении в 750 раз можно обнаружить, что поверхность зерна сложная. Помимо крупных бугорков, она снабжена мелкими бугорками, которые процируются крупноточечным рисунком.

Средний слой экзины несколько утончается к боковым частям зерна, а верхний и нижний отслаиваются в виде воздушных мешков. Границы между мешками и телом можно наблюдать только при строго полярном положении зерна — мешками вверх; в боковой же и полярной проекциях мешками вниз граница между телом и воздушными мешками неразличима. Граница между мешками и телом улавливается лишь по наличию угла в месте пересечения линии очертания тела и мешков. Наличие этого угла в служит одним из признаков для отнесения *Cedrus lazireticulata* к одной секции с современным гималайским кедром. Другим признаком, сближающим описываемый вид с гималайским кедром, является волнистая линия контура тела, а отчасти и мешков.

Воздушные мешки имеют крупноточечную структуру (ячейки сетки неравной величины), сильно вытянуты вдоль осей (высоты) мешков и образуют радиально расположенный рисунок.

Местонахождение: Павлодарское Прииртышье, г. Павлодар, скв. 1, слюдистые глины датского (?) яруса; Приаралье, гора Тас-Аран, тасаранская свита морского эоцена (средний эоцен).

Распространение: меловые и эоценовые отложения Урала, Северного Казахстана, Поволжья и Нижнего Дона; морские эоценовые отложения Приаралья.

Cedrus piniformis sp. nov. (pollen)

Табл. IX, рис. 1—4
 Препараты № 198 $\frac{H}{K}$, 146 $\frac{H}{K}$

Г о л о т и п: Павлодарское Прииртышье, оз. Кемир-Туз, вторая свита континентального олигоцена (средний олигоцен, препарат № 198 $\frac{H}{K}$).

Общая длина зерна от 65 до 75 μ ; длина тела от 48 до 55 μ , высота от 40 до 50 μ ; высота воздушных мешков 25—30 μ , ширина их 30—40 μ .

Тело округло-эллипсоидальное, в очертании — правильная окружность или овал. Экзина тела мелкобугорчатая, образует щит на большей части тела. Щит переходит без резких границ на поверхность мешков, границы прикрепления которых на спинной и боковых частях тела плохо различимы. Брюшная часть тела имеет более тонкую экзину с бугорчатой скульптурой, отличающейся от плотной мелкой бугорчатости щита. Экзина мешков мелкосетчатая. Часто при увеличении в 450 раз сетчатость различима и рисунок мешков представляется неравномерноточечным. Структура мешков постепенно сливается со структурой щита, и точечный или поясчатый рисунок мешков без резкой границы переходит в бугорчатость щита.

У некоторых экземпляров щит несколько отслаивается в области прикрепления мешков и падает на них в виде валиков, что создает впечатление определенной границы (табл. IX, рис. 4). Воздушные мешки, в том случае, если пыльцевое зерно расположено в полярной проекции мешками вверх, имеют округлые очертания. В боковой проекции мешки выдаются за пределы тела весьма слабо. Иногда можно наблюдать едва заметный угол между линиями очертания тела и воздушных мешков. Последнее и послужило причиной для того, чтобы назвать приведенный тип зерен *Cedrus piniformis*.

Пыльца *Cedrus piniformis* отличается от пыльцы современного вида — *C. deodara* — значительно меньшими размерами, менее резко выраженным гребнем, мелкобугорчатой структурой щита и отсутствием четкой сетчатой структуры воздушных мешков.

При беглом просмотре пыльца *C. piniformis* может быть легко принята за пыльцу *Pinus* из секции *Banksia* или *Australes*, но при более тщательном изучении удается обнаружить один наиболее резко отличающий их признак: наличие верхнего слоя экзины, который общим покровом облекает и тело и воздушные мешки пыльцевого зерна.

М е с т о н а х о ж д е н и е: см. голотип.

Р а с п р о с т р а н е н и е: эоцен — олигоцен Приаралья; эоцен — средний олигоцен Павлодарского Прииртышья; эоцен — олигоцен южной части Западно-Сибирской низменности.

Cedrus Janschinii sp. nov. (pollen)

Табл. IX, рис. 5—7
 Препараты № 170 $\frac{H}{K}$

Г о л о т и п: Павлодарское Прииртышье, г. Павлодар, скв. 1, слоистые глины подглауконитовой толщи (верхний мел — палеоген).

Общая длина зерна около 115 μ ; длина тела около 100 μ , высота около 79 μ ; высота воздушных мешков около 20 μ , ширина их около 60 μ . Гребень широкий.

Тело имеет эллипсоидальную форму, в очертании — овал (фиг. 31, 2). Очертание пыльцевого зерна в боковой проекции — эллипс с незначительными выпуклостями на брюшной стороне тела, образованными

отслоением экзины в виде воздушных мешков. Экзина двуслойная. Внешний слой тонкий и бесструктурный, нижний толстый и имеет столбчатую структуру. Экзина облекает все тело толстым слоем и только на брюшной стороне, в области зародышевой борозды, однослойна. Щит трудно выделить, так как граница между двуслойным участком экзины на спинной части зерна и однослойным на брюшной выражена неясно. Поверхность экзины мелкосетчатая на спинной стороне зерна и крупносетчатая на участках мешковидных отслоений экзины. В боковой проекции участки отслоившейся экзины изображаются радиально заштрихованными. В боковой проекции экзина гребня имеет четкую поперечную штриховатость, которая и переходит в крупную радиальную штриховатость воздушных мешков.

М е с т о н а х о ж д е н и е: пыльца описанного вида впервые обнаружена автором в отложениях верхнего мела Павлодарского Прииртышья. Р а с п р о с т р а н е н и е: эоцен — нижний олигоцен Северного Приаралья, верхний мел — эоцен Павлодарского Прииртышья.

Cedrus parvisaccata Z a c e r

Табл. IX, рис. 8—10
 Препараты № 186 $\frac{H}{K}$

Общая длина зерна от 55 до 75 μ ; длина тела от 55 до 70 μ ; ширина его 45—50 μ , высота тела 50—60 μ ; высота воздушных мешков от 10 до 17 μ , иногда до 25 μ ; ширина от 25 до 30 μ , иногда до 35 μ ; ширина гребня около 2,5 μ , иногда до 4 μ .

Форма тела, в общем сфероидальная, в боковой проекции имеет очертание, близкое к трапеции, расположенной большим основанием к спинной части тела (фиг. 31, 2). Воздушные мешки отходят от брюшной части тела.

Экзина двуслойная. Верхний слой облекает и тело и мешки общим покровом. В боковой проекции можно наблюдать поперечную штриховатость на спинном участке зерна (щит?). Поверхность тела мелкобугорчатая, но бугорчатость не всегда четко выражена. Границы щита улавливаются плохо. Экзина на брюшной поверхности зерна покрыта неравномерно разбросанными бугорками. Воздушные мешки имеют мелкосетчатую структуру. Зародышевая борозда довольно четко выделяется в виде прогиба на брюшной стороне зерна при боковой проекции и в виде более светло окрашенного участка экзины — при полярной проекции, мешками вверх.

Воздушные мешки при боковом положении зерна имеют полуокруглые очертания. Высота мешков обычно меньше ширины их. Воздушные мешки отходят от тела широкими основаниями.

Н. А. Болховитина (1953, стр. 87, табл. XIII, рис. 9—12) приводит описание пыльцы *Cedrus libaniformis* из песков верхнего альба в Западном Казахстане. По очертанию тела пыльца *C. libaniformis* B o l c h. сходна с некоторыми разновидностями *C. parvisaccata* Z a c e r, но по строению и форме мешков они значительно различаются. У пыльцы *C. libaniformis* B o l c h. мешки представляют собой выросты утолщенного и радиально истерченного слоя экзины, подобно тому, как это наблюдалось у *C. Janschinii*. Воздушные мешки у *C. parvisaccata* имеют сетчатую структуру и, кроме того, они гораздо более четко отделяются от тела. Окраска пыльцевых зерен *C. libaniformis* B o l c h. значительно темнее, чем у *C. parvisaccata*.

М е с т о н а х о ж д е н и е: Павлодарское Прииртышье, пос. Парамовка, скв. 2, глины с растительными остатками из подглауконитовой толщи (верхний мел — палеоген).

Распространение: верхний мел — нижний, средний олигоцен Павлодарского Прииртышья (глины с растительными остатками и лигнитовые глины из верхних слоев чеганской свиты). Подобная пыльца отмечается также в альбских горизонтах верхнего мела в Западном Казахстане, встречается также в песках нижнего готерива в Крыму, в альбских и сеноманских отложениях восточного склона Урала и в среднем меле Западной Сибири.

Cedrus pusilla Zaue

Табл. X, рис. 1—5

Препараты № 170 $\frac{3}{K}$ и 1 $\frac{3a}{K}$

Общая длина около 70 μ ; высота тела около 50 μ , ширина 50—60 μ (иногда больше); ширина воздушных мешков около 30 μ , высота от 20 до 30 μ ; ширина гребня 3—4 μ .

Тело имеет правильную эллипсоидальную форму, в очертании — правильный овал (см. табл. X, рис. 1—4). Мешки отходят от брюшной стороны тела, иногда несколько сдвинуты по бокам, что, повидимому, происходит в результате деформации (фиг. 31, 1).

Экзина общим покровом облекает и тело и воздушные мешки. На спинной части тела экзина двуслойная, а на брюшной — однослойная. Верхний слой экзины непосредственно переходит на камеры воздушных мешков.

Поверхность тела крупнобугорчатая, бугорчатость переходит и на воздушные мешки, экзина которых имеет одновременно неясносетчатую структуру.

Вследствие того, что структура экзины тела и воздушных мешков различна, граница отслоения последних выражена довольно четко. Легче всего обнаружить эту границу при боковом положении пыльцевого зерна. Если же зерно расположено в полярной проекции, мешками вверх, то можно обнаружить зародышевую борозду, которая выделяется в виде светлой полосы между воздушными мешками. Контур тела на спинной части волнистый из-за бугристой поверхности экзины. У некоторых экземпляров экзина спинной части несколько утолщается в месте отслоения воздушных мешков и образует подобие валика над мешками. В таких случаях можно отметить наличие границы щита.

Форма воздушных мешков полусферовидная; высота мешков немного меньше ширины их. У большинства экземпляров мешки не заполнены воздухом и смяты в произвольные складки; это придает пыльце *C. pusilla* некоторое сходство с пыльцой *Dacrydium* из сем. Podocarpaceae. Пыльца *Cedrus pusilla* особенно близка к пыльце *Dacrydium elatum* Wall. по морфологическим признакам¹. Различием пыльцы этих видов служит фестончатая складчатость у воздушных мешков *D. elatum*, у пыльцы же *C. pusilla* складки имеют произвольные направления, а мешки по форме близки к мешкам пыльцы рода *Pinus*.

Местонахождение: Павлодарское Прииртышье, г. Павлодар, скв. 1, глины с растительными остатками в подглауконитовой толще (предположительно датский ярус); Северное Приаралье, гора Тас-Арау, груболистоватые глины среднего эоцена (тасаранская свита).

Распространение: по данным В. В. Зауер, вид *C. pusilla* в отличие от *C. parvisaccata* имеет ограниченное вертикальное распространение. Находки *C. pusilla* она отмечает лишь в палеоценовых отложениях Западной Сибири. По нашим наблюдениям, этот вид имеет не столь малое вертикальное распространение, он встречается в небольшом количестве

¹ Пыльца *Dacrydium elatum* описана Эрдином (1943) и Зауер (1950).

в эоценовых, палеоценовых и в массе в верхнемеловых отложениях Павлодарского Прииртышья, а также в эоцене и в нижнем олигоцене Северного Приаралья. Находки пыльцы, морфологически сходной с этой формой, но под иными названиями упоминаются разными авторами в спорово-пыльцевых спектрах Западного и Северного Казахстана, от верхнего мела до эоцена включительно.

Cedrus aff. libani L a w s.

Табл. X, рис. 6

Препарат № 170 $\frac{H}{K}$

Общая длина зерна 80—90 μ ; высота тела около 50 μ ; высота воздушных мешков от 30 до 40 μ , ширина их 45—50 μ ; высота гребня 3—4 μ .

Тело эллипсоидальное. Очертание в боковой проекции овальное. Общее очертание пыльцевого зерна несколько приближается к очертанию пыльцы *Pinus*. Зародышевая борозда неясно выражена.

Экзина двуслойная, внутренний слой значительно тоньше наружного, который имеет ясно выраженную столбчатую структуру, определяющую поперечную штриховатость гребня. Поверхность тела — мелкобугорчатая почти на всем зерне, за исключением брюшной стороны, где скульптура экзины резко меняется, переходя в неравномерную, редкую и мелкую, иногда плохо различимую бугорчатость, приближающуюся к шагреневатости. На боковых частях тела экзина не утоньшается, у некоторых экземпляров она даже несколько утолщается и затем отслаивается в виде воздушных мешков.

Камеры мешков крупные, экзина их — с крупносетчатой структурой. На боковых частях мешков поверхность экзины имеет мелкобугорчатую скульптуру, вследствие чего граница отслоения мешков в этих участках незаметна. На брюшной поверхности бугорчатая скульптура на мешках исчезает, сетка видна более четко и поэтому граница между мешками и телом видна яснее. Сетка на мешках крупная, но не такая четкая, как у пыльцы *Pinus*. Ячейки сетки неправильной формы и размеры их неравномерны. Понадобятся экземпляры с неясно выраженной сеткой.

По общему облику пыльца *Cedrus aff. libani* почти тождественна пыльце ныне живущего *C. libani* L a w s. (табл. VII, рис. 5, 6), описанной В. В. Зауер (1950, 1954).

Местонахождение: Павлодарское Прииртышье, пос. Парамоновка, скв. 2, слюдяные глины с растительными остатками (верхний мел — палеоцен).

Распространение: Северный Казахстан, верхний мел — олигоцен; Приаралье, олигоцен.

Современный вид *Cedrus libani* L a w s. (табл. VII, рис. 5, 6) имеет ограниченное распространение. Растет в Малой Азии и Тавре. Относится к представителям высокогорной флоры и обитает на высоте от 1300 до 2000 м над уровнем моря, где образует леса вместе с *Abies cilica* и *Juniperus foetidissima*. Современный ливанский кедр — наиболее холодоустойчивый из всех сохранившихся сейчас представителей рода *Cedrus*.

Cedrus longisaccata sp. nov. (pollen)

(ex. gr. *C. libani* formis Bolch.)

Табл. X, рис. 7

Препарат № 170 $\frac{H}{K}$

Голотип: Павлодарское Прииртышье, пос. Парамоновка, скв. 1, слюдяные глины и глины с растительными остатками из датского яруса (мел — палеоцен).

Общая длина зерна от 70 до 90 μ ; длина тела 40—50 μ ; ширина 30—40 μ ; высота 50—52 μ ; высота воздушных мешков 35—40 μ , ширина 35—40 μ ; высота гребня 5—7 μ .

Тело округлое. Очертание тела в боковой проекции приближается к округло-треугольному, с широким основанием, обращенным к спинной части. Схематически общие очертания зерна изображены на фиг. 30, б.

Экзина облекает все зерно, отслаиваясь в виде воздушных мешков, не имеющих четких внутренних границ. Экзина двуслойная: нижний слой — более тонкий; верхний, образующий камеры воздушных мешков, — более толстый.

Воздушные мешки находятся по бокам тела и сильно оттянуты в бок и вниз. В боковом сечении мешки имеют треугольные очертания. Сильно утолщенная экзина на спинной части зерна образует щит. Когда зерно расположено в боковой проекции, то ясно виден гребень, имеющий хорошо выраженную поперечную исчерченность. Контур гребня крупноволнистый. На теле зерна скульптура поверхности экзины складчато-бугорчатая, в месте отслоения воздушных камер бугорчатость исчезает. Экзина камер мешков имеет струйчато-сетчатую структуру, ячейки сетки сильно вытянуты по длинной оси камер — мешков.

Пыльца, подобная *Cedrus longisaccata*, описана Н. А. Болховитиной (1953, стр. 87, табл. XIII, рис. 9—12) из отложений серых косослоистых песков в глинистой толще верхнего альба (мел) под названием *C. libaniformis*. Безусловно, оба эти вида относятся к одной секции и принадлежат к растениям близких видов (возможно, разновидностям одного вида?), но большинство экземпляров пыльцевых зерен *Cedrus longisaccata* крупнее. Кроме того, камеры воздушных мешков *C. longisaccata* значительно сильнее оттянуты по высоте и отличаются характерным треугольным очертанием. В остальном пыльцевые зерна *C. longisaccata* sp. nov. и *C. libaniformis* Bolch. близки.

Местонахождение: см. голотип.

Распространение: Крым, Северный и Западный Казахстан, от верхнего мела до эоцена; Приаралье — эоцен.

Род *Pinus* L. — Сосна

В спорово-пыльцевых спектрах палеогена Казахстана и Приаралья род *Pinus* представлен большим числом видов. Эти виды отличаются один от другого рядом специфических морфологических признаков, позволяющих в большинстве случаев сопоставлять их с современными видами. Конечно, далеко не все встречаемые формы удавалось привести к естественной системе, но большая часть ископаемых форм все же настолько близка к современным видам, что нельзя не признать их родственных связей. Очевидно, что многие из обнаруженных форм принадлежали к растениям, которые были непосредственными предками ныне живущих видов. Наряду с ними встречаются и такие формы, которые не находят себе аналогов среди современной флоры. К последним принадлежит, например, пыльца, относимая издавна к подроду *Haploxylois*; у этой пыльцы воздушные мешки прикреплены к телу широкими основаниями, очертание тела (в полярной проекции) представлено почти правильным овалом, угла между линией очертания тела и мешков нет.

Рудольф (Rudolph, 1935) назвал пыльцу хвойных без ясно отделяющихся воздушных мешков — *Pinus Haploxylois* тур., подчеркивая этим сходство ее с пыльцой современных сосен, принадлежащих к подроду *Haploxylois*. Действительно, например, *Pinus pumila*, относящаяся к подроду *Haploxylois*, имеет пыльцу с воздушными мешками, нерезко отделяющимися от тела и прикрепленными широкими основаниями, а у *Pinus*

silvestris, относящегося к подроду *Diploxylois*, воздушные мешки резко отделяются от тела и прикреплены к нему суженными основаниями.

При сравнительно невысоком уровне изученности пыльцы современных растений к 1935 г., классификация ископаемой пыльцы сосен по признаку способа прикрепления воздушных мешков была приемлемой. В настоящее же время, когда изученность пыльцы современных растений сильно продвинулась, выяснилось, что пыльца различных видов сосен, принадлежащих к той или иной секции, имеет ряд других определяющих их систематическую принадлежность признаков, и способ прикрепления мешков к телу далеко не основной среди них. Выяснилось, например, что пыльца многих видов *Pinus*, принадлежащих к подроду *Diploxylois*, имеет мешки с широким основанием, а у пыльцы некоторых видов *Pinus* из подрода *Haploxylois* воздушные мешки прикреплены к телу суженными основаниями. Выяснилось также, что среди пыльцы современных видов сосен аналога ископаемым пыльцевым зернам, обозначавшимся как *Pinus Haploxylois* — тур., нет, но, возможно, что эта пыльца принадлежит одному из предков современных кедровых сосен.

Все виды пыльцы рода *Pinus*, встречающиеся нами в кайнозойских отложениях Казахстана, можно разделить на две группы (фиг. 32):

1) пыльца с неявно выраженными границами между телом и мешками, с овальным очертанием, с плотно прилегающими к телу воздушными мешками (небольшое число видов);

2) пыльца с ясно выраженными контурами границ прикрепления воздушных мешков к телу (большинство видов).

Первая группа в изученных отложениях представлена только близкими по строению тремя разновидностями, отнесенными нами к одному виду — *Pinus protocembra* sp. nov. (pollen) (фиг. 32, 1, 2).

Вторая группа представлена десяткой морфологически различными формами, принадлежащими, по аналогии с современными видами, к двум под родам — *Haploxylois* и *Diploxylois* (фиг. 32, 3—21). Некоторые виды пыльцы этой группы по ряду морфологических признаков определялись по естественной системе.

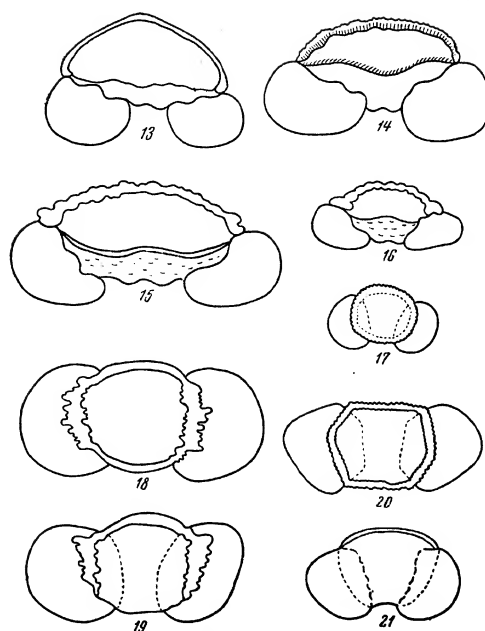
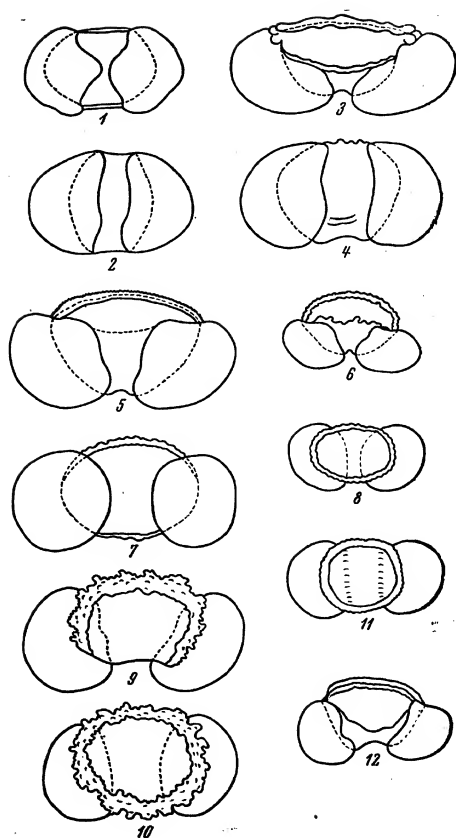
Таким образом, по аналогии с современными видами выделена пыльца сосен, принадлежащих к секциям *Cembrae* Spach., *Strobus* Shaw., *Pseudostrobus* Endl., *Sula* Mayr., *Banksia* Mayr., *Taeda* Spach., *Austroales* Loud., *Eupitys* Spach. и *Paracembrae* Koehe (?). Эти секции включают представителей видов, аналогов которых в ряде случаев удалось найти среди ископаемой пыльцы.

За сравнительный материал брались такие разновидности пыльцы современного вида, которые имели нестандартные признаки, так как именно такие разновидности всегда имеют большее сходство с ископаемой пыльцой. По-видимому, в большинстве случаев различные отклонения от стандарта в общем строении пыльцевого зерна служат проявлением «атавизма».

Некоторые виды ископаемой пыльцы остались непривязанными к естественной системе, так как им не были найдены аналоги среди современных представителей. Возможно, в дальнейшем, когда знание пыльцы современных сосен будет расширено, и эти виды смогут быть привязаны к естественной системе; в этом случае их видовые названия должны быть изменены.

ПОДРОД *HAPLOXYLOIS* КОЕВНЕ
Секция *Cembrae* Spach.

Пыльцевые зерна, отнесенные к секции *Cembrae*, характеризуются следующими основными морфологическими признаками (фиг. 32, 1—3):



Фиг. 32. Схематическое изображение основных типов пыльцевых зерен рода *Pinus*, выделенных из палеогеновых отложений Павлодарского Прииртышья и Северного Приаралья.

1, 2—секция *Sembrac*; 3, 4—*Pinus koraiensis*; 5, 6—*P. sibirica*; 7, 8—*P. microsibirica* sp. nov. (pollen); 9, 10, 11—секция *Strobus*; 12—секция *Banksia*; 13—секция *Taeda*; 14, 15—секция *Sula*; 16—*Pinus minus* sp. nov. (pollen); 17, 18—секция *Pseudostrobus*; 19—секция *Australis*; 20—секция *Eupitys*; 21—секция *Eupitys*; (1, 2, 3, 4, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 даны в полярной проекции, остальные — в боковой).

- 1) тело эллипсоидальной формы, очертание в боковой проекции округлое, овальное или близкое к трапециевидному;
- 2) экзина тела двуслойная, оба слоя обычно одинаковой толщины; obviously ясно выраженный шит с достаточно четкой границей;
- 3) ниже щита, на брюшной части тела, обычно ясно выражена структура;
- 4) мешки прикреплены к телу широкими основаниями и сильно смещены к боковым сторонам тела;
- 5) гребень на спинной части тела волнистый, у большинства экземпляров несколько утолщается над границей прикрепления мешков, образуя так называемые «плечики»;
- 6) сетка на мешках крупная и четкая.

Pinus cembraformis sp. nov. (pollen)

Табл. X, рис. 8—13
Препарат № 191

Г о л о т и п: Павлодарское Припытыше, верхние горизонты чеганской свиты (нижний олигоцен).

Общая длина зерна около 75, иногда до 85 м; длина тела от 45 до 50 м, ширина 45—50 м, высота 44—48 м; ширина воздушных мешков 30—35 м, высота их от 35 до 40 м; высота гребня 1,4—3 м.

Тело эллипсоидальное, округлое, несколько уплощенное. Очертание в боковой или полярной проекциях округло-овальное или трапециевидно-овальное. Воздушные мешки — по сравнению с телом довольно крупные, иногда несколько уплощенные. Мешки прикреплены к телу широкими основаниями и сильно смещены к боковым сторонам тела. Экзина тела на спинной и большей части боковых поверхностей двуслойная, что обуславливает наличие щита. Контуры щита не всегда ясно выражены, на некоторых экземплярах край щита заметен в виде волнистой линии. На брюшной части тела экзина однослойная. При боковом положении зерна хорошо виден неширокий двуслойный поперечноштриховатый гребень равномерной ширины по всей длине тела. У некоторых зерен гребень сильно утолщается в области прикрепления воздушных мешков. Поверхность спинной и боковых частей зерна (поверхность щита) имеет мелкобугорчатую скульптуру. Контур гребня мелкофестончатый или ровный.

Сетка мешков четкая, у большинства экземпляров хорошо заметная. В основном сетчатость крупная, но мелче сетки у пыльцы современных видов секции *Cembrae*. Размеры ячеек сетки уменьшаются в направлении к основанию мешков.

По общим морфологическим признакам пыльца *Pinus cembraformis* весьма близка к пыльце современного вида *P. cembra* L. Отличается ископаемый вид от современного несколько меньшей величиной и меньшим размером ячеек воздушных мешков (Гричук с соавторами, in litt., табл. III, фиг. 20—22).

От пыльцы *Pinus cembra* L., описанной Эрдтманом (1943), ископаемая пыльца также отличается величиной. Эрдтман для пыльцы *P. cembra* указывает общую величину зерна от 84 до 103 м, что значительно превышает размеры как *Pinus cembraformis*, так и *Pinus cembra* L. (recent).

По-видимому, отклонения размеров пыльцы отдельных разновидностей *P. cembra* велики, а потому величина зерна не может быть принята за основной морфологический признак при определении.

Между прочим, Эрдтман отмечает, что сильные колебания в размерах у пыльцы *P. cembra* замечены еще Фурером (Furere, 1927), Хорманом (Hormann, 1929) и Кайном (Cain, 1940). Последний, по данным Эрдтмана.

отмечает, что размеры пыльцы различных видов сосен очень сильно варьируют, особенно это резко выражено у ископаемой пыльцы.

М е с т о н а х о ж д е н и е: см. голотип.

Р а с п р о с т р а н е н и е: пыльца *Pinus cembraformis* широко распространена в третичных и четвертичных отложениях Европейской и Азиатской частей СССР. В Казахстане и Приаралье в основном приурочена к олигоценным отложениям, достигая максимума в нижних и средних горизонтах. В миоцене пыльца, близкая по морфологическим признакам, упоминается как *Pinus aff. cembrae*.

В настоящее время *P. cembra* L. распространена в горах Средней Европы, в Альпах — от Приморских Альп до Нижней Австрии — и в Карпатах. Образуется леса на склонах гор. Весьма морозоустойчивое и тенелюбивое дерево.

Pinus aff. koraiensis Sieb. et Zucc.

Табл. XI, рис. 1—5
Препараты № 161, 162, 163

Общая длина зерна от 87 до 100 м (за редким исключением — 110 м); длина тела 55—70 м; высота 37—40 м; ширина воздушных мешков от 40 до 50 м, высота около 40 м; высота гребня около 3 м, у некоторых экземпляров до 4 м.

Тело эллипсоидальное, несколько уплощенное. Очертание в боковой проекции трапециевидно-овальное (фиг. 32, 3, 4). Мешки прикреплены широкими основаниями к боковым сторонам тела. Экзина тела двуслойная, образует щит, который закрывает большую часть тела. Лишь на некоторых экземплярах щит более короткий, оставляющий свободной всю брюшную часть тела (табл. XI, рис. 2). Двуслойность экзины не всегда четко выражена. Скульптура поверхности щита бугристая, а поэтому контур гребня мелковолнистый. Толщина гребня одинакова по всей длине за исключением небольших участков в месте прикрепления воздушных мешков, где экзина спинной части утолщается, образуя небольшие «плечики» гребня над мешками. На некоторых экземплярах эти утолщения образуют небольшие складки, радиально расходящиеся к краевым зонам воздушных мешков (в месте их прикрепления к телу).

Воздушные мешки несколько уплощены и в боковой проекции имеют овальные очертания. Мешки прикреплены к телу несколько суженными или широкими основаниями и сильно раздвинуты по бокам тела. Сетка мешков имеет ячейки неравномерной величины. На некоторых зернах удается обнаружить двойную сетку: верхнюю — крупную и нижнюю — мелкую. Большие размеры пыльцевого зерна в целом и воздушных мешков отличают пыльцу *Pinus aff. koraiensis* от *P. cembraformis*. У некоторых экземпляров мешки несколько смяты и сдвинуты к брюшной стороне, но чаще всего это объясняется деформацией зерна при приготовлении препарата.

По морфологическим признакам пыльца *P. aff. koraiensis* сходна с современным видом корейского недр, пыльца которого описана В. П. Гричук (in litt.) и М. Х. Моисосон-Смолиной (1949), она несколько отличается уплощенной формой мешков. М. Х. Моисосон-Смолина характеризует воздушные мешки *P. koraiensis* как правильно сфероидальные, что обуславливается, по ее заключению, тем, что они прикрепляются к телу суженными основаниями.

В. П. Гричук с соавторами, между прочим, отмечает, что у некоторых разновидностей пыльцы *P. koraiensis* мешки действительно прикрепляются не расширенными, а суженными основаниями, но это является своего рода отклонением или исключением. Несколько отлична ископаемая

пыльца *P. aff. koraiensis* от современных видов тем, что мешки ее достаточно четко отделяются от тела, что не всегда наблюдается у пыльцы современного вида.

Местонахождение: Павлодарское Прииртышье, г. Павлодар, глины с растительными остатками из самых верхних горизонтов чеганской свиты (нижний олигоцен).

Распространение: пыльца *Pinus aff. koraiensis* распространена в основном в олигоценовых отложениях Павлодарского Прииртышья, Западной Сибири, Дальнего Востока, в континентальном олигоцене Северного Приаралья и в отложениях миоцена и миоцен-плиоцена Западной Сибири и Павлодарского Прииртышья.

В настоящее время *P. koraiensis* L. (или *P. mandshurica* Rupr.) известна лишь на Дальнем Востоке — в Уссурийском крае, в горах Маньчжурии и на северо-востоке Кореи. В Японии («Деревья и кустарники СССР», 1949) является одним из характерных представителей маньчжурской ботанико-географической провинции.

Растет в ассоциации с *Picea jezoensis*. Предпочитает сухие, открытые места, селится по склонам гор и на повышенных местах.

Pinus microsibirica sp. nov. (pollen)

Табл. XI, рис. 6, 7

Препараты № 162 $\frac{H}{K}$, 163 $\frac{H}{K}$, 164 $\frac{H}{K}$

Голотип: Павлодарское Прииртышье, близ г. Павлодара, чеганские глины (препарат № 164 $\frac{H}{K}$).

Общая длина зерна 50—60 μ ; длина тела 35—45 μ ; высота воздушных мешков около 30 μ , ширина около 30 μ ; высота гребня около 3 μ .

Строение зерна подобно пыльце *Pinus sibirica*. Различие заключается в величине, так как *P. microsibirica* значительно мельче, и в контуре тела, который у пыльцы *Pinus microsibirica* волнистый, что особенно хорошо заметно, если зерно расположено в строго полярной проекции. Тип зерен, подобных *P. microsibirica*, схематически изображен на фиг. 32, 7, 8.

Местонахождение: см. голотип.

Распространение: Павлодарское Прииртышье и Северное Приаралье, олигоцен, преимущественно средний.

Pinus sibirica sp. nov. (pollen)

Табл. XI, рис. 8—10

Препараты № 255 $\frac{H}{K}$, 269 $\frac{H}{K}$

Голотип: Павлодарское Прииртышье, оз. Кемир-Туз, вторая свита континентальных отложений, средний олигоцен.

Общая длина зерна от 89 до 100 μ ; высота тела около 50 μ , длина тела 65—70 μ , ширина 35—45 μ ; высота воздушных мешков 35—40 μ , ширина около 45—50 μ ; ширина гребня около 3 μ .

Тело угловато-эллипсоидальное, очертание в боковой проекции трапециевидно-овальное или овальное (см. близкое схематическое изображение на фиг. 32, 5, 6). Мешки прикреплены к телу широкими основаниями и несколько раздвинуты по бокам. Границы прикрепления мешков выделяются четко. Экины тела двуслойные, слои экины одинаковой толщины. Щит большей частью имеет ясную выраженную бугристо-точечную скульптуру. Поверхность тела имеет ясно выраженную бугристо-точечную скульптуру. Поверхность щита мелкобугристая, контур гребня неясно-мелковолнистый. Гребень имеет поперечную исчерченность на обоих

слоях экины. У гребня одинаковая толщина по всей длине, лишь у некоторых экземпляров гребень несколько расширяется на концах (у места прикрепления воздушных мешков), образуя небольшие утолщения. Сетчатость на воздушных мешках крупная и четкая. Стенки ячеек сетки образованы толстыми шнуровидными выростами. Размеры ячеек одинаковы по всей поверхности мешков.

По внешнему облику и по основным соотношениям размеров элементов зерна пыльца *P. sibirica* почти тождественна современной пыльце *P. sibirica* (Rupr.). Маур, которую неоднократно описывали В. В. Зауер (1950), М. Х. Монозон-Смолина (1949) и В. П. Гричук с соавторами (in litt.).

От вида, описанного В. В. Зауер, ископаемый вид *P. aff. sibirica* отличается лишь большей величиной, что, по-видимому, объясняется применением различных методов обработки. Пыльца, описанная нами, В. П. Гричуком и М. Х. Монозон-Смолиной, обрабатывалась ацетилирующей смесью, а у В. В. Зауера описана пыльца, обработанная щелочью.

Местонахождение: см. голотип.

Распространение: Северное Приаралье, средний эоцен (нижняя тасаранская свита); Павлодарское Прииртышье, нижний и средний олигоцен; единично — континентальные отложения верхнего олигодена Западной Сибири, Турция и Павлодарское Прииртышье.

В основном вид приурочен к континентальным отложениям — песчаным, гравийно-песчаным и грубообломочным. В морских отложениях находки единичны.

Pinus sibirica распространена в северо-восточной части СССР (до Енисея и до 68°30' с. ш.), в Северной Монголии, в Саянах, на Алтае и Урале.

Pinus sibirica — типичное равнинное растение. *P. sibirica* является в настоящее время одним из двух видов сосен, которые принимают участие в растительном покрове Казахстана. Кедровая сосна («сомырсы» по-казахски) в настоящее время в Казахстане распространена ограниченно и обнаружена только на востоке, у верхней границы лесного пояса на Алтае и в Сауре, у оз. Маркакуль (Павлов, 1947).

Разновидностью *Pinus sibirica* sp. nov. (pollen) более древнего происхождения является, по-видимому, пыльца, обнаруженная в Приаралье, в слонх эоценовых глин горы Тас-Аран.

Pinus ex gr.¹ P. sibirica (Rupr.) Maug.

Табл. XI, рис. 11, 12

Препарат № 2 $\frac{H}{K}$

Общая длина зерна около 75 μ ; высота тела около 45 μ , ширина около 35 μ ; высота воздушных мешков около 40 μ , ширина 30—35 μ ; ширина гребня около 3,5 μ .

Тело угловато-эллипсоидальное. Очертание в боковой проекции трапециевидно-овальное, в полярной — овальное. Зародышевая борозда ясно выражена. Поверхность щита мелкобугристая. Граница щита ясно выражена в виде тонкого валика по краям его. Большая часть тела гладкая и лишена структуры. Мешки прикреплены к телу широкими основаниями и сильно раздвинуты по бокам. Сетка на мешках крупноячеистая, неравномерная. Гребень двуслойный, нижний слой несколько толще верхнего. Отличается от пыльцы *P. sibirica* более толстым внутренним слоем экины в области щита, вытянутым по высоте воздушными мешками и меньшим размером пыльцевого зерна в целом.

¹ ex gr. (ex grege) — из группы.

Местонахождение: Северное Приаралье, гора Тас-Аран, тасаранские глины среднего эоплена. Пыльца встречена в общем комплексе тропической флоры с *Cedrus*, *Atacagiacae* и миртовыми.

По-видимому, к той же группе *Pinus ex gr. sibirica* (R u r.) M a y r. Следует отметить пыльцевые зерна, обнаруженные в эопленовых отложениях также в Приаралье, несколько меньших размеров и худшей сохранности (табл. XI, рис. 13; препарат № 2 $\frac{3\mu}{K}$).

Общая длина зерна 96 μ ; длина тела 57 μ ; высота 38 μ ; высота воздушных мешков 45 μ , ширина 40 μ ; высота гребня 1,5—2 μ .

Тело неправильно эллипсоидальное, несколько уплощенное на спинной поверхности. Очертание в боковой проекции трапециевидно-овальное, в полярной — овальное. Мешки прикреплены по диаметру или несколько суженным основанием.

Граница щита ясно выражена, щит покрывает тело до половины. Нижняя граница щита тело имеет точечную поверхность. Структура и скульптура эскины из-за плохой сохранности зерна выражены неясно. Эскина щита двуслойная, но двуслойность ее не всегда ясно просматривается. Сетка мешков неясная, ячейки сетки крупные, стенки ячейки иногда прерывистые.

Местонахождение: Северное Приаралье, гора Тас-Аран, тасаранские эопленовые глины.

Распространение: подобная пыльца, кроме эопленовых отложений в Приаралье, отмечена автором в нижнем и среднем палеоцене в Поволжье.

Pinus protocembra sp. nov. (pollen)

Табл. XII, рис. 1, 2

Препарат № 191 $\frac{H}{K}$

Голотип: Павлодарское Припиртышье, близ г. Павлодара, скв. 1, верх чеганских глин (верхние горизонты нижнего олигоцена).

Пыльца, подобная *P. protocembra*, известна по следующим литературным данным:

1935. *Pinus Haploxyton* Typ. R u d o l p h. Microfloristische. Untersuchung tertiärer Ablagerungen im Nördlichen Böhmen, Taf. IX, Fig. 1.
1940. *Picea Thiergart*. Die Mikropaläontologie als Pollenanalyse im Dienst der Braunkohlenforschung, Taf. IV, Fig. 13.

Общая длина зерна от 80 до 100 μ ; длина тела 60 μ , ширина 50 μ , высота 50 μ ; высота воздушных мешков около 40 μ , ширина 50—55 μ ; высота гребня около 3 μ (иногда до 5 μ).

Форма зерна, включая и тело и мешки, эллипсоидальная; в очертании — правильный эллипс. Форма тела округло-овальная; очертание: в полярной проекции — правильный эллипс, а в боковой — угловато-овальное. Мешки имеют форму правильных полушарий, посаженных на боковые части тела по большему диаметру. Подобные пыльцевые зерна приближаются к типу, изображенному на фиг. 32, I, 2.

Эскина облекает все тело. Границ щита не видно. Толщина эскины равномерна по всей поверхности тела; двуслойность обнаруживается редко. Контур тела мелковолнистый, иногда ровный.

Эскина мешков плотная и толстая, в поперечной проекции края ее обнаруживают исчерченность. Сетка мешков очень мелкая и равномерная. Величина ячеек сетки заметно уменьшается, переходя в неясноточечный рисунок по направлению к внутренней части мешков.

Местонахождение: см. голотип.

Распространение: Павлодарское Припиртышье, мел — средний олигоцен; Западная Сибирь, Северное Приаралье, эоплен — средний олигоцен; Дон и Нижняя Волга, олигоцен — миоцен; Северный Кавказ, Украина, Западная Германия, миоцен. Представитель растительности ксерофильного облика. Появление и распространение вида связано с некоторым осушением и похолоданием климата в палеогене. В плиоцене встречается в виде единичных зерен. В современной флоре аналогов нет.

По ряду морфологических признаков можно допустить, что пыльца описанной формы относится к растениям, которые были прародителями современной *Pinus cembra*. Пыльца, близкая по форме, но гораздо худшей сохранности, встречается в континентальных отложениях четвертой свиты в Павлодарском Припиртышье. Описание ее приводится ниже.

Pinus ex gr. protocembra

Табл. XII, рис. 3

Общая длина зерна 60—75 μ ; ширина тела 40—45 μ ; высота воздушных мешков около 40 μ (иногда 35 μ), ширина 40—45 μ (иногда до 50 μ); гребень не обнаружен. Форма всего зерна в полярной проекции приближается к эллипсоидальной; очертание — почти правильный овал. Мешки имеют сетку, но не всегда ясно выраженную. В остальном пыльца близка по форме и очертаниям к пыльце *Pinus protocembra*.

У некоторых экземпляров сетка на мешках неясная и иногда прощупывается в виде штриховатого рисунка.

Местонахождение: Павлодарское Припиртышье, оз. Кемпир-Туз, несчадо-гравийные отложения четвертой свиты континентального олигоцена.

Распространение: вид широко распространен в континентальных отложениях от среднего мела до плиоцена Азиатской и особенно Европейской части СССР. Обычно этот вид пыльцы соев в списках ископаемых пыльцы и спор обозначается как *Pinus Haploxyton*.

Секция *Strobilus* Shaw.

Пыльца, отнесенная к секции *Strobilus*, имеет следующие особенности (схематическое изображение пыльцы этого типа дано на фиг. 32, 9—12):

- 1) тело угловато-эллипсоидальное с трапециевидно-овальным очертанием в боковой проекции и с угловато-округлым — в полярной;
- 2) зародышевая борозда выражена неясно;
- 3) воздушные мешки прикреплены к телу суженным основанием и смещены к брюшной стороне тела;
- 4) эскина тела двуслойная; щит в большинстве случаев имеет довольно четкие границы;
- 5) гребень обычно волнистый, двуслойный; нижний (внутренний) слой значительно тоньше внешнего;
- 6) на брюшной части тела, свободной от щита, большей частью заметна структура;
- 7) сетка на воздушных мешках ясная и четкая.

Pinus strobiformis sp. nov. (pollen)

Табл. XII, рис. 4—8

Препараты № 170 $\frac{H}{K}$, 161—163 $\frac{H}{K}$ и 1 $\frac{3\mu}{K}$

Голотип: Павлодарское Припиртышье, пос. Парамоновка, скв. 1, глины с растительными остатками, верхний мел (препарат № 170 $\frac{H}{K}$).

Пыльца, имеющая морфологическое сходство, известная по литературным данным:

1933. *Pinus strobiptites* W o d e h o u s e. Tertiary pollen. The oil shales of the eocene Green River formation, p. 485, fig. 7.

Общая длина зерна 75—90 м; длина тела 47—55 м, высота 30—40 м; ширина воздушных мешков около 30 м, высота 30—45 м; высота гребня около 3 м.

Тело эллипсоидальной формы, очертание в боковой проекции овальное или трапециевидно-овальное.

Экзина тела двуслойная, образует щит на большей поверхности тела. На спинной части толщина щита значительно больше, чем на боковых. Щит несколько нависает над воздушными мешками в месте прикрепления их к телу и образует неравномерные складки. Гребень двуслойный, несколько расширяется в области прикрепления мешков. Поверхность щита мелкобугорчатая. Ниже щита поверхность тела неяснобугорчатая. Контур тела мелковолнистый, на боковых частях волнистость переходит в фестончатость, контур гребня волнистый.

Воздушные мешки сферические, прикреплены к телу суженными основаниями, несколько смещены на брюшную сторону. Сетка на мешках мелкая, равномерная, четкая. Ячейки сетки имеют округло-угловатое очертания.

Основные диагностические признаки описываемой пыльцы совпадают с признаками *Pinus strobus* L., приведенными в работе В. П. Гричука с соавторами. Пыльца современной *P. strobus* неоднократно микрофотографировалась и многие снимки почти тождественны с микрофотографиями ископаемых видов одноименной секции. Пыльца *P. strobus* характерна тем, что все основные морфологические признаки, принятые для пыльцы секции *Strobus* у нее сильно смягчены и выражены слабее, чем у остальных видов (*P. excelsa*, *P. ayacahuite*, *P. peuce* и др.). Среди пыльцевых зерен современной *P. strobus* много разновидностей, которые при беглом просмотре могут быть легко приняты за крупную пыльцу *P. silvestris*. Поэтому при определении ископаемого материала следует относиться чрезвычайно внимательно к замеру всех основных элементов зерна, а также тщательно рассмотреть способ прикрепления воздушных мешков и характер структуры щита и гребня. Как известно, щит и гребень у пыльцы *P. silvestris* выражены слабо, а мешки прикреплены на боковых частях тела. Эти признаки отличаются от пыльцы *P. strobus*. Кроме того, несмотря на то, что пыльца *P. strobus* является наиболее мелкой формой из секции *Strobus*, все же величина ее значительно превышает величину наиболее крупных пыльцевых зерен *P. silvestris*.

Местонахождение: см. голотип.

Распространение: пыльца *Pinus strobiiformis* встречается в основном в отложениях верхнего мела и в палеогене юга Азиатской и Европейской части СССР, а также в олигоцене Северной Америки. Прекрасной сохранности пыльца. *P. strobiiformis* встречается в Приаралье (Тас-Аран, тасаранские глины, средний эоцен) и в континентальных эоценовых отложениях месторождения Аму-Тасты (восточный борт Тургайского прогиба). В более высоких горизонтах третичных отложений *Pinus strobiiformis* сменяется пыльцой *P. aff. strobus*, которая продолжает встречаться вплоть до нижнечетвертичных отложений.

В настоящее время *P. strobus* L. (веймутова сосна) растет в Северной Америке, в Манитобе (Канада), в Северной Индии, Иллинойсе, на о. Ньюфаундленд, вдоль Аппалачских Альп. По данным В. П. Малеева (1940), *P. strobus* образует леса преимущественно на песчаной или на

свежеглинистой почве. Дерево боится засух и чаще растет в зонах со сравнительно умеренными климатическими условиями.

Pinus peuceformis sp. nov. (pollen)

Табл. XII, рис. 9—12

Препарат № 1 К

Голотип: Северное Приаралье, Тас-Аран, глины морского среднего эоцена.

Общая длина зерна 70—90 м; высота тела 40—50 м, ширина 45—50 м; ширина воздушных мешков от 40 до 45 м, высота 35—40 м; ширина гребня от 3—4 м.

Форма тела — близкая к эллипсоидальной, в редких случаях несколько вытянутая. Очертание в боковой проекции трапециевидно-овальное, в полярной — округло-овальное (фиг. 32, 11, 12).

Мешки сферические, прикреплены к телу суженными основаниями и несколько смещены на брюшную сторону тела. У некоторых экземпляров при полярном положении зерна создается впечатление, что мешки прикреплены к телу широким основанием. Экзина тела двуслойная и на большей поверхности его образует щит, который на спинной части несколько утолщается. Граница щита неясная. Гребень двуслойный, нижний слой тоньше верхнего. Поверхность тела в области щита сильно бугристая, что обуславливает волнистый контур гребня. На спинной части зерна контур гребня из волнистого становится правильнофестончатым. Сетка на мешках густая, некрупная, с округлыми ячейками, размеры которых значительно уменьшаются к основанию мешков.

Пыльца из гербарного сбора (*Pinus peuce* G r i s.) описана сотрудником Гидропрокта (in litt.). По очертанию и другим морфологическим признакам ископаемая пыльца, отнесенная к виду *Pinus peuce*, имеет большое сходство с современными представителями этого вида. Ископаемый вид отличается от современного большей величиной мешков. Некоторые экземпляры по относительно большой величине воздушных мешков сходны с пыльцой современной *Pinus taeda* L. Следует отметить, что среди пыльцы современной *P. peuce* также встречаются разновидности с крупными воздушными мешками, которые и имеют наибольшее сходство с пыльной *P. peuceformis*.

Местонахождение: см. голотип.

Распространение: вид довольно широко распространен по вертикали. Первые экземпляры *P. peuceformis* встречены автором под г. Павлодаром, в глинах с растительными остатками, относимых К. В. Никитиной к верхнему мелу (табл. XII, рис. 9). В том же районе этот вид встречен в нижних горизонтах чеганских глин (табл. XII, рис. 10) и, наконец, тот же вид, с несколько более оттянутыми к брюшной стороне тела воздушными мешками, отмечен неоднократно в верхних горизонтах чеганских глин и в континентальных отложениях среднего и верхнего олигоцена. Исследования приаральского палеогена несколько расширили границы распространения этого вида в широтном отношении — прекрасной сохранности пыльца *P. peuceformis* найдена в тасаранских глинах (средний эоцен А. Л. Яшина). Пыльца описанного вида отмечена в флористических комплексах олигоцена Северного Кавказа, Нижнего Дона, Приазовья, Украины и описана автором из олигоцен-миоценовых углей Пасовского карьера Воронежской обл. Ряд авторов вид под названием *Pinus* sp. упоминают в составе спорово-пыльцевых спектров олигоцен-миоцена Германии.

В настоящее время *P. peuce*, или румелийская сосна, растет на горах Балканского п-ва, на высоте 750—2200 м над уровнем моря, образуя леса

с *P. exelsa*, *Abies alba* и *Pinus silvestris*. Считается выносливой породой в климате средних широт.

Pinus exelsaeformis sp. nov. (pollen)

Табл. XIII, рис. 1—3
Препарат № 253 Н/К

Г о л о т и п: Павлодарское Прииртышье, оз. Кемир-Туз, глины с растительными остатками второй свиты континентального олигоцена (средний олигоцен).

Пыльца, близкая по морфологическим признакам, известная в литературе:

1953. *Pinus aratica* Б о л х о в и т и н а. Спорово-пыльцевая характеристика меловых отложений центральных областей СССР, стр. 83, табл. XII, фиг. 12 и 13.

Общая длина зерна 87—95 м; ширина тела около 50 м, длина тела около 60 м, высота 50—55 м; ширина воздушных мешков 55—57 м, высота 46—52 м; ширина гребня 3,6—3,4 м.

Форма тела близка к сфероидальной или эллипсоидальной. Очертание в боковой проекции округлое или округло-треугольное (на фиг. 31, 9 и 10 приведены близкие схематические изображения подобной пыльцы).

Мешки сфероидальные, прикреплены к телу несколько суженными основаниями и немного сдвинуты к брюшной стороне его. Зародышевая борозда неясно выражена. Экзана тела двуслойная, внешний слой значительно толще внутреннего. Утолщенный слой экзины на спинной и боковых частях зерна образует щит. Граница щита представляется в виде волнистой линии без какого-либо утолщения. У большинства зерен щит несколько нависает над мешками, образуя фестончатый край. Это хорошо наблюдается при полярном положении пыльцевого зерна.

Поверхность щита крупнобугорчатая, собранная в морщинноподобные складки, что особенно резко выражено на периферийных участках спинной части зерна.

Гребень широкий, с крупнофестончатым контуром. Экзана брюшной части тела имеет мелкозернистую структуру, вследствие чего рисунок этой части зерна мелкопунктирный.

Экзана воздушных мешков снабжена ясно выраженной сетчатой структурой. Ячейки сетки вытянуты по высоте мешков. Ячейки крупные (до 5 м), но по направлению к месту прикрепления мешков размеры ячеек уменьшаются и постепенно сетчатость переходит в пестроточечный рисунок. На брюшной поверхности мешков сетка более четкая, чем на спинной.

Воздушные мешки в месте прикрепления к телу образуют радиально расходящиеся складки, которые пронцируются в виде конусообразных тяжей.

Описанный вид имеет большое сходство с пыльцой ныне живущего вида *Pinus exelsa*, а также некоторое сходство с *P. aratica* Б о л х о в и т и н а из верхне-меловых отложений Приаралья. От последнего вида отличается несколько большими размерами и более ясно выраженной границей щита, а также большими размерами воздушных мешков.

М е с т о н а х о ж д е н и е: см. голотип.
Р а с п р о с т р а н е н и е: вид имеет значительное вертикальное и широтное распространение. Встречается в Азиатской и Европейской части СССР — от верхнего мела до олигоцена включительно, упоминается в олигоцене Германии. В Павлодарском Прииртышье встречается от нижнего олигоцена до среднего, где особенно широко развита в отложениях

второй свиты. В Северном Приаралье спорадически встречается от верхнего эоцена до низов среднего олигоцена.

Современное распространение *Pinus exelsa* W a l l. ограничивается Гималаями, от Инда до Бутана, где образует высокогорные леса. Растет в сообществе с *Cedrus deodara*, *Pinus longifolia* и другими видами. Предпочитает влажные места обитания и боится открытых и сухих мест.

Pinus ex gr. *exelsa* W a l l.

Табл. XIII, рис. 4, 5
Препарат № 259 Н/К

Неоднократно при аналитической работе встречается форма, близкая к описанной *Pinus* aff. *exelsa* W a l l., но отличающаяся от нее размерами зерна и воздушных мешков, а также более ярко выраженной скульптурой щита. По аналогии она отождествляется с *P. exelsa* W a l l. Однако указанные выше различия, а также худшая, чем у предыдущего вида, сохранность не позволяют провести полного отождествления их.

Общая длина зерна не превышает 85 м; ширина тела 50—60 м; высота воздушных мешков около 35 м; ширина гребня 3—5 м.

Весьма своеобразные для данного вида воздушные мешки прикреплены к телу суженным основанием к брюшной части тела с незначительным смещением на бока. Последнее несколько сближает форму с пыльцой *Pinus* секции *Banksia*. Гребень двуслойный, внешний слой значительно толще внутреннего. Граница щита выражена неясно. Поверхностный слой экзины щита образует крупнобугорчатую скульптуру, которая обусловливает фестончатую линию очертаний тела. Сетка воздушных мешков выражена неясно. На некоторых экземплярах она почти не определена и процируется в виде неравномерно точечного рисунка. На таких экземплярах сетка иногда образована прерывистыми или точечными утолщениями. В отличие от пыльцы *P. aff. exelsa*, камеры воздушных мешков сильно смяты или образуют складки, радиально расходящиеся от границ с телом.

Некоторые экземпляры пыльцевых зерен *P. ex gr. exelsa* по внешнему облику несколько напоминают пыльцу *P. nigraeformis* Б о л х о в и т и н а или *Oedmosaccus nigraeformis* Н а и т. Сходство это обуславливается наличием складок на воздушных мешках. В то же время наши экземпляры отличаются от *Oedmosaccus nigraeformis* крупными бугорками на щите и, как следствие этого, — крупнофестончатым контуром тела.

М е с т о н а х о ж д е н и е: Павлодарское Прииртышье, оз. Кемир-Туз, обл. 6, верхнеолигоценовые песчано-гравийные слои четвертой свиты континентальных отложений.

Секция *Paracembrae* К о е н н е (?)

Для пыльцы, отнесенной к секции *Paracembrae*, характерно угловато-эллипсоидальное тело с ромбoidalно-округлым очертанием в полярной проекции. Мешки крупные, округлые, несколько угловатые в очертании, прикреплены к телу широкими основаниями. Камеры воздушных мешков сильно надвинуты на тело. В ископаемом состоянии встречен только один вид из секции *Paracembrae* в меловых отложениях.

Pinus gerardianaeformis sp. nov. (pollen)

Табл. XIII, рис. 6
Препарат № 170 $\frac{H}{K}$

Г о л о т и п: Павлодарское Прииртышье, близ г. Павлодара, скв. 1, горизонт подглауконитовых слюдястых глин (мел — палеоцен).
Общая длина зерна 75—92 μ ; ширина 40—55 μ ; ширина воздушных мешков 50—60 μ , высота до 50 μ .

Тело неправильно-эллипсоидальной формы, с ромбовидно-округлым очертанием при полярном положении зерна. Экзина двуслойная, с зернистой структурой и мелкобугорчатой скульптурой. Щит покрывает спинную часть тела. Контур тела волнистый или гладкий. Мешки широкие, несколько уплощенные, в полярной проекции имеют угловатые очертания, прикреплены к телу широкими основаниями и сильно надвинуты на тело. Если зерно расположено в полярной проекции мешками кверху, то граница прикрепления мешков просматривается довольно четко вследствие резкого различия в структуре мешков и тела.

Сетка воздушных мешков достаточно четкая, ячейки сетки несколько вытянуты; в области прикрепления мешков к телу они настолько суживаются, что представляются в виде параллельных линий, а не сетки.

М е с т о н а х о ж д е н и е: см. голотип.

Р а с п р о с т р а н е н и е: Ввиду того, что пыльца описанного вида несколько напоминает пыльцу сем. *Podocarpaceae* (ромбовидное очертание тела пыльцы в полярной проекции и диаметр мешков несколько превышающий диаметр тела), надо полагать, что наш вид был неоднократно отмечен многими авторами как *Podocarpus* в отложениях верхнего мела Западной и Восточной Сибири, Урала и Казахстана.

Пыльца типа *Pinus gerardianaeformis* встречается в комплексе с различными видами *Cedrus* и *Cupressaceae*, а также со спорами папоротников тех видов и родов, которые характерны для меловых отложений. Нами вид неоднократно обнаружен в отложениях нижнего палеогена Павлодарского Прииртышья, Приаралья, Тургай и Кара-Тая.

Родина современного вида *P. gerardiana* Wall. — Афганистан, Кафаристан и Западные Гималаи. Там она образует леса вместе с *Cedrus deodara*; предпочитает внутренние долины и приурочена к жаркому и засушливому климату.

ПОДРОД *DIPLOXYLON* КОЕВНЕ
СЕКЦИЯ *Sula* MAUR.

Пыльца, отнесенная к секции *Sula*, имеет сильно вытянутое эллипсоидально-веретенообразное тело с несколько уплощенной спинной частью зерна (схематическое изображение зерен этого типа дано на фиг. 32, 15, 16).

Борода выражена четко. Щит имеет ясно выраженную бугорчатость. Граница щита вырисовывается в виде четкого валика по периферийной части, толщина валика почти вдвое превышает толщину экзины щита.

Воздушные мешки имеют почти эллипсоидальную форму. Если зерно наблюдается в полярной проекции, то мешки представляются несколько сдвинутыми по бокам, если же оно наблюдается в боковой проекции, то обнаруживается, что мешки большей частью сильно сдвинуты к брюшной части тела. Основные морфологические признаки пыльцы, отнесенной к секции *Sula*, совпадают с признаками современной пыльцы этой секции, за исключением размеров. Пыльцевые зерна ископаемых видов значительно меньше (не превышают 50—60—65 μ).

Pinus longifoliaformis sp. nov. (pollen)

Табл. XIII, рис. 7—9
Препарат № 191 $\frac{H}{K}$

Г о л о т и п: Павлодарское Прииртышье, близ г. Павлодара, пос. Парамоновка, скв. 1, чеганские глины морского палеогена (нижний олигоцен).
Общая длина зерна 65 μ ; длина тела 48 μ , высота около 20 μ , ширина 22—25 μ ; высота воздушных мешков 25—28 μ , ширина их около 35 μ ; высота гребня около 3 μ .

Тело неправильно-эллипсоидальное, с трапециевидным очертанием в боковой проекции. Воздушные мешки эллипсоидальные, несколько уплощенные, прикреплены к телу суженным основанием и сильно сдвинуты к брюшной стороне тела. Экзина тела двуслойная, на большей части тела образует щит, границы которого у большинства зерен выражены четко в виде волнистой линии. Встречаются единичные экземпляры, у которых граница щита выражена нечетко, и тогда определение их затруднено. Бугорчатая скульптура щита постепенно теряет четкость в направлении к боковой поверхности тела. На брюшной поверхности экзины сохраняется мелкобугорчатая и неясно выраженная скульптура. Экзина щита двуслойная, нижний слой несколько толще верхнего. Встречаются зерна, у которых оба слоя экзины одинаковой толщины. Поверхность щита на спинной части тела крупнобугорчатая, что обуславливает крупнофестончатый контур его. Гребень выражен четко и сохраняет равную ширину по всей длине; в боковой проекции — поперечно исчерчен.

Экзина воздушных мешков имеет мелкосетчатую структуру; в направлении к основанию мешков ячейки сетки значительно уменьшаются и постепенно переходят в точечный рисунок.

М е с т о н а х о ж д е н и е: см. голотип.

Р а с п р о с т р а н е н и е: пыльца, подобная описанной, встречается как в морских отложениях олигоцена, так и в континентальных горизонтах среднего олигоцена в Павлодарском Прииртышье и Западной Сибири. Присутствие ее отмечено в нижнетретичных отложениях Тургайской впадины. В более древних отложениях не встречается.

Современное распространение *Pinus longifolia* R o x b. приурочено к горам Афганистана и Гималаев. Горный вид.

P. longifolia R o x b. образует чистые леса с подлеском из различных видов *Berberis*, *Cotinus coggigria* и др.

СЕКЦИЯ *Pseudostrobus* Endl.

Пыльца, отнесенная к этой секции, характеризуется эллипсоидальной или угловато-округлой формой тела. В полярной проекции тело имеет округлое очертание, в боковой — трапециевидно-овальное. Экзина тела обычно двуслойная, нижний слой значительно тоньше верхнего. Контур тела (в полярной проекции) волнистый. У некоторых видов волнистый контур приурочен лишь к боковым частям тела. Мешки эллипсоидальные, прикреплены к телу суженными основаниями. Схематическое изображение пыльцы секции *Pseudostrobus* (современной и ископаемой) приводится на фиг. 31, 18 и 19.

Pinus ponderosaformis sp. nov. (pollen)

Табл. XIII, рис. 10—14
Препараты № 1 $\frac{3a}{K}$ и 186 $\frac{3}{K}$

Г о л о т и п: Северное Приаралье, гора Тас-Аран, тасаранские глины (эоцен), нижние отделы тасаранской свиты (препарат № 1 $\frac{3a}{K}$).

Общая длина зерна 60—85 μ ; длина тела 38—45 μ , ширина около 35 μ ; высота воздушных мешков около 35 μ , ширина 36—38 μ ; ширина гребня 1,5—2,5 μ . Встречаются формы значительно меньших размеров.

Тело округло-эллипсоидальное, в боковой проекции трапециевидно-овальное, в полярной — почти правильная окружность. Диаметр тела равен диаметру воздушных мешков или несколько меньше его.

Экзина тела двуслойная в области щита, границы которого не всегда ясно выражены. Нижний слой эскины гладкий и тонкий. Верхний слой гораздо толще нижнего и имеет столбчатую структуру, которая в боковой проекции изображается в виде поперечной штриховки. Поверхность щита равномерно, но слабо бугорчатая. Контур тела в полярной проекции мелкофестончатый. Гребень одинаковой ширины по всей длине, у некоторых экземпляров несколько утолщается в области прикрепления воздушных мешков. В этом случае фестончатый контур тела на боковых его частях выражен яснее, чем в области гребня и брюшной части тела.

Мешки сфероидальные, несколько уплощенные, прикреплены к телу суженными основаниями. Сетка мешков мелкая, ясно выраженная. Ячейки сетки неравномерной величины и формы, по большей части форма их приближается к округлой. Размер ячеек заметно уменьшается в месте прикрепления мешков к телу.

По внешнему облику описанный пылец близка к современной *Pinus ponderosa*, за исключением размеров, которые значительно меньше у ископаемых экземпляров.

В некоторых вариантах ископаемый вид напоминает пыльца современной *P. peuce*, но отличается от нее тем, что его мешки меньше сдвинуты к брюшной стороне и менее уплощены. Кроме того, в отличие от пыльца *P. peuce*, у ископаемого вида фестончатый контур приурочен ко всему периметру тела, а у пыльца *P. peuce* фестончатость особенно ярко выражена на боковых его частях.

Местонахождение: см. голотип.

Распространение: пыльца, подобная *Pinus ponderosaefornis*, встречается в спорово-пыльцевых спектрах опоквой ситы Припирты, в верхнем мелу Казахстана и в эоценовых отложениях Северного Приаралья, Кавказа и юга Европейской части СССР. Единичные находки *P. aff. ponderosa* сделаны в районе восточного борта Тургайской впадины (Аму-Тасты) — континентальные палеоцен-эоценовые отложения.

Современное распространение *P. ponderosa* D o n g l. Каскадные горы в западной части Северной Америки. Вид типично прибрежногорный. Любит сухую и каменистую почву, открытые солнечные склоны. Особенно распространен в горах Сьерра-Невада и в Прибрежных горах. Растет на высоте 1400—2600 м в сообществе с *Pinus Lambertiana*, *Pseudotsuga taxifolia* и *Abies concolor*. Вид — наиболее засухоустойчивый среди прочих видов секции *Pseudostrobus*.

Pinus bicornis sp. nov. (pollen)

Табл. XIV, рис. 1—3

Препараты № 186 $\frac{H}{K}$, 180 $\frac{H}{K}$

Голотип: Павлодарское Припиртыше, пос. Парамоновка, скв. 1, глины с растительными остатками, мел — палеоцен (препарат № 186 $\frac{H}{K}$).

Общая длина тела 60—70 μ , высота 30—35 μ , ширина около 35 μ ; высота воздушных мешков около 25 μ , у некоторых экземпляров до 30 μ , ширина мешков около 30 μ ; ширина гребня 2,5—4 μ .

154

Тело эллипсоидальное, очертание в боковой и полярной проекциях овальное, иногда в боковой проекции — овально-трапециевидное.

Экзина тела двуслойная. Почти на всей поверхности тела, за исключением брюшной части его и участков прикрепления воздушных мешков, экзина образует щит с ясно выраженной границей. В области прикрепления воздушных мешков экзина щита несколько утолщается, образуя бугорчато-складчатые выросты, которые в полярной и боковой проекциях имеют ярко выраженный фестончатый контур. У гребня контур волнистый или гладкий, в проекции — поперечно-штриховатый. Поверхность щита мелко- и слабобугорчатая. Воздушные мешки имеют ясно выраженный сетчатый рисунок. У многих экземпляров сетка двойная: внешняя — более крупная, и внутренняя — более мелкая. Ячейки сетки имеют угловатые очертания, сильно уменьшаются по направлению к периферийным частям, приобретая вытянутую форму.

Мешки прикрепляются к телу несколько суженными основаниями, но у некоторых экземпляров этот признак не выдерживается: прикрепление происходит по широкому основанию мешков.

Ископаемая пыльца имеет большое сходство с пылью *P. Montezumae* Lamb., но также из гербарного материала; есть у нее общие черты и со всеми видами пыльца современных сосен из секции *Pseudostrobus*, отличающейся в основном от пыльца секции *Strobus* наличием фестончатых выростов эскины на боковых частях щита.

Местонахождение: см. голотип.

Распространение: Павлодарское Припиртыше, Западно-Сибирская низменность, верхний мел — палеоцен, единично — нижний эоцен — нижний олигоцен.

Pinus minutus sp. nov. (pollen)

Табл. XIV, рис. 4

Препараты № 161 $\frac{H}{K}$, 162 $\frac{H}{K}$ и 191 $\frac{H}{K}$

Голотип: Павлодарское Припиртыше, пос. Парамоновка, скв. 1, обр. 245, пропластки с растительными остатками в верхнекаменских глинах (препарат № 191 $\frac{H}{K}$).

Общая длина зерна 45—50 μ ; длина тела 30—35 μ , высота — около 25 μ , ширина около 27 μ ; ширина воздушных мешков около 20 μ , высота их около 23 μ ; ширина гребня около 3 μ .

Тело округло-эллипсоидальное, очертание в боковой и полярной проекциях — правильный овал или окружность (схематическое изображение дано на фиг. 31, 16, 17). Экзина двуслойная. Щит покрывает две трети тела; границы щита выражены неясно, поверхность его крупнобугорчатая. Гребень — по отношению к величине тела толстый, одинаковой высоты по всей длине. Контур тела крупнофестончатый; фестончатость особенно резко выражена на боковых частях тела.

Воздушные мешки сфероидальные, прикрепляются к телу суженными основаниями и несколько раздвинуты по бокам. Линия прикрепления мешков ясно выражена. Сетка на мешках мелкая и четкая.

По величине ископаемое пыльцевое зерно резко отличается от всех видов *Pinus* секции *Pseudostrobus*, но остальные морфологические признаки позволяют отнести его к этой секции. Мелкие же размеры зерна служат основанием к тому, чтобы этому виду было дано название *minutus* (т. е. очень маленький).

Местонахождение: см. голотип.

Распространение: *Pinus minutus* появляется в олигоценных отложениях. В Павлодарском Припиртыше отмечен в самых верхних

155

горизонтах нижнего олигоцена (верх чеганской свиты); в Северном Приаралье распространен только в среднем олигоцене.

Секция Taeda Spach.

Пыльца, отнесенная к секции Taeda, имеет эллипсоидальное тело с трапециевидно-овальным очертанием в боковой проекции. Окружные воздушные мешки прикреплены к телу широкими основаниями и несколько сдвинуты к брюшной части тела (фиг. 32, 14). Щит хорошо выражен и отделяется от брюшной части тела рубчиком. Поверхность щита мелкобугорчатая. Гребень узкий, ровный или слегка волнистый, двуслойный, поперечно штриховатый. Слои щита одинаковой толщины. Гребень у некоторых экземпляров имеет по краям большие утолщения. Граница между телом и мешками выражена ясно.

Pinus taedaeformis sp. nov. (pollen)

Табл. XIV, рис. 5—11
Препарат № 1 $\frac{3\alpha}{K}$

Г о л о т и п: Северное Приаралье, гора Тас-Аран, тасаранская свита, верх среднего эоцена.

Общая длина зерна 67—82—90 μ ; длина тела 60—70 μ , высота 46—50 μ ; высота воздушных мешков 25—35 μ , ширина их около 41 μ ; ширина гребня 3—3,5 μ .

Тело овальное или эллипсоидальное, очертание в боковой проекции трапециевидно-овальное. Зародышевая борозда четкая. Экзина тела двуслойная, образует ясно выраженный щит с хорошо заметной границей в виде волнистого или прямого рубчика. Поверхность щита мелкобугорчатая. Ниже щита поверхность тела также мелкобугорчатая, а в области зародышевой борозды — гладкая. По бокам щита на спинной поверхности экзины у некоторых экземпляров заметно небольшое утолщение. Вследствие утолщения щита при боковой проекции обрисовываются так называемые «плечики», характерные также для некоторых видов пыльцы сосен секции *Сетбае*. Гребень относительно узкий, одинаковой толщины по всей длине. У некоторых экземпляров, как упоминалось выше, гребень несколько утолщается по краям (в области прикрепления мешков). При боковом положении зерна различается поперечная штриховатость гребня. Щит двуслойный, оба слоя одинаковой толщины.

Воздушные мешки сфероидальные, несколько уплощенные, прикрепленные к телу суженным (иногда широким) основанием. Обычно мешки прикрепляются по бокам тела, в нижних его частях, так что оказываются несколько сдвинутыми к брюшной стороне. Поэтому расстояние между воздушными мешками, если зерно расположено в полярной проекции, мешками вверх, — небольшое. Сетка мешков мелкая, четкая, равномерная по всей поверхности, в области же прикрепления к телу сильно измельчается и переходит в неясноточечный рисунок.

Пыльца *Pinus taedaeformis* по морфологическим признакам весьма близка к большинству разновидностей пыльцы современного вида *P. taeda*, описанной В. П. Гричуком с соавторами (in litt.) из гербарного материала. Ископаемая пыльца отличается от современной несколько меньшими размерами, что, впрочем, наблюдается и у пыльцы других секций.

М е с т о н а х о ж д е н и е: см. голотип.

Р а с п р о с т р а н е н и е: вид широко распространен в третичных отложениях Казахстана. В Северном Приаралье он дает первый максимум

в саксаульской свите (верхний эоцен) и затем продолжает встречаться в больших количествах вплоть до верхов среднего олигоцена. В Павлодарском Прииртышье и в Западной Сибири вид распространен с середины среднего олигоцена (вторая свита). В более древних отложениях встречаются близкие виды, но из-за отклонения в размерах и плохой сохранности они отнесены к секции Taeda. То же самое можно сказать и о пыльце из отложений четвертой свиты континентальных отложений. Экземпляры, выделенные из отложений четвертой свиты, отличаются меньшей величиной, чем тот же вид в более древних слоях.

Общая длина пыльцевого зерна не превышает 64 μ , при ширине тела, равной 45 μ , и диаметре мешков от 25 до 32 μ . В остальном морфологические признаки ископаемого вида весьма близки к пыльце вида *Pinus taeda* L. Однако в списках она отнесена лишь к секции Taeda.

В настоящее время *P. taeda* распространена в Северной Америке, где образует обширные леса по низменностям и долинам рек.

Секция Australes Loud. (?)

Пыльца, относящаяся условно к секции Australes, имеет тело эллипсоидальной формы с овальным трапециевидно- или ромбовидно-округлым очертанием (в полярной проекции) и с воздушными мешками угловато-сфероидальной формы. Мешки несколько вытянуты по высоте и в полярной проекции имеют очертания угловатые, близкие к треугольным. Прикрепляются воздушные мешки к телу сильно суженными основаниями; граница между телом и мешками четкая. Щит неясно выражен, а если намечается, то покрывает только спинную часть тела, утолщаясь по краям. Контур тела при полярном положении зерна изображается слабоволнистой линией, а экзина тела пропирруется в виде тонкого ободка. Схематическое изображение пыльцы типа секции Australes в полярной проекции представлено на фиг. 32, 20.

Ископаемая пыльца, описание которой приводится ниже, отнесена к секции Australes условно, так как, хотя и имеет общие черты с пыльцой некоторых современных видов в очертании тела и воздушных мешков, в то же время отличается отсутствием ясно выраженного щита на спинной части тела.

Pinus singularis sp. nov. (pollen)

Табл. XIV, рис. 12—16
Препараты № 2 $\frac{3\alpha}{K}$, 255 $\frac{3}{K}$ и 259 $\frac{3}{K}$

Г о л о т и п: Северное Приаралье, гора Тас-Аран, морские глины нижних горизонтов среднего олигоцена (препарат № 2 $\frac{3\alpha}{K}$).

Общая длина зерна около 95 μ ; длина тела 47—56 μ , высота около 45 μ , ширина около 55 μ ; ширина воздушных мешков 50—58 μ , высота около 48 μ ; ширина гребня 1,5—3 μ .

Тело сфероидальное или эллипсоидальное; в полярной проекции — овальное, а иногда трапециевидного очертания. Экзина тела двуслойная, оба слоя одинаковой толщины. На спинной части тела экзина образует небольшой щит, который не имеет резко выраженных очертаний, а незаметно сливается с мелкобугорчатой скульптурой боковых поверхностей тела. Структура экзины зернистая. Поверхность щита мелкобугорчатая или мраморовидно-бугорчатая. На боковых поверхностях тела, в тех участках, где щита нет, рисунок поверхности крупноточечный. Гребень узкий и одинаковой толщины по всей длине или совсем отсутствует.

В том случае, когда он намечается, контур его мелкофестончатый; тогда в боковой проекции хорошо видна поперечная штриховатость гребня. Контур тела в области прикрепления мешков мелкофестончатый. Эта особенность наблюдается у пыльцевых зерен из наиболее молодых горизонтов палеогена; эоценовые экземпляры обычно лишены заметных выступов на боковых сторонах тела.

Воздушные мешки сфероидальные, несколько вытянуты по высоте, прикреплены к телу суженными основаниями и в полярной проекции имеют у большинства пыльцевых зерен угловатые очертания. Последнее относится к разновидностям, выделенным из наиболее высоких горизонтов палеогена (табл. XIV, рис. 13 и 14).

Более древние формы имеют мешки с очертанием в виде почти правильной окружности.

Сетка на мешках четкая и мелкая. Форма ячеек близка к прямоугольной; ячейки обычно сильно вытянуты по высоте мешков и постепенно переходят в радиальную штриховатость.

Пыльца *Pinus singularis* имеет некоторое сходство с *Pinus palustris* Mill. из гербарного материала. Некоторым отличием от нее могут служить более угловатые очертания формы тела и воздушных мешков, а также значительно более толкая экзина тела. Следует отметить, что пыльца многих современных видов рода *Pinus* имеет значительные отклонения и вариации в размерах и форме зерен внутри одного и того же вида. В некоторых случаях основная масса зерен имеет спон специфические особенности, которые дают право почти с полной уверенностью давать видовое определение. В целом же ряде случаев среди пыльцевых зерен, принадлежащих к одному виду *Pinus*, лишь небольшая часть зерен имеет классическую форму, остальные же имеют неясные признаки вида. Тогда при характеристике вида приходится базироваться на морфологических особенностях ясно выраженных типов зерен. Примерно 70% пыльцы *Pinus palustris*, выделенной из коллекций гербарного материала, обладают характерными признаками, которые взяты в основу при определении. Остальные зерна имеют сильные отклонения как в форме и очертаниях, так и в размерах. Пыльца *Pinus singularis* сходна с той частью пыльцевых зерен *Pinus palustris*, у которых воздушные мешки имеют угловатые очертания и тонкую экзину на теле.

Местонахождение: см. голотип.

Распространение: форма, имеющая большое сходство с *P. singularis*, но под названием *Pinus* секции *Eurypis* или *Pollenites* тур. *Pinus silvestris* встречается в олигоценовых отложениях Западной Европы, на юге Европейской части СССР, на Урале, в Казахстане. В Приаралье пыльца этого вида встречается в отложениях тасаранской свиты (эоцен), в виде единичных зерен в спектрах из негалиских отложений, а также в континентальных отложениях Приаралья и Припиртыньи.

Современное распространение *Pinus palustris* Mill. в основном приурочено к районам Северной Америки. *Pinus palustris* не любит горных районов и является деревом равнинных местообитаний, с сухими песчаными почвами. Образует чистые светлые леса, в подлеске которых часто встречается пальма *Sabal serrulata*.

Секция *Banksia* Mayr.

Для пыльцы, отнесенной к секции *Banksia*, характерны небольшие размеры, эллипсоидальное тело, которое в боковой проекции имеет угловато-эллиптическое очертание с дугообразным выгибом на спинной части. Воздушные мешки, сфероидальные или полусфероидальные, прикреплены к брюшной поверхности тела узкими или широкими основаниями.

У некоторых экземпляров мешки имеют угловатые очертания. Щит у большинства экземпляров имеет ясно выраженную границу. Гребень узкий, почти одинаковой толщиной по всей длине, контур гребня мелкофестончатый или ровный. Экзина на спинной части зерна (щит) двуслойная, в большинстве случаев нижний слой экзины несколько толще верхнего (схематическое изображение пыльцы этого вида дано на фиг. 32, 13).

Пыльца, принадлежащая к секции *Banksia*, неоднократно упоминается в литературе при описании спорно-пыльцевых спектров из отложений третичного и мелового возраста.

Pinus banksianaeformis sp. nov. (pollen)

Табл. XV, рис. 1—4

Препарат № 186 $\frac{H}{K}$

Голотип: Павлодарское Припиртыньи, пос. Парамоновка, скв. 1, глины подглауконитовой толщи (мел — палеоген).

Общая длина зерна 60—75 м; длина тела около 48 м, высота около 25 м, ширина 23—25 м; высота воздушных мешков около 22 м; высота гребня 1,5—2 м.

Тело эллипсоидальное, угловато-эллиптическое в боковой проекции. Спинная часть тела дугообразно выгнута. Экзина двуслойная, оба слоя одинаковой толщины. Слой настолько незаметно переходит один в другой, что граница между ними улавливается с трудом. Щит покрывает спинную часть тела и большую часть боковых его поверхностей. Граница щита в виде волнистой линии проходит по нижней части боковой поверхности тела; иногда граница неясная. Поверхность щита мелкокрамовидно-бугорчатая. Гребень тонкий, одинаковой толщины по всей длине, имеет поперечную штриховатость и почти ровный контур. У части встречающихся пыльцевых зерен заметны небольшие утолщения экзины в области прикрепления воздушных мешков.

Воздушные мешки, сфероидальные или полусфероидальные, мелкие по сравнению с величиной тела, прикреплены к брюшной части тела. Сетка на мешках мелкая и неясная. В месте прикрепления мешков к телу сетка постепенно деформируется, и рисунок поверхности мешков становится таким же мелкоточечным, как и бугорчатая поверхность тела.

Ископаемая пыльца имеет внешнее сходство с современной пылью *Pinus Banksiana* Lam. B., отличающаяся от нее более угловатыми очертаниями мешков и тела и менее ясной сеткой на мешках. Кроме того, гребень у ископаемых видов несколько уже, чем у современных.

Некоторые формы, весьма близкие по общим морфологическим признакам, но отличающиеся большей величиной, наличием ясно выраженной сетки на мешках и более округлым очертанием тела, выделены из тасаранских глин выходящих на горе Тас-Аран в Северном Приаралье. Форму эту автор встречал только в отложениях эоценового возраста в Приаралье и в опокных среднееоценовых глинах в Павлодарском Припиртыньи.

Изображение *Pinus banksianaeformis* из эоценовых отложений см. на табл. XV рис. 3 и 4. Форма выделена, зарисована и микрофотографирована с препарата № 2 $\frac{H}{K}$.

Местонахождение: см. голотип.

Распространение: формы, морфологически близкие к *Pinus banksianaeformis*, имеют, по-видимому, широкое распространение в меловых отложениях, ведя свое начало еще со среднего мела. В литературе можно встретить упоминание о подобной форме в верхнемеловых отложениях Среднего и Южного Урала, Западной Сибири, Казахстана и в южных

и западных районах Европейской части СССР. Отмечена на западе Европы, в мезозойских и нижних отделах кайнозойских отложений. Форма, близкая к *P. banksianaeformis*, описана Н. А. Волховитиной (1953, табл. XII, фиг. 9, 10 и 11) под названием *P. subconcinua* N a и m. (*Oedemosaccus subconcinua* N a и m).

Современный вид *Pinus Banksiana* L a m b. распространен в Северной Америке (в основном в Канаде). Это самый северный вид сосен Северной Америки. *P. Banksiana* L a m b. морозостойчива, селится на песчаных почвах; образует большие леса. Возможно, что описанный нами вид был также наиболее холодоустойчив, так как появляется он в спектрах переходного горизонта от мела к палеогену, который, как известно, знаменуется относительным похолоданием.

Pinus aff. *halepensis* Mill.

Табл. XV, рис. 5

Препарат 3 $\frac{3\text{я}}{\text{К}}$

Общая длина зерна 73—80 μ ; длина тела 48—52 μ , высота 22—30 μ ; высота воздушных мешков 25—30 μ , ширина 25—31 μ ; ширина и высота гребня 2—3 μ .

Тело эллипсоидальной формы, с овальным или эллиптическим очертанием в боковой проекции. Экзина двуслойная. На спинной и большей части боковых поверхностях экзина образует щит. Граница щита представлена извилистой линией. Край щита слегка утолщен. Поверхность щита мелко-плоскобугорчатая. Гребень неширокий, двуслойный; нижний слой несколько толще верхнего. Ширина гребня одинаковая по всей длине, контур его почти ровный, иногда в виде слабо волнистой линии. Поверхность тела вне щита мелкобугорчатая, бугорчатость неясная.

Воздушные мешки сфероидальные, слегка уплощенные, прикреплены к телу несколько суженным основанием и несколько сдвинуты на брюшную часть тела. Граница прикреплений мешков к телу четкая. Сетка мешков ясная и четкая. Ячейки сетки крупные, форма ромбовидная. По направлению к месту прикреплению мешков к телу размер ячеек сильно уменьшается.

Описанный вид отличается от пыльцы *Pinus banksianaeformis* менее угловатыми очертаниями тела и мешков, более крупной и четкой сеткой. Вид, выделенный нами из палеогеновых отложений, имеет близкое сходство с пыльцой ныне живущего вида *P. halepensis*, от которой отличается лишь несколько меньшей величиной.

Местонахождение: Северное Припалье, гора Тас-Аран, морские глины тасаранской свиты (средний эоцен).

Распространение: пыльца *Pinus* aff. *halepensis* встречается только в тасаранской свите (средний эоцен) в Северном Припалье.

Современный вид *Pinus halepensis* Mill. распространен в западной части Средиземноморской области. Любит равнинные местообитания, на больших высотах появляется редко.

Секция *Euripus* Spach.

Пыльца, отнесенная к секции *Euripus*, имеет округло-эллипсоидальное тело с правильным трапециевидно-овальным очертанием в боковой проекции (фиг. 32, 21). Экзина тела двуслойная, оба слоя почти всегда одинаковой толщины. Щит не имеет рубчика по границе; граница выражена слабо волнистой линией. Гребень гладкий или очень слабо волнистый. Мешки у пыльцы *Pinus* секции *Euripus* — правильной сфероидальной формы, прикреплены к телу суженным основанием и несколько сдвинуты к брюшной стороне его. Сетка на мешках четкая.

Pinus protosilvestris sp. nov. (pollen)

Табл. XV, рис. 7

Препарат № 191 $\frac{\text{Н}}{\text{К}}$

Голотип: Павлодарское Припиртыше, близ пос. Парамоновка, в 16 км западнее г. Павлодара, скв. 1, обр. 245, верхние отделы чеганских глин (верх нижнего олигоцена).

Общая длина зерна 90—105 μ ; длина тела 60—70 μ , высота 45—55 μ , ширина 42—50 μ ; высота воздушных мешков 36—45 μ , ширина их 40—42 μ ; ширина гребня 4,0—4,5 μ .

Тело эллипсоидальное, очертание в боковой проекции — близкое к трапециевидному, в полярной — правильно-овальное. Экзина двуслойная, слою одинаковой толщины. Щит покрывает только спинную часть тела. Граница щита изображается почти прямой линией. Рубчик по краю щита отсутствует. Зародышевая борозда выражена неясно. Экзина ниже щита, на боковых и брюшной частях тела, почти гладкая, иногда неясноточечная. Поверхность щита неясномраморовидная. Гребень — одинаковой ширины по всей длине. Контур гребня мелкоизвилистый, почти ровный; в боковой проекции хорошо видна поперечная штриховатость.

Воздушные мешки сфероидальные, немного уплощены по высоте, прикреплены к телу суженным основанием и несколько сдвинуты на брюшную часть тела. Когда пылевое зерно находится в полярном положении мешками вверх, то, из-за того, что мешки сдвинуты на брюшную сторону, иногда создается ложное впечатление, будто они прикреплены к телу широким основанием. Сетка на мешках выражена неясно, ячейки сетки неравномерной величины. На центральных частях мешков рисунок сетки улавливается при увеличении в 400 раз, на периферийных же участках рисунок ее измывается и постепенно сливается с точечной структурой тела. Линия прикреплений мешков к телу четкая. Угол между линией очертания тела и мешков (в месте их прикреплений) выражен ясно, в особенности, если зерно находится в боковом положении.

Ископаемая пыльца по морфологическим признакам имеет сходство с пыльцой ныне живущей *Pinus pinaster* Sol., описанной В. П. Григучем с соавторами (in litt.); отличается *P. pinaster* менее ясно выраженной сеткой мешков, более уплощенной формой камер мешков и большими размерами.

Местонахождение: см. голотип.

Распространение: Павлодарское Припиртыше, палеогеновые морские и континентальные отложения. В других местах неизвестна. Возможно, что не была распознана и из-за своих крупных размеров принималась аналитиками за пыльцу ели или пихты.

Современное распространение вида *Pinus pinaster* Sol. с пыльцой которой можно сравнить ископаемый вид сосны приморской, приурочено к странам Средиземноморской области и к южной части европейского побережья Атлантического океана. Селится по берегам моря, любит сухие каменистые почвы и дюны.

Появление пыльцы *Pinus protosilvestris* в морских отложениях верхних отделов чеганских глин, т. е. в то время, когда чеганское море уже заканчивало свой цикл на изучаемой территории и вскоре начало отступать, можно связать с явлениями поднятия береговых участков и с образованием отmelей и прибрежных дюн, наносимых сильными ветрами. По-видимому, появление пыльцы *P. protosilvestris* также связано с усиливающейся аридизацией климата.

Pinus aff. silvestris L.

Табл. XV, рис. 8—11, 13
 Препараты № 161 $\frac{H}{K}$, 162 $\frac{H}{K}$ и 163 $\frac{H}{K}$

Общая длина зерна 72—75 μ ; длина тела около 55 μ , высота 35—42 μ , ширина 32—40 μ ; ширина воздушных мешков 25—27 μ , высота их 24—30 μ ; ширина гребня около 2,5 μ .

Тело эллипсоидальное, с трансеивидно-эллипсоидальным очертанием в боковой проекции. В полярной проекции тело имеет очертание правильного овала. Экзина двуслойная, образует на спинной и отчасти на боковых частях тела щит. Поверхность щита мелкобугорчатая, границы его не всегда ясно выражены. Гребень узкий, поперечно исчерченный, одинаковой толщины по всей длине, контур гребня почти ровный. Двуслойность экзины даже в области гребня плохо различима.

Воздушные мешки прикреплены к телу узким основанием и сильно сдвинуты на брюшную часть. Линия границы прикрепления мешков выражена четко. Сетка на мешках четкая, ячейки не крупные; они одинакового размера по всей поверхности мешков и только у самой границы прикрепления мешков к телу диаметр их значительно уменьшается.

Ископаемый вид имеет большое сходство с пылью современной сосны *Pinus silvestris* L., разновидности которой описаны М. Х. Монозон-Смолиной (1949), В. В. Зауер (1950) и В. П. Грицуком с соавторами (in litt.). Наш вид по размерам близок к наиболее крупным разновидностям пылицы современной *P. silvestris*.

Местонахождение: Павлодарское Прииртышье, скв. 1, глины нижних горизонтов континентальных отложений (средний олигоцен) и верхние горизонты чеганских глин (нижний олигоцен).

Пыльца ископаемого вида *Pinus aff. silvestris* значительно варьирует в размерах в зависимости от стратиграфического положения находок. Так, большинство экземпляров пылицы *P. aff. silvestris* размером 50—65 μ и менее приурочено к плиоценовым и четвертичным отложениям (табл. XV, рис. 14, 15, 16).

Разновидность пылицы *Pinus aff. silvestris* L. несколько больших размеров, подобная изображенной на табл. XV, рис. 12, с несколько более крупной сеткой, встречается в спектрах из самых нижних отделов палеоцена (препарат № 180 $\frac{H}{K}$). Возможно, что правильнее называть его не

Pinus aff. silvestris, а *P. silvestriiformis*. С другой стороны, почти тождественное сходство с пылью современной *Pinus silvestris* позволяет сопоставлять ее с этим видом, допуская раннее появление *Pinus* секции *Eurpitu* во флоре кайнозоя.

Распространение: пыльца *P. aff. silvestris* — один из наиболее распространенных видов пылицы всего рода *Pinus*, в неогеновых отложениях Европейской и Азиатской части СССР. Однако вид известен из отложений палеогена (верхов его) Азиатской и Европейской части СССР в виде единичных находок. Обычен в миоцене Европы и западной части СССР. Широко распространен в плиоценовых отложениях Европейской части СССР. В Казахстане встречается в больших количествах, преимущественно в среднем и верхнем олигоцене, в миоцене, миоцен-плиоцене и в четвертичных отложениях.

Современное распространение *Pinus silvestris* весьма обширно. Границы ее ареала распространяются вдоль всего материка Евразии, исключая Дальневосточный край, от 70 до 50° с. ш. При этом она имеет весьма большой широтный диапазон, встречаясь от равнинных мест до горных райо-

нов. Один из наиболее распространенных видов рода в северном полушарии, также обычное и почти единственное древесное растение южных степей.

Род *Tsuga* Сатт. — Тсуга

Пыльца растений, принадлежащих к роду *Tsuga*, имеет сфероидальную форму. Размер пыльцевых зерен варьирует от 50 до 110 μ в зависимости от принадлежности к виду. Тело пыльцевого зерна обложено в морщинистую оболочку, более или менее равномерно отслаивающуюся от тела. В проекции отслаивающаяся, собранная в складки или морщинистая оболочка образует как бы кайму вокруг тела с неровным фестончатым контуром. Контур неравномерно поперечно исчерчен, что обусловлено проекцией стенок складок экзины.

Если морщинистые или складки глубокое, то поверхность зерна имеет крупносетчатую структуру [*Tsuga diversifolia* (Machim.) Mast.]. Сетка эта является результатом проекции ребер складок на экзине. Некоторые виды *Tsuga* имеют бугорчатую экзину, не смятую в складки [*Tsuga canadensis* (L.) Satt., описанная В. В. Зауер в 1950 г.].

В ископаемом состоянии пыльца *Tsuga* встречается в верхнепалеогеновых отложениях Европейской части СССР, в третичных отложениях Урала, в плиоцене Поволжья. В большом количестве встречается в миоценовых отложениях Европейской части СССР и на Южном Урале.

Автором найдены два вида пылицы *Tsuga* в Северном Казахстане и в Северном Прииртышье, в отложениях первой и второй свит континентального олигоцена, т. е. в среднем олигоцене, а также в более высоких горизонтах олигоцена и в миоцене. В спектрах, содержащих пыльцу *Tsuga*, кроме хвойных, обычно присутствует пыльца широколиственных пород, в основном принадлежащих к листопадному комплексу, что свидетельствует о сравнительно умеренно влажных условиях обитания. В континентальных отложениях Казахстана выделено два вида пылицы *Tsuga*: крупная и мелкая. Крупная пыльца близка по морфологическим признакам к пылице современной *Tsuga diversifolia* (по описаниям Эрдмана, 1943, и Зауер, 1950). Однако ясно выраженная сетчатость на поверхности ископаемого зерна, обусловленная сравнительно симметрично расположенными морщинами экзины, не позволяет полностью отождествить этот вид с современным видом. Ввиду того, что пыльца современных растений *Tsuga* еще недостаточно изучена, осторожнее будет ископаемым формам присвоить видовое название по морфологическим признакам. Это название, систематическое в отношении родовой принадлежности и искусственное в отношении принадлежности к виду, следует считать временным (это касается всех видовых наименований ископаемой пылицы кайнозойских отложений), так как со временем, изучив пыльцу ныне живущих растений, мы сумеем большинство искусственно выделенных видов привести к системе.

Tsuga crispata sp. nov. (pollen)

Табл. XVI, рис. 1
 Препараты № 342 $\frac{H}{K}$

Голотип: Павлодарское Прииртышье, р. Кара-Су, обн. 13, слоистые глины с растительными остатками первой свиты континентальных отложений (средний олигоцен).

Диаметр пыльцевого зерна 99 μ , толщина оторочки 6—8 μ , толщина экзины 0,7 μ .

Пыльца *Tsuga crispata* sp. близка по строению к современной *T. diversifolia*; отчасти близка она и по строению морщинистой экзины (крупная

кружевная складчатость), но так как к настоящему времени из 14 современных видов пыльцы *Tsuga* нам известны только 3, то отождествлять ее с *T. diversifolia* преждевременно.

В спорово-пыльцевых спектрах *T. crispa* sp. nov. сопутствует разнообразному и богатому комплексу различных видов сосны и *Taxodium*, а также, большому и разнообразному комплексу широколиственных листопадных пород.

Местонахождение: см. голотип.

Распространение: Павлодарское Припиртыше и Северное Приаралье, средний и верхний олигоцен, нижний миоцен.

Tsuga torulosa sp. nov. (pollen)

Табл. XVI, рис. 3
Препарат № 431 К

Голотип: Павлодарское Припиртыше, р. Кара-Су, обн. 13, слой глины с пропластками отмытого песка (первая свита, средний олигоцен). Диаметр пыльцевого зерна 49,5 м, толщина оторочки 6 м, толщина экзины 1 м.

Строение оболочки этого вида пыльцы резко отличается от такового у современной пыльцы *T. diversifolia*. Экзина у пыльцевого зерна *T. torulosa*, помимо складчатости, имеет бугорчатую структуру. Поэтому на поверхности зерна не обнаруживается, как у *T. diversifolia*, сетчатого рисунка; поверхность ископаемого зерна слегка напоминает поверхность пыльцы *Sciadopitys*, отличающейся от нее наличием более мелких бугорков.

Пыльца *T. torulosa* имеет некоторое сходство с пыльцой ныне живущего вида *T. canadensis*, но отличается от него меньшими размерами (диаметр *T. canadensis*, по описанию В. В. Зауер, 53—63 м), а также более мелкой бугристостью экзины.

Местонахождение: см. голотип.

Распространение: Павлодарское Припиртыше, средний — верхний олигоцен.

В ископаемом состоянии пыльца *T. torulosa* встречается в сообществе с *Pinus* секции *Strobus*, *Abies*, *Carpinus*, *Liquidambar*, *Quercus tuberculata* и др., что свидетельствует о сравнительно умеренном климате.

СЕМ. TAXODIACEAE W. NEGER — ТАКСОДИЕВЫЕ

Пыльца ископаемых видов, относимых к сем. Taxodiaceae, имеет однокammerное строение. Воздушные мешки отсутствуют. В основном пыльцевые зерна округлой формы, однопорные и безбороздные, за исключением рода *Sciadopitys*, пыльца которого лишена поры и снабжена одной зародышевой бороздой. Размеры варьируют от 23 до 50 м, в зависимости от принадлежности к роду и виду. Большинство родов сем. Taxodiaceae имеет пыльцу, легко сминающуюся и теряющую при захоронении свои первоначальные очертания. Кроме того, пыльцевые зерна часто дают трещину, которая обычно образуется в плоскости порового отверстия, рассекая зерно почти на два полушария. Поровое отверстие у некоторых родов сем. Taxodiaceae (*Taxodium*, *Cryptomeria*, *Sequoia*) снабжено конусообразным выступом экзины. Экзина пыльцевых зерен обычно двуслойная, внешний слой экзины обычно снабжен бугорчатыми или мелкошиповатыми выростами. В редких случаях некоторые разновидности пыльцы таксодиевых имеют гладкую поверхность.

Наиболее хорошо распознаваемы пыльцевые зерна *Taxodium*, *Sequoia* и *Sciadopitys*. Остальные роды этого семейства по пыльце выделяются

с трудом, так как имеют большое сходство с пыльцой растений сем. Cupressaceae.

Ниже выделяется группа неопределенной одноклеточной пыльцы, которая по морфологическим признакам близка как к сем. Taxodiaceae, так и к сем. Cupressaceae.

Род *Sciadopitys* Sieb. et Zucc — Циадопитис

Sciadopitys tuberculata sp. nov. (pollen)
ex gr. *S. verticillata* Sieb. et Zucc.

Табл. XVI, рис. 3
Препарат № 269 К

Голотип: Павлодарское Припиртыше, оз. Маралды, обн. 66, континентальные отложения верхнего олигоцена.

Виды, близкие морфологически, известные по литературным данным:

1934. *Sporites serratus* Potonie Neinitz. Zur Mikrobotanik des miozänen Humodils der Niederösterreichischen Bucht, Taf. I, Fig. 6, 7.
1935. *Sciadopitys typus* Rudolph. Mikrofloristische Untersuchung tertiärer Ablagerungen im Nördlichen Böhmen, Taf. 5, Fig. 14, 15.
1937. *Sciadopitys pollentites serratus* Thiergart. Die Pollenflora der Niederösterreichischen Braunkohle, besonders im Profil der Grube Marga bei Seiftenberg, Taf. 23, Fig. 14.
1940. *Sciadopitys Thiergart*. Die Mikropaläontologie als Pollenanalyse im Dienst der Braunkohlenforschung, Taf. II, Fig. 5; Taf. IV, Fig. 10; Taf. V, Fig. 2.
1942. *Sciadopitys pollentites serratus* Wicher. Praktikum der angewandten Mikropaläontologie, Taf. 28, Fig. 18.

Длина зерна 43—45 м, ширина 30—35 м.

Пыльцевое зерно почти округлое, однобороздное, беспоровое. Борозда расположена на внешней, дистальной стороне зерна. Зерно большей частью несколько смято и борозда не всегда четко выражена. Экзина двуслойная, нижний слой тоньше верхнего. Общая толщина экзины около 5 м. Внешний слой экзины снабжен или, вернее, состоит из крупных (до 4,5 м в диаметре) бугорков, вершины которых несколько уплощены. Бугорки расположены плотно один к другому и проекция их с поверхности выглядит крупносетчатой. Контур зерна крупнофестончатый. Пыльца *Sciadopitys tuberculata* sp. nov. по внешнему облику несколько напоминает пыльцу современного вида *S. verticillata* Sieb. et Zucc., описание которого приведено в работе В. В. Зауер (1950), однако бугорки на его поверхности значительно крупнее.

Местонахождение: см. голотип.

Распространение: пыльца *Sciadopitys* весьма распространена в неогеновых отложениях Западной Европы и Европейской части СССР. В вертикальном отношении *Sciadopitys* имеет довольно широкий диапазон, встречается в комплексе спектров пыльцы хвойных от низов палеоцена до плиоцена. По-видимому, этот вид имел достаточно большое распространение и в широтном направлении. Автором пыльца *Sciadopitys* найдена в палеоцене среднего и нижнего Поволжья, на Дону и в Приазовье, а также в среднеолигоценовых отложениях Казахстана. В поволжских палеогеновых спектрах встречается разновидность пыльцы *Sciadopitys* с несколько более мелкой бугорчатостью. В Казахстане же встречаются только крупнобугорчатые формы, подобные *Pollentites serratus* Potonie, с которыми наш вид имеет почти полное сходство, за исключением того, что он несколько меньше.

По данным В. В. Зауер, крупные остатки деревьев, по морфологическим признакам напоминающие зонтичную сосну (*Sciadopitys*), найдены еще в меловых отложениях Гренландии.

Насколько широко был распространен род *Sciadopitys* и насколько он был богат видами, — это по пыльцевым данным еще неясно. Во всяком случае, по-видимому, род *Sciadopitys* в достаточной мере древний. В настоящее время он представлен всего одним видом — *S. verticillata* Sieb. et Zucc., известным только в Японии.

Sciadopitys verticillata Sieb. et Zucc. — древесное растение с вечнозелеными листьями в виде хвои. Родина его — горная часть Японских островов. Растет в смешанных лесах совместно с *Chamaecyparis obtusa*, *Ch. pisifera*, *Tsuga sieboldii*, *Pinus densiflora*, *Abies firma*, *Aesculus turbinata* и *Magnolia obovata*. Любит защищенные от ветров ущелья и приурочен к областям с прохладным океаническим климатом.

Род *Sequoia* Endl. — Секвойя

Sequoia aff. *sempervirens* sp. nov. (pollen)

Табл. XVI, рис. 4,5

Препарат № 186 $\frac{H}{K}$

Голотип: Павлодарское Прииртышье, пос. Парамоновка, скв. 1. Слюдистые глины из подглауконитовой свиты (верхний мел, датский ярус).

Виды, морфологически близкие, известные по литературным данным:

1940. *Sequoia* Thiergart. Die Mikropaläontologie als Pollenanalyse im Dienst der Braunkohlenforschung Schrift..., Taf. III, Fig. 9, 11; Taf. IV, Fig. 7.
1949. Cf. *Sequoia* (*Pollenites polyformosus* Thiergart) Kremp. Pollenanalytische Untersuchungen des miozänen Braunkohlenlagers von Konin an der Warthe, Taf. V, Fig. 27—29.
1953. *Sequoia* aff. *sempervirens* Заклинская. Описание некоторых видов пыльцы и спор, выделенных из третичных отложений Пасековского карьера Воронежской обл., стр. 74, табл. III, фиг. 33.
1951. *Sequoiapollenites polyformosus* (Thiergart) Potonie. Revision stratigraphisch wichtiger Sporomorphem des Mitteleuropäischen Tertiärs, Taf. XX, Fig. 16, 16a.

Диаметр пыльцевого зерна 32—34 м.

Пыльцевое зерно округлое, однопоровое, безбороздное. Поровое отверстие находится на дистальной (внешней) стороне зерна. В области порового отверстия имеется конический вырост внутреннего слоя экзины, подобный такому же выросту у пыльцы *Taxodium*, но, в отличие от последнего, вырост этот несколько изогнут и имеет наклонное положение. Этот признак является почти исключительно надежным, отличающим пыльцу *Sequoia* от пыльцы *Taxodium*.

Экзина двуслойная, верхний слой неравномерно бугристый. Бугорчатость слабо выражена и почти не отражается на внешней линии очертания зерна.

Во многих случаях пыльца *Sequoia* бывает смята и деформирована, что нередко исключает возможность ее определения. С пыльцой современной *S. sempervirens* Endl. пыльца, выделенная из палеогеновых отложений, почти тождественна, отличаться от нее только тем, что обычно не встречается в разорванном состоянии. Размер ископаемых пыльцевых зерен несколько больше, чем у современных форм.

От пыльцы *S. aff. sempervirens*, описанной из олигоцен-миоценовых углей Пасековского карьера (Заклинская, 1953), пыльца палеогеновой *Sequoia* Казахстана отличается менее выраженной скульптурой экзины.

Местонахождение: см. голотип.

Распространение: ископаемые остатки рода *Sequoia* часто обнаруживаются в третичных отложениях почти во всех пунктах умеренных широт. Находки пыльцы *Sequoia* отмечены на западном склоне Сред-

него Урала и в Казахстане, начиная от верхнего мела. Пыльца ранних видов *Sequoia* отличается от *S. sempervirens* меньшими размерами. В эоцене *Sequoia* принимает значительное участие в составе хвойных и смешанных лесов, а в олигоцене — в составе лесных ассоциаций вместе с остальными хвойными (преимущественно с родом *Pinus*). Пыльца *Sequoia* (*Pollenites polyformosus*), отмеченная в миоцене Германии Кремпом (Kremp, 1949), по совокупности морфологических признаков может быть отнесена также к виду *S. semperviriformis*. В Казахстане пыльца, подобная *S. semperviriformis*, отмечена в верхнем меле, в эоценовых слоях, в чеганских глинах и во второй свите континентальных отложений олигодена. Она же встречается в низах палеогена на Северном Кавказе, Нижнем Дону, Средней Волге и на Южном Урале.

В связи с тем, что пыльца *Sequoia* весьма развита как в широтном, так и в вертикальном направлении, ее коррелирующее значение несколько снижается.

Родиной современного рода *Sequoia* вообще и *S. sempervirens* в частности является Тихоокеанское побережье Америки. Растение приурочено к зоне мягкого умеренного или теплого океанического климата.

Род *Taxodium* Rich. — Таксодий

Taxodium aff. *distichum* (L.) Rich.

Табл. XVI, рис. 7

Препарат № 191 $\frac{H}{K}$

Виды, морфологически близкие, известные по литературным данным:

1934. *Taxodiipollen hiatus* Potonie. Zur Mikrobotanik des miozänen Humdolls der Niederrheinischen Bucht, Taf. 4.
1940. *Taxodiaceae* (*pollen hiatus* Potonie) Thiergart. Die Mikropaläontologie als Pollenanalyse im Dienst der Braunkohlenforschung. Schrift..., Taf. II, Fig. 10; Taf. IV, Fig. 8; Taf. V, Fig. 4; Taf. X, Fig. 8.
1949. *Taxodiaceae* (*pollen hiatus* Potonie) Kremp. Pollenanalytische Untersuchungen des miozänen Braunkohlenlagers von Konin an der Warthe, Taf. V, Fig. 31, 37, 38.
1951. *Taxodiipollen hiatus* Potonie. Revision stratigraphisch wichtiger Sporomorphem des Mitteleuropäischen Tertiärs, Taf. XX, Fig. 17.

Диаметр пыльцевого зерна 35—45 м. Форма зерна сферондальная, в очертании — правильная окружность. Обычно зерно рассечено глубокой трещиной, отходящей от места порового отверстия и разделяющей его на два равных полушария. Пора одна, расположена на дистальной (внешней) стороне зерна, апертура (отверстие поры) образована верхним слоем экзины. В области порового отверстия имеется конусообразный вырост внутреннего слоя экзины, направленный вертикально к поверхности зерна. Длина выступа 1,5—2 м. Вертикально расположенный выступ характерен для пыльцы *Taxodium*, в отличие от наклонного выступа, который характеризует пыльцу *Sequoia*.

Экзина двуслойная, оба слоя одинаковой толщины. Общая толщина экзины не превышает 2 м, чаще она менее 2 м. Поверхность экзины в большинстве случаев гладкая, иногда покрыта невысокими бугорчатыми выростами. Пыльца *Taxodium* в ископаемом виде чаще всего имеет трещину, которая обычно начинается от центра зерна и проходит к периферии в виде широкого сегмента (табл. XVI, рис. 7). Трещина обычно расположена таким образом, что конусовидный выступ поры оказывается на вершине конуса трещины и виден в растворе ее.

По морфологическим признакам пыльца *T. aff. distichum* весьма близка к пыльце современной *T. distichum* (L.) Rich., описанной В. В. Зауер-

(1950). Однако размер пыльца ископаемой формы несколько больше, чем у современной, что позволяет сопоставлять ее с *Pollenites Taxodiaceae* и *Pollenites hiatus* R. P. O. L. O. n. e. из олигоцена Западной Европы.

Следует отметить, что пыльца *Taxodium* по своему строению весьма сходна с пылью *Sequoia* и *Cupressaceae* и во многих случаях различать их чрезвычайно трудно.

Место нахождения: Павлодарское Прииртышье, пос. Парамовка, скв. 1, отложения верхних горизонтов чеганских глин.

В числе пыльцевых зерен, отнесенных к сем. *Taxodiaceae*, попадаются несколько отличных от пыльца современного вида — *Taxodium distichum*. Величина пыльцевых зерен не превышает 30 м; выступ у поры не всегда ясно выражен. Эти формы пыльцевых зерен отнесены к роду, подобному *Taxodium* — *Taxodiumites* sp. (табл. XVI, рис. 8,9). Пыльца *Taxodiumites* sp. встречается в спектрах, более древних, чем *Taxodium aff. distichum*. Появление пыльца *Taxodiumites* sp. отмечено еще в эоцене.

Распространение: особенно широко развит *Taxodium* в олигоцене (Казахстан) и олигоцен-миоцене (Европа). Вообще же пыльца и отпечатки листьев *T. distichum* известны в третичных отложениях в большом числе пунктов СССР и Западной Европы. По-видимому, род *Taxodium* был особенно широко распространен в третичное время, от верхов эоцена до сармата включительно. Большое количество пыльца *Taxodium* встречается в олигоценовых отложениях майкопа Северного Кавказа, в солончковых (майкоп) слоях на Нижнем Дону, на Нипкей и Средней Волге. Отмечается его широкое распространение также и в нижних отделах миоцена Европы. Несколько сокращается относительное количество пыльца к верхам миоцена. В Северном Казахстане и в Тургае *Taxodium* начинает появляться в небольших количествах в верхних отделах эоцена (подчеганские слои) и особенно широко развит в чеганских отложениях (нижний олигоцен). Один из руководящих родов в составе умеренной флоры (тургайской, по терминологии А. Н. Криштофовича).

По данным палеоботаники, род *Taxodium* продвигался из областей палеарктики и был широко распространен по всему северному полушарию в третичном периоде. К сожалению, еще не изучена пыльца современного вида *T. mucronatum* T. e. n. — мексиканского кипариса, который, в отличие от *T. distichum*, обитает в горных областях, на сухих местах. Возможно, что большое количество пыльца *Taxodium*, не определенное нами до вида, принадлежит не к виду болотного кипариса, а к аналогу *T. mucronatum*, чем и объясняется появление пыльца этого рода в отложениях эоцена, когда климат был жаркий и сухой.

Род *Cunninghamia* R. Br. — Куинингамия

Cunninghamia aff. *lanceolata* Lam. b.

Табл. XVI, рис. 10, 11, 12

Н
Препарат № 198 К

Морфологически близкие формы, известные по литературным данным: 1933. *Cunninghamia eocenipites* W. d. e. h. o. u. s. e. Tertiary pollen. The oil shales of the eocene Green River formation, p. 493, fig. 19.

Диаметр пыльцевого зерна 21—30 м. Форма его сфероидальная, очертание округлое. Зерно имеет одну неясно выраженную пору. Над порой у большинства зерен можно обнаружить небольшой выступ экзины. Экзина тонкая, при увеличении в 450 раз двуслойность незаметна. Поверхность зерна мелкобугорчатая. Бугорки разбросаны по поверхности редко и неравномерно. Тело изобороздано беспорядочно расположенными складками.

163

Пыльца сходна с современной пылью *Cunninghamia lanceolata* Lam. b., описанной В. В. Зауер (1950); ее строение также чрезвычайно близко к *C. eocenipites* Вудхауза из третичной флоры Грин-Ривер. В ископаемом состоянии пыльца распознается с большим трудом и поэтому упоминания о ее находках чрезвычайно редки. По данным А. Н. Криштофовича, на Амуре были встречены древовидные остатки этого рода в третичных отложениях.

Место нахождения: Павлодарское Прииртышье, оз. Кемир-Туз, бассейн р. Иртыш, по его левому берегу, глина с отпечатками растений из второй свиты континентальных отложений (олигоцен).

Распространение: пыльца *Cunninghamia* отмечена в спорово-пыльцевых спектрах в эоцене и олигоцене Западной Европы и в олигоценовых отложениях Казахстана.

Родина *C. lanceolata* Lam. b. — Южный и Центральный Китай. Растет в поиске распространения жестколистных, обычно лавровых растений. Образует леса. Растет на сухих и на влажных почвах. Широко распространена по вертикали (от 1000 до 3600 м над уровнем моря).

СЕМ. CUPRESSACEAE F. W. NEGER — КИПАРИСОВЫЕ

Семейство *Cupressaceae*, по мнению А. Н. Криштофовича, было наиболее широко развито в мелу. Пыльца различных кипарисовых отмечена в меловых отложениях Центрального и Западного Казахстана, в Приарале, в Приуралье, в Европейской части СССР. Наибольшее количество древесных остатков кипарисовых относится к среднему и верхнему мелу. В третичных отложениях пыльца и макроскопические остатки распространены довольно широко, но в видовом отношении семейство это представляло значительно слабее, чем в мелу.

Для Казахстана в третичных отложениях известны остатки *Cupressinoxylon* sp. на востоке, *Cupressocarpus ovalis* Griseb. на оз. Зайсан, *Juniperus communis* L. в Восточно-Казахстанской области, *Juniperus* sp. с горы Ашу-Тас. Присутствие большого количества пыльца кипарисовых, начиная от эоцена и до миоцена, отмечают многие исследователи. Наибольшее развитие кипарисовые имеют в нижних горизонтах палеогена (палеоцен—эоцен) как в Европейской, так и в Азиатской части СССР. В частности, довольно большое количество пыльца сем. *Cupressaceae* (до 30% от общего количества хвойных) обнаружено автором в палеоценовых отложениях Поволжья и в бучакских слоях Нижнего Дона.

Присутствие макроскопических остатков в сызранских слоях Поволжья отмечали В. И. Палибин, В. И. Баранов и другие исследователи.

Для ископаемой пыльца, отнесенной к сем. кипарисовых, характерно одноклеточное беспоровое зерно (за исключением пыльца рода *Libocedrus*, которая имеет поры). Форма зерна сфероидальная, очертание округлое, диаметр его 29—35 м. По описаниям В. В. Зауер (1950), пыльца *Cupressaceae* снабжена одной зародышевой бороздкой, но на ископаемых зернах этой бороздки обнаружить не удалось.

Экзина двуслойная, нижний слой, в отличие от пыльца *Taxodiaceae*, толще, чем верхний. Верхний слой экзины обычно имеет мелкобугорчатую скульптуру. Бугорчатые выросты расположены на поверхности неплотно.

Пыльцевые зерна обычно сильно деформированы и имеют трещину, которая, в отличие от пыльца *Taxodium*, проходит дальше центра, рассекая зерно на два полушария, скрепленных в одной точке.

Приводимые ниже описания ископаемой пыльца различных видов семейства кипарисовых носят предварительный характер из-за отсутствия достаточно полных данных по морфологии пыльца современных видов этого семейства.

12 Труды ГИН, вып. 6

169

Thujaeites sp. (pollen)

Табл. XVI, рис. 13, 14, 15
 Н 3
 Препараты № 191 К и 255 К

Морфологически близкие формы, известные по литературным данным:

1933. *Taxodium hiatipites* W o d e h o u s e. Tertiary pollen. The oil shales of the eocene Green River formation, p. 449, fig. 17.
 1934. *Taxodiaceae* P o t o n i e. Zur Mikrobotanik der Kohlen und ihrer Verwandten, zur Morphologie der fossilen Pollen und Sporen, Taf. 8, Fig. 4.
 1940. *Conifer pollen* T h i e r g a t t. Die Mikropalaentologie als Pollenanalyse im Dienst der Braunkohlenforschung, Taf. III, Fig. 8, 10.
 1949. *Pollen* K l e i n e r K r e m p. Pollenanalytische Untersuchungen des miozänen Braunkohlenlagers von Konin an der Warthe, Taf. V, Fig. 44.
 1951. *Taxodiipollen hiatus* (P o t o n i e). G o t h a n. Die merkwürdigen Pflanzengeographischen Besonderheiten in den Mitteleuropäischen Karbonfloren, Taf. XX, Fig. 17.

Диаметр пыльцевого зерна 30—35 м (в более молодых отложениях пыльца *Thujaeites* крупнее). Форма зерна сферодальная, очертание округлое. Экзина двуслойная, с тонким внешним слоем, покрытым беспорядочно разбросанными мелкими бугорками. После щелочной обработки и ацетолизного метода приготовления экзина обычно ломается.

В ископаемом состоянии пыльца встречается сильно деформированной, с глубокой трещиной, разделяющей зерно на две неровные части. Тело смято продольными складками. Поровое отверстие не обнаружено. Во многих описаниях пыльца *Thuja* ошибочно отнесена к сем. *Taxodiaceae*. Действительно, пыльца сем. *Taxodiaceae* и *Cupressaceae* весьма близка по своим морфологическим признакам. Но, как совершенно справедливо отмечают В. В. Зауер (1950), Эрлман (1943) и другие авторы, пыльца *Taxodiaceae* легче всего распознается по наличию поры и пальцеобразного выступа над ней внутреннего слоя экзины. У большинства же растений сем. *Cupressaceae* пыльца не имеет поры, а у тех видов, у которых она имеется, пальцеобразный выступ отсутствует или слабо выражен. Кроме того, обычно пыльца *Taxodiaceae* значительно крупнее пыльцы *Cupressaceae*.

Сходство морфологических признаков описываемой нами ископаемой пыльцы с пылью ныне живущей *T. orientalis* L., описанной В. В. Зауер, позволило отнести ее к роду *Thuja*. Видовое определение не сделано ввиду недостаточности данных по морфологии современной пыльцы этого рода.

Место нахождения: Павлодарское Прииртышье, близ г. Павлодара, скв. 1 и 2, верхние горизонты чеганских глин (нижний олигоцен); оз. Кемир-Туз, обн. 1326, глины с растительными остатками из второй свиты континентальных отложений среднего олигодена.

Распространение: пыльца *Thujaeites* встречается в майкопских (средний олигоцен) отложениях Северного Кавказа, Нижнего Дона (соленовские слои) и Приазовья. Необходимо отметить, что большое количество пыльцы *Cupressaceae*, в том числе и рода *Thuja*, отмечается обычно в тех горизонтах, где пыльца *Taxodium* или совсем отсутствует, или обнаруживается лишь в небольшом числе экземпляров.

Libocedrus sp. (pollen) — Либоцедрус

Табл. XVI, рис. 16
 Н 3
 Препарат № 252 К

Диаметр пыльцевого зерна 30—35 м. Зерно сферодальное, одноклеточное, безбороздное, однопоровое или с двумя — тремя порами. В ископаемом состоянии встречается в деформированном виде. Экзина двуслойная,

внутренний слой несколько плотнее и толще, чем внешний, который, отделяясь от внутреннего слоя, образует беспорядочные складки. Неровности внешнего слоя экзины обуславливают угловатый контур зерна. В некоторых случаях отслаивающаяся эктекина процируется в виде тонкой прозрачной бахромки. На некоторых экземплярах над поровым отверстием иногда удается обнаружить небольшой конусообразный выступ. Пыльца *Libocedrus*, как и большинство видов сем. *Cupressaceae*, имеет трещину, которая проходит через одно из поровых отверстий.

Пыльца *Libocedrus* зарисована из материалов по Пасековскому месторождению бурых углей из миоцен-олигодена Украины (Заклинская, 1953). Современная пыльца (*L. decurrens* T o g g.) описана В. В. Зауер (1950), Эрлманом (1943) и Заклинской (in litt.). В. В. Зауер и Г. Эрлманом описана пыльца вида *Libocedrus decurrens*, а Е. Д. Заклинской — вида *L. macrolepis*. Пыльца *L. macrolepis* отличается от пыльцы *L. decurrens* T o g g. более жесткой экзиной, меньшими размерами и более ярко выраженными поровыми отверстиями.

Пыльца *Libocedrus* в ископаемом состоянии отмечается редко, по-видимому, в связи с тем, что распознается она трудно и отличить ее от пыльцы прочих *Cupressaceae* почти невозможно, если зерно не находится в идеальной сохранности.

Место нахождения: Павлодарское Прииртышье, оз. Кемир-Туз, континентальные отложения, вторая свита, средний олигоцен.

Распространение: в Казахстане род *Libocedrus* распространен в верхних горизонтах олигоденовых континентальных отложений. На территории СССР ископаемые макроскопические остатки *Libocedrus* известны еще с верхнего мела.

Современный род *Libocedrus* включает всего восемь видов, в основном приуроченных к южным широтам и побережьям Тихого океана: Калифорния, Чили, Китай, Япония, Новая Гвинея. Обитает на довольно больших отметках — от 1500 до 1600 м над уровнем моря.

Возможно, что появление пыльцы *Libocedrus* в континентальных отложениях (четвертая свита — верхний олигоцен) Казахстана связано с эпохой тектонических поднятий в районе Прииртышья (?).

Cupressites sp. (pollen)

Табл. XVI, рис. 17, 18, 19
 Н 3
 Препарат № 191 К

Диаметр пыльцевого зерна 22—28 м. Зерно эллипсоидально-сферодальное, беспоровое, с трещиной вдоль тела, расщепляющей зерно на две равные части. Обычно зерно смято в продольные, беспорядочно расположенные складки.

Экзина покрыта мельчайшими, беспорядочно расположенными шипиками, вследствие чего контур зерна несколько неровный. По внешнему облику пыльца *Cupressites* sp. весьма сходна с пылью современного вида *Cupressus arizonica*. Отличается от него отсутствием порового отверстия, имеющегося у большинства пыльцевых зерен ныне живущего *Cupressus arizonica* G e n e. От пыльцы *C. lusitanica* также отличается отсутствием поры, а от *Juniperus*, кроме того, несколько большим размером.

Место нахождения: Павлодарское Прииртышье, пос. Парамовна, скв. 1, глины верхних горизонтов чеганской свиты (верх нижнего олигодена).

¹ Зарисованного автором из гербария Н. А. Белявской.

Распространение: от мела до олигоцена Азиатской и Европейской части СССР.

Родина *C. arizonica* Грее — Калифорния и Новая Мексика, где в некоторых местах растение образует горные леса на высоте от 1500 до 2400 м над уровнем моря.

Cupressites sp. (pollen) (ex gr. *Cupressus pallens* Bolch.)

Табл. XVI, рис. 20
Препарат № 191 $\frac{H}{K}$

Диаметр пыльцевого зерна 22—28 м. Зерно сфероидальное, но несколько вытянуто по одной из осей. Возможно, что последнее не относится к морфологическим признакам зерна, а является результатом деформации при его обработке и вызвано тем, что зерно обычно дает глубокую трещину и легко сминается.

Экзина плотная, двуслойная, но двуслойность просматривается с трудом и улавливается не на всех экземплярах. В некоторых случаях экзина равномерно мелкобугорчатая, вернее — зернистая, так как величина бугорков чрезвычайно мала.

По внешнему облику пыльца ископаемого вида чрезвычайно близка к виду, описанному Н. А. Болховитиной (1953, стр. 68, табл. X, рис. 27) под названием *Cupressus pallens*. Она имеет так же большое сходство с пыльцой современного вида *Cupressus torulosa* D. Don., отличающейся от него лишь меньшей величиной.

Местонахождение: Павлодарское Припутье, пос. Парамовка, скв. 1, нижние горизонты чеганской свиты (нижний олигоцен).

Распространение: встречен в Павлодарском Припутье, от нижнечеганских глин (верхний олигоцен) до четвертой свиты континентальных отложений. Отмечен в серых глинах сепомана и турона (*Cupressus pallens* Bolch.) на восточном склоне Южного Урала, в широтных отложениях юга Европейской части СССР. В эоцене и в нижних отделах олигоцена встречается чаще, чем в верхних горизонтах олигоцена.

Современное распространение *C. torulosa* приурочено к Западным Гималаям, от Непала до Бутана, а также к Центральному Китаю. Растение горное и сухолюбивое.

Chamaecyparites sp. (pollen)

Табл. XVI, рис. 21; табл. XVII, рис. 1
Препарат № 259 $\frac{3}{K}$

Диаметр пыльцевого зерна 23—25 м. Пыльца сфероидальная. Зерно снабжено трещиной, проходящей, по мнению Н. А. Болховитиной, по зародышевой борозде. Наличие зародышевой борозды при изучении нашего вида не обнаружено. Экзина мелкошиповатая.

За исключением наличия зародышевой борозды, общий облик пыльцы выделенного вида имеет некоторое сходство с *Chamaecyparis Lassoniana* (Andr.) Parl. и с *Chamaecyparis Shuzhi* Bolch.

Местонахождение: Павлодарское Припутье, оз. Кемп-Туз, обл. 8, четвертая свита континентального олигоцена (верхний олигоцен).

Распространение: от верхнего мела до олигоцена Азиатской и юга Европейской части СССР. Родина *Chamaecyparis Lassoniana* — горные районы Северной Америки в районе р. Калифорнии.

КЛАСС GNETALES ENGL. — ГНЕТОВЫЕ

Пыльца, отнесенная к классу Gnetales, делится по морфологическим признакам на две группы. К первой относится пыльца сильно вытянутой эллипсоидальной формы, имеющая в боковой проекции очертание почти правильного эллипса с заостренными вершинами. У древних форм на вершинах эллипса отслоение экзины образует подобие редуцированных воздушных мешков. Тело зерен этого типа имеет продольные складки, между которыми проходят извилистые бороздки (не зародышевые борозды), исполняющие, по-видимому, роль гармоггата¹ (табл. XVII, рис. 3, 4, 6, 7). На ребрах экзины, образующей складки, проходят бороздки, которые, по-видимому, являются аналогами зародышевых. При расположении зерна в правильной полярной проекции очертания сечения этих зародышевых борозд прекрасно видны (см. табл. XVII, рис. 5, 11, 12). К такому типу зерен относится пыльца всех видов *Ephedra* и *Welwitschia*. Размеры их обычно крупные (до 60 м по большей оси).

Зерна второго типа представляют собой сфероидальное тело с одной зародышевой бороздой и с мелкошиповатой экзипой. Размеры зерен этого типа не достигают 25 м. По внешнему виду пыльца этого типа несколько напоминает пыльцу *Cupressaceae*, но отличается от нее более плотной экзипой. Нам известен один представитель, сем. Gnetales, а именно *Gnetum Gnetum* L., описанный Эрдтманом (1943, табл. XXII, фиг. 410).

Класс Gnetales довольно древний. М. М. Ильин в своих многочисленных работах, посвященных природе пустынных растений, неоднократно упоминает о том, что вельвичия является одним из растений, появившихся на грани начала развития покрытосеменных и, возможно, что именно «правильничил», многочисленные виды пыльцы которой встречаются еще в пермских отложениях, и была такой переходной формой от голосеменных к покрытосеменным.

В мезозойских десах, по данным М. М. Ильина, уже существовали представители рода *Gnetum*. Пыльца же вельвичии отмечается в большом разнообразии в юре и мелу. В третичных отложениях уже встречаются различные виды *Ephedra*.

К сожалению, находки макроскопических остатков *Ephedra* чрезвычайно редки. Вызвано последнее скорее всего тем, что развитие свое вельвичия и эфедра в основном получили при аридном, пустынном режиме, а в осадочных отложениях аридного климата трудно ожидать большого количества сохранившихся растительных остатков. Поэтому особенно большое значение приобретают данные спорово-пыльцевого анализа, так как пыльца пустынных травянистых и кустарниковых растений прекрасно сохраняется в осадках, сформировавшихся в условиях континентального режима. Если согласиться с данными В. А. Вахрамеева (1947) о связи развития покрытосеменных с возникновением аридного пояса пустынь, простиравшегося от Африки до Центральной Азии в конце верхней юры, то класс гнетовых, в частности вельвичия, и должен был явиться первым представителем переходных форм от голосеменных к покрытосеменным.

В настоящее время вельвичия является вымирающим родом; в современной флоре сохранился только один ее вид — *Welwitschia mirabilis* Hook., с ограниченным ареалом в Южной Африке.

Пыльца *Ephedra* появляется в виде единичных зерен и видов, но родственных современной флоре, среди общего комплекса верхнеэоценовых спектров, несколько увеличивается количественно в миоцен — плиоцен и достигает максимального развития в голоцене.

¹ Аппарат, обеспечивающий аккомодацию зерна при изменении влажности.

Род *Ephedra* продолжает свое развитие и в настоящее время, имея довольно широкий, сильно разомкнутый ареал — от южных широт субтропиков и пустынь до степных районов Сибири. Во флоре Казахстана, в особенности в его центральных и южных областях, *Ephedra* в настоящее время играет значительную роль. Эта флора включает четыре вида *Ephedra* (Павлов, 1947): *E. distachya* L. — наиболее типичный представитель ковыльных и ковыльно-типчаковых степей; *E. equisetina* Vge. — горностепной вид на южных каменистых склонах кустарникового и лесного пояса; *E. intermedia* Schrenk. et C. A. Key — приуроченная к пустыням и пустынно-степному типу ассоциаций Центрального Казахстана, и *E. lomatolepis* Schrenk. — также растение песчаных пустынь Южного Казахстана. Других представителей класса Gnetales в современной флоре Казахстана нет.

СЕМ. WELWITSCHIAEAE — ВЕЛЬВИЧНИЕВЫЕ
Welwitschia protomirabilis sp. nov. (pollen)

Табл. XVII, рис. 2
II
Препарат № 170 K

Голотип: Павлодарское Припиртышье, близ г. Павлодара, скв. 1, обр. 258, слюдистые глины подглауконитовой толщи (датский (?) ярус). Диаметр пыльцевого зерна по длинной оси около 50 м, по малой оси 30 м; длина тела 42—47 м. Пыльцевое зерно удлиненно-эллипсоидальной формы. Тело снабжено двенадцатью продольными глубокими клиновидными в поперечном сечении бороздами (не зародышевыми), выклинивающимися к вершинам зерна (к полюсам его). Эти борозды образованы высокими складками — ребрами экзины. На дне бороздок проходят извилистые линии с ответвлениями на их боковые стенки (табл. XVII, рис. 2). Эти извилистые линии подобны гармогетным изгибам пыльцы *Ephedra*. Экзина несколько отслаивается на концах тела (на полюсах его), образуя утолщения, подобные воздушным мешкам у пыльцы Pinaceae, но сильно редуцированные.

Строение тела пыльцы *Welwitschia* весьма близко к строению тела *Ephedra*. Наличие же выростов экзины в виде зачаточных (или редуцированных?) воздушных мешков несколько сближает ее с хвойными.

Некоторую аналогию по морфологическим признакам можно провести между видом *Welwitschia* из палеогена Павлодарского Припиртышья и видом того же рода, выделенным А. А. Чигуревой (1951), из эоценовых отложений Западного Казахстана. Отличается припиртышский вид от западно-казахстанского более ясно выраженным отслоением экзины и несколько более суженной веретенообразной формой тела. От *W. macrolobata* Boiss. из бассейна р. Зыбы (оттерверские глины) наш вид отличается большими размерами воздушных мешков. От *W. Alekhini* Boiss. (Северный Урал, опоковидные песчаники — мел) отличается меньшими размерами и более суженным телом.

Пыльца современного вида *W. mirabilis* Hoo k. описана у Эрдмана (Erdman, 1943) и Зауера (1950). По своему строению пыльцевое зерно современной вельвичии близко к ископаемой за исключением более округлой формы тела и меньшего размера воздушных мешков.

Место нахождения: см. голотип.

Распространение: меловые отложения (средний и верхний мел) Западного Казахстана; верхний мел и горизонты, пограничные с палеоценом в Северном Казахстане. Эоцен (низы опоковой толщи морского палеогена) Западного Казахстана и эоценовые отложения Западного Казахстана в районе Бай-Хотка.

Ископаемые остатки, кроме пыльцы в третичных и меловых отложениях, еще неизвестны.

СЕМ. EPHEDRACEAE — ХВОЙНИКОВЫЕ

Род *Ephedra* — Хвойник

Ephedra eocenipites Wodehouse

Табл. XVII, рис. 3
H
Препарат № 170 K

Величина пыльцевого зерна от 58 до 75 м. Зерно веретенообразно-эллипсоидальное, очертание в боковой проекции удлиненно-овальное с заостренными вершинами. От полюса к полюсу проходят продольные глубокие складки экзины. Количество складок нечетное — 5 или 7. Ребровидные борозды складок в зависимости от разбухания пыльцы могут быть узкими или широкими. Между бороздами складок образованы глубокие борозды (по-видимому, это не зародышевые борозды) с клиновидным поперечным сечением. По дну борозд проходит извилистая трещинка (гармогет), подобная трещинкам у современных видов *Ephedra*. Экзина имеет мелкозернистую структуру, что изображается в виде мелкоточечного рисунка на поверхности зерна.

Пыльца имеет полное сходство с пыльцой *E. eocenipites* Wodehouse, описанной из эоценовых отложений Грин-Ривер (Wodehouse, 1932, табл. на стр. 499, фиг. 20). Пыльца ископаемого вида *Ephedra* имеет большое сходство с пыльцой ныне живущего вида *E. glauca*, описанной Вудхаузом (1933), а также с пыльцой ныне живущего вида *Ephedra strobilaceae* Bunge, описанной автором (1954).

Место нахождения: Павлодарское Припиртышье, пос. Парамоновка, скв. 1, подглауконитовые глины датского (?) яруса (мел — палеоцен).

Распространение: эоцен Северной Америки; верхний мел и эоцен Северного Казахстана; мел и палеоген (низы) Западного Казахстана.

В настоящее время *E. strobilaceae* Bunge распространена в плоскостных частях Центральной Азии на летучих песках.

Ephedra aff. *Przewalskii* Stapf.

Табл. XVII, рис. 4, 5
H
Препарат № 198 K

Длина пыльцевого зерна около 50 м, ширина (по малой оси) 32—48 м. Зерно эллипсоидальное, очертание в боковой проекции овальное со слегка заостренными вершинами. Тело снабжено продольными желобками (бороздами), разделенными складками — ребрами.

Экзина однослойная; толщина экзины значительно уменьшается на поверхности борозд и увеличивается на вершинах складок. При этом вершины или ребра складок раздвоены в виде борозды, что хорошо различается при полярном положении зерна. По-видимому, борозды образованы на поверхности ребер и являются зародышевыми, бороздоподобные же углубления между складками экзины — лишь приспособление пыльцевого зерна к аридным условиям. При засухе эти складки способствуют наибольшему сжиманию зерна, при наступлении периодических дождей — разбуханию его, без разрывов экзины. По наблюдениям В. В. Зауера, пыльцевое зерно *Ephedra* может при разбухании принять форму правильного

эллипса за счет вывернувшихся и расправившихся складок и борозд между ними.

В работе М. П. Гричук (1954) приводится описание современного вида *Ephedra Przewalskii* S t a p l., весьма близкого по морфологическим признакам к нашему ископаемому виду. М. П. Гричук отмечает, что основное отличие пыльцы *E. Przewalskii* от прочих видов заключается в том, что она снабжена 20 бороздами, причем 10 из них глубокие, почти доходящие до полюсов (при положении зерна в полярной проекции), а 10 — более короткие и менее глубокие, поэтому «дольки» расположены парами. Этот признак — добавочные мелкие бороздки на ребрах складок — настолько своеобразен, что может служить основанием для того, чтобы вид *E. Przewalskii* и описанный нами ископаемый вид считать близкими.

Место нахождения: Павлодарское Припиртышье, оз. Кемпир-Туз, обл. 6, глины с отпечатками растений, вторая континентальная свита (верх среднего олигоцена).

Ephedra cf. distachya L.

Табл. XVII, рис. 6, 7
3
Препарат № 259 К

Длина пыльцевого зерна (по длинной оси) 58—70 м, ширина (по малой оси) 40—50 м, в зависимости от того, находится ли зерно в сжатом или разбухшем состоянии. Очертание пыльцевого зерна в боковой проекции удлиненно-овальное. Зерно имеет от 6 до 9 борозд и столько же узких ребрышек. Гармогат выражен довольно четко, ветвистый, но веточки значительно короче и менее разветвлены, чем у пыльцы *E. cf. intermedia*.

Наш ископаемый вид строением гармогаты, бороздок и ребрышек сходен с пыльцой современного вида *E. distachya*, описанного М. П. Гричук (1954). Отличается от него большей величиной и не столь ясно выраженным гармогатом.

Место нахождения: Павлодарское Припиртышье, оз. Кемпир-Туз, песчано-гравийные отложения четвертой свиты.

Ephedra aff. intermedia Sch r.

Табл. XVII, рис. 8, 9
3
Препарат № 259 К

Виды, близкие по морфологическим признакам, упоминаются в следующих работах:

1940. *Ephedra* Thiergart. Die Mikropaläontologie als Pollenanalyse im Dienst der Braunkohlenforschung, Taf. IV, Fig. 4.
1949. Cf. *Ephedra* Thiergart. Der stratigraphische Wert mesozoischer Pollen und Sporen, Taf. IV/V, Fig. 39.

Длина пыльцевого зерна (по большей оси) 65—70 м, ширина (по малой оси) 30—40 м. Зерно удлиненно-эллипсоидальное, очертание в боковой проекции удлиненно-овальное, в полярной проекции — четырех-, пяти- или шестигонная звездчатая фигура. Пыльцевое зерно снабжено четырьмя, пятью или шестью складками и, соответственно, четырьмя, пятью или шестью бороздами. По внешнему краю каждой складки расположены узкие углубления — зародышевые бороздки (?).

Экзина однослойная, мелко-плоскобугорчатая. Контур ребровидных краев складок часто имеет извилистый рисунок. По дну и стенкам борозд

между складками хорошо видна извилистая и ветвистая линия гармогаты.

Пыльца современного вида *Ephedra intermedia* Sch r., описанная М. П. Гричук (1954), имеет ветвистый, часто дважды ветвистый гармогат. Размер зерна современного вида около 60 м. Ископаемый вид отличается от современного большей величиной и менее ветвистым гармогатом. Последнее может зависеть не столько от различия в строении, сколько от сохранности зерна и степени его минерализации.

Пыльца *E. aff. intermedia* имеет также большое сходство и с пыльцой современного вида *E. strobilacea* В и п г е. Отличается ископаемая пыльца от этого вида меньшим количеством борозд и ребрышек и большим размером.

Место нахождения: Павлодарское Припиртышье, бассейны р. Чидерты и оз. Кемпир-Туз, песчано-глинистые отложения четвертой свиты континентальных отложений верхнего олигоцена.

Распространение: пыльца *Ephedra aff. intermedia*, не определенная до вида и обозначаемая *Ephedra* sp., неоднократно отмечается в списках пыльцевых спектров Казахстана от олигоцена до неогена включительно.

Современный вид — *E. intermedia* Sch r. — типичный пустынный и пустынно-степной вид Центрального и Южного Казахстана. Селится на каменистом и песчаном грунте в ассоциациях полупустынь.

Ephedrites trinata sp. nov. (pollen)

Табл. XVII, рис. 10, 11, 12
Н
Препарат № 146 К

Голотип: Павлодарское Припиртышье, бассейн р. Чидерты, слюдяные глины с растительными остатками, вторая свита континентальных отложений (олигоцен).

Длина пыльцевого зерна (по длинной оси) 35—40—50 м, ширина (по малой оси) 25—28 м.

Пыльцевое зерно удлиненно-эллипсоидальное с тремя высокими складками — ребрами, между которыми проходит глубокие борозды с извилистой трещиной по дну (гармогат). Зародышевые борозды расположены на поверхности складок, что хорошо видно при расположении зерна в полярной проекции.

По внешнему облику зерно должно быть отнесено к роду *Ephedra*, несмотря на то, что количество борозд и складок у ископаемой формы значительно меньше, чем обычно у пыльцевых зерен известных нам современных видов *Ephedra*. Аналога среди современных видов нет.

Место нахождения: см. голотип.

Распространение: олигоценные отложения Павлодарского Припиртышья.

СЕМ. GNATACEAE — ГНАТОВЫЕ

Cnetumites sp. (pollen)

Табл. XVII, рис. 13
3а
Препарат № 14 К

Пыльцевое зерно сферическое, беспогоное, безбороздное. Диаметр пыльцевого зерна около 18 м. Экзина двуслойная (?), толщина ее около 2 м. Скульптура мелкобугорчатая. Бугорки поставлены неплотно, иногда они остроколючие и тогда поверхность можно назвать мелкошиповатой. Контур зерна мелковолнистый. Поверхность крупноточечная. Не

которые экземпляры имеют трещину и тогда могут быть приняты за пыльцу Cupressaceae. Пыльца ископаемого вида весьма близка по строению к современному виду *Gnetum Gneton*, описанному В. В. Зауер (1950), но, несмотря на это сходство, за ископаемым видом оставляется только родовое название, так как в данное время пыльца *Gnetum* современных видов еще не изучена, а этих видов 25. Вполне возможно, что впоследствии будут известны пыльцевые зерна современных видов, гораздо более близкие к нашей форме, чем *Gnetum Gneton* L.

Местонахождение: Северное Приаралье, гора Бос-Бие, саксаульская свита (верхний эоцен).

Распространение: пыльца *Gnetum* и подобная ей, а также растительные остатки рода *Gnetum* отмечены в палеоценовых отложениях Приаралья и Нижнего Поволжья. Автором пыльца *Gnetum* (?) обнаружена в нижнепалеоценовых отложениях Северного Приаралья и Павлодарского Прииртышья.

ЛИТЕРАТУРА

- [Абих Г. В.] Abich H. W. Beiträge zur Paläontologie des Asiatischen Russlands, T. I. Tertiarvorstellungen aus der Umgebung der Altai. [Материалы по палеонтологии Азиатской России. Т. I. Третичные окаменелости из окрестностей Аральского моря]. Mem. Acad. Sci., VI, ser. sci. mathem. et phys., 7 (9), St-Petersb., 1858.
- Абузярова Р. Я. Ископаемая флора Такыр-Сора по данным спорово-пыльцевого анализа — Ботан. журнал, 1953, 37.
- Абузярова Р. Я. Третичные спорово-пыльцевые спектры Тургай и Павлодарского Прииртышья. — Автореферат диссертации. Казахский гос. ун-в., 1954.
- Абузярова Р. Я. 2. Ископаемые флоры Чинка Науша (Тургай) по данным спорово-пыльцевого анализа. — Ученые зап. Казанск. гос. ун-ва, биология, 1954, 14, вып. 4.
- Алехин В. В. География растений. Учебник, 1950.
- Архангельский А. Д. Геологическое строение СССР. Европейская и среднеазиатская части. ОНТИ, 1932.
- Барабашникова В. Н. Микропалеоботанические остатки в мезозойских отложениях Тургай. — Изв. Акад. наук Казахской ССР, серия геол., 1951, вып. 13.
- Баранов В. И. Этапы развития флоры и растительности СССР в третичном периоде. — Ученые зап. Казанск. гос. ун-ва, им. В. И. Ульянова-Ленина, 1948, 108, кн. 3. Ботаника, вып. 7.
- Баранов В. И. Новая ископаемая флора из третичных и верхнемеловых отложений западного склона Мугоджар. — Докл. Акад. наук СССР, новая серия, 1953, 92, № 5.
- Баярунас М. В. Отчет о раскопках в Тургайской области. Приложение к годовичному отчету Геол. и минерал. музея Акад. наук, 1915.
- Баярунас М. В. К геологии Тургайского района Казахстана. — Труды Палеозол. ин-та Акад. наук СССР, 1936, 5.
- Беляева Е. И. Каталог местонахождений третичных наземных млекопитающих на территории СССР. — Труды Палеонтол. ин-та Акад. наук СССР, 1948, 15, вып. 3.
- Бойцова Е. П. и Покровская И. М. Материалы по стратиграфии континентальных олигоценовых и миоценовых отложений Тургайской впадины. В кн.: Материалы по палеологии и стратиграфии. М., Госгеолгиздат, 1954.
- Болховитина Н. А. Спорово-пыльцевой состав отложений алта и альба центральной части Русской платформы. — Бюл. МОИП, отд. геол., 1951, 26, № 5.
- Болховитина Н. А. Пыльца хвойных из мезозойских отложений и ее значение для стратиграфии. — Изв. Акад. наук СССР, серия геол., 1952, № 5.
- Болховитина Н. А. Спорово-пыльцевая характеристика меловых отложений центральных областей СССР. — Труды Инст. геол. наук Акад. наук СССР, 1953, вып. 145, геол. серия (№ 16).
- Бориски А. Л., Беляева Е. И. Местонахождение третичных наземных млекопитающих на территории СССР. — Труды Палеонтол. инст. Акад. наук СССР, 1948, 15, вып. 3.
- Борсук М. К. К изучению тургайской третичной флоры. — Труды Центр. научно-иссл. геол.-развед. инст., 1935, вып. 37.
- Борщов И. Материалы для ботанической географии Арало-Каспийского края. — Зап. Акад. наук, 1865, № 1, прил.
- Брукс К. Климаты прошлого. Пер. с англ. В. Г. Левинсона. М., Изд. иностр. лит., 1952.
- Васильевская Н. А. О полтавской ксерофитной флоре Туркмени. — Докл. Акад. наук СССР, 1949, 18, № 4.
- Васильченко И. Г. Материалы по истории происхождения флоры *Ephedra*. — Ботан. журнал, 1950, № 3.

- Вахрамеев В. А. Континентальный и солоноватоводный олигоцен Северного Приаралья. — Отд. геол.-геогр. наук Акад. наук СССР. Рефераты научно-исслед. работ за 1940 г. М., Изд. Акад. наук СССР, 1941.
- Вахрамеев В. А. Роль геологической обстановки в развитии и распространении покрытосеменных в меловое время. — Бюлл. МОНП, серия геол., 1947, 22, вып. 6.
- Вахрамеев В. А. Континентальные и солоноватоводные отложения олигоцена Северного Приаралья и северных чинков Устьурта. — Изв. Акад. наук СССР, серия геол., 1949, № 4.
- Вахрамеев В. А. О состоянии советской ботаники. — Изв. Акад. наук СССР, серия биол., 1953, № 4.
- Вялов О. С. О возрасте чеганских глин на Устьурте. — Изв. Главн. геол.-развед. упр., 1930, 49, № 4.
- Вялов О. С. Возраст корбулевых слоев Приаралья. — Бюлл. МОНП, отд. геол., 1945, 20, вып. 3—4.
- Вульф Е. В. Историческая география растений. М.—Л., Изд. Акад. наук СССР, 1944.
- Высоцкий Н. К. Сообщение о физико-географических изменениях Западной Сибири в третичную и послетретичную эпохи. — Зап. СПб., мин. общ., 2-я серия, 1898, ч. 3.
- Гвер О. J. Heer O. Pflanzenabdrücke aus der Kirgisiensteppe. In: A. bich H. W. Beiträge zur Paläontologie des asiatischen Russlands. T. I. Tertiärversteinerungen aus der Umgebung der Aralsee. Mém. Acad. Sci., 7(9), ser. sci. mathem. et phys., 1858.
- Герасимов И. П. Основные черты развития современной поверхности Турана. — Труды Инст. геогр. Акад. наук СССР, 1937, вып. 25.
- Герасимов И. П. Основные вопросы геоморфологии и палеогеографии Западно-Сибирской низменности. — Изв. Акад. наук СССР, серия геогр., 1940, № 5.
- Гладков А. Н. и Самойлов С. Р. Морфология пылин некоторых видов тропических и арктических субтропических растений. В кн.: Пустыни СССР и их освоение, т. II. М., Изд. Акад. наук СССР, 1954.
- Гричук М. П. Распространение рода *Ephedra* в четвертичном периоде на территории СССР в связи с историей ландшафтов. В кн.: Материалы по палеогеографии, вып. 1. М., Изд. Моск. гос. ун-в., 1954.
- Громов В. И. Элементы африканско-азиатской фауны в четвертичных отложениях Сибири. — Бюлл. Информ. Бюро Ассоц. по изуч. четвертич. периода Европы, 1932, № 2.
- Громов В. И. Остатки млекопитающих из четвертичных отложений в низовьях Оби и Иртыша. — Бюлл. Моск. общ. испыт. природы, новая серия, отд. геол., 1937, 15, вып. 2.
- Губонина З. П. Описание пылин видов рода *Tilia* L., произрастающих на территории СССР. — Труды Инст. геогр. Акад. наук СССР, 1952. Материалы по геоморфологии и палеогеографии СССР, вып. 7.
- Деревья и кустарники СССР. Т. I. Голосеменные. М.—Л., Изд. Акад. наук СССР, 1949.
- Дробов В. П. Загадки саксаула. — Журнал Русск. ботан. общ., 1923, 6.
- Заклинская Е. Д. 1. Материалы к истории флоры и растительности палеогена Северного Казахстана в районе Павлодского Прииртышья. — Труды Инст. геол. наук Акад. наук СССР, 1953, вып. 141, геол. серия (№ 58).
- Заклинская Е. Д. 2. Описание пылин и спор некоторых видов растений Полярной тундры. Описание некоторых видов пылин и спор, выделенных из третичных отложений Пасековского карьера Воронежской области. — Труды Инст. геол. наук Акад. наук СССР, 1953, вып. 142, геол. серия (№ 59).
- Заклинская Е. Д. 3. Спорно-пыльцевые спектры эоценовых отложений Северного Приаралья. — Докл. Акад. наук СССР, 1953, 92, вып. 5.
- Заклинская Е. Д. 4. Спорно-пыльцевые спектры морского олигоцена Северного Приаралья. — Докл. Акад. наук СССР, 1953, 92, вып. 6.
- Заклинская Е. Д. 5. Материалы к истории палеогеновой и неогеновой флоры Северного Кавказа. Вопросы петрографии в минералогии. Т. I. Изд. Акад. наук СССР, 1953.
- Заклинская Е. Д. 6. Морфология пылин некоторых видов пустынных растений. В кн.: Пустыни в их освоение, т. II. М., Изд. Акад. наук СССР, 1954.
- Зауер В. В. Морфология пылин голоценных. В кн.: Пыльцевой анализ. М., Гостеоиздат, 1950.
- Зауер В. В. Ископаемые виды рода *Cedrus* и их значение для стратиграфии континентальных отложений. В кн.: Материалы по палеонтологии и стратиграфии. М., Гостеоиздат, 1954.
- Ильин М. М. Реферат работы К. П. Корovina Очерки по истории развития растительности Средней Азии. — Сов. ботаника, 1936, № 2.
- Ильин М. М. К происхождению флоры пустынь Средней Азии. — Сов. ботаника, 1937, № 6.

- Ильин М. М. Реликтовые элементы широколиственных лесов по флоре Сибири и их возможное происхождение. В кн.: Проблемы реликтов по флоре СССР. (Тезисы совещания). Вып. 2. М.—Л., Изд. Акад. наук СССР, 1938.
- Ильин М. М. О некоторых взаимосвязях по флоре пустынь Средней Азии и Америки. — Сов. ботаника, 1945, № 6.
- Ильин М. М. Некоторые итоги изучения пустынь Средней Азии. В кн.: Материалы по истории флоры и растительности. Вып. 2. М.—Л., Изд. Акад. наук СССР, 1946.
- Ильин М. М. Природа пустынного растения (эремофита). Пустыни и их освоение. Результаты совещания по изучению и освоению пустынь (с 25 по 29 февраля 1948 г.). М.—Л., Изд. Акад. наук СССР, 1950.
- Кассин Н. Г. Краткий геологический очерк Северо-Восточного Казахстана. — Труды Всес. геол.-развед. объедин., 1931, вып. 165.
- Кассин Н. Г. Новые данные о строении Западно-Сибирской низменности, Тургайской и Иртышской впадин. — Пробл. сов. геологии, 1937, № 7.
- Кассин Н. Г. Материалы по палеогеографии Казахстана. Алма-Ата, Изд. Акад. наук Казахской ССР, 1947.
- Колесников В. В. Верхний миоцен. В кн.: Стратиграфия СССР, т. 12. М.—Л., Изд. Акад. наук СССР, 1940.
- Корнилова В. С. 1. Новые данные о флоре гидротермальных слоев Тургай. — Изв. Акад. наук Казахской ССР, серия биол., 1950, вып. 7.
- Корнилова В. С. 2. Новые материалы к третичной флоре Тургай. — Вестн. Акад. наук Казахской ССР, 1950, № 12 (69).
- Корнилова В. С. 1. Континентальная третичная флора Тортмыли. — Ученые зап. Казанск. ун-в, им. С. М. Кирова, 1952, 15, Геология и география, вып. 1.
- Корнилова В. С. 2. К характеристике флоры болотных слоев Тургай. — Изв. Акад. наук Казахской ССР, 1952, серия биол., вып. 9.
- Корнилова В. С. 3. О полтавской флоре Казахстана. — Докл. Акад. наук СССР, геология, 1955, 104, № 1.
- Корнилова В. С. и Лавров В. В. О находке третичной ксерофитной флоры в Тургае и ее стратиграфическое положение. — Вестн. Акад. наук Казахской ССР, 1949, № 5 (3).
- Коровин Е. П. Очерки по истории развития растительности Средней Азии. — Бюлл. Средне-Азиатского гос. ун-в., 1935, № 20(4).
- Коровин Е. П. Растительность Средней Азии и Южного Казахстана. Ташкент. — Изд. Казахского филиала Акад. наук СССР, 1939.
- Крашов А. К. Опыт истории развития флоры южной части Восточного Тянь-Шаня. — Изв. Русск. геогр. общ., 1888, 7.
- Крашенинников И. М. Растительный покров Киргизской республики. — Труды Общ. изуч. Киргизск. края, вып. 6 (т. V, вып. 2), Оренбург, 1925.
- Криштофович А. Н. Новые данные к верхнетретичной флоре Северо-Западной Сибири. — Изв. Геол. ком., 1927, 16, № 7.
- Криштофович А. Н. 1. Новые данные к вопросу о третичной и меловой флоре Арало-Каспийского края и ее отношении к ископаемой флоре Средней Азии. Отчет о работе почвенно-ботанического отряда Казахской экспедиции Академии наук СССР, 1930, 4, вып. 2.
- Криштофович А. Н. 2. Основные черты развития третичной флоры Азии. — Изв. Главн. ботан. сада РСФСР, 1930, 29, вып. 3—4.
- Криштофович А. Н. 1. Основные пути развития флоры Азии. — Ученые зап. Ленингр. гос. ун-в., 1936, № 9, серия геол.-почв.-геогр., вып. 2.
- Криштофович А. Н. 2. Развитие ботанико-географических провинций северного полушария с конца мелового периода. — Сов. ботаника, 1936, № 3.
- Криштофович А. Н. Ботанико-географическая и климатическая зональность в конце палеозойской эры. — Природа, 1937, № 2.
- Криштофович А. Н. Миоценовая флора Украины и ее связь через Урал с третичной флорой Азии. — Сборник памяти А. В. Фомина. Киев, Изд. Акад. наук Украинской ССР, 1938.
- Криштофович А. Н. Характеристика третичных флор Казахстана. В кн.: Геология СССР, т. 20. Л., Гостеоиздат, 1940.
- Криштофович А. Н. Палеоботаника. Изд. 3. М.—Л., Гостеоиздат, 1941.
- Криштофович А. Н. Происхождение и развитие мезозойской флоры. В кн.: Труды юбилейной сессии Ленингр. гос. ун-в., 1946.
- Криштофович А. Н. Развитие ботанико-географических областей северного полушария с начала третичного периода. В кн.: Вопросы геологии Азии, т. II. Изд. Акад. наук СССР, 1955.
- Криштофович А. Н. и Палибин Н. В. Новые материалы к третичной флоре Тургайской области. — Изв. Акад. наук, серия 6, 1915, 9.
- Кульгасов М. В. Этюды по формированию растительного покрова жарких пустынь и степей Средней Азии. В кн.: Материалы по истории флоры и растительности СССР, вып. 2. М.—Л., Изд. Акад. наук СССР, 1946.
- Куприянова Л. А. О пыле-однодольных растений. — Сов. ботаника, 1945, 13.

- Кемпбелл Д. Х. Ботанические ландшафты земного шара. Очерки по географии растений. М., Изд. иностр. лит., 1948.
- Лавренко Е. М. Геоботаника. Вып. 5. М.—Л., Изд. Акад. наук СССР, 1948.
- Лавренко Е. М. Возраст ботанических областей Евразии. — Изв. Акад. наук СССР, серия геогр., 1951, № 2.
- Лавров В. В. К стратиграфии континентального палеоген-неогена Тургайской впадины. — Изв. Акад. наук Казахской ССР, серия геол., 1949, вып. 9.
- Лавров В. В. О единой стратиграфической схеме для континентальных третичных отложений Приаралья, Тургай и юга Западной Сибири. — Вести. Акад. наук Казахской ССР, 1951, № 1 (70).
- Лавров В. В. Краткий обзор континентальных третичных формаций Тургай и юга Западной Сибири. — Вести. Акад. наук Казахской ССР, 1953, № 6 (99).
- Лавров В. В. О разнице стратиграфических схем континентальной третичной серии в Казахстане и Западной Сибири. — Вести. Акад. наук Казахской ССР, 1955, № 6.
- Лавров В. В. и Соболева Е. П. Некоторые итоги изучения континентальных третичных толщ Тургайской впадины. — Вести. Акад. наук Казахской ССР, 1948, № 12 (48).
- Малеев В. П. Растительность причерноморских стран (Эвксинской провинции Средиземноморья), ее происхождение и связь. Геоботаника, вып. 4. Труды Бот. инст. Акад. наук СССР, 1940, 3.
- Малыкина В. С. Определитель спор и пыльцы. Юра — мел. — Труды ВНИГРИ, новая серия, вып. 33. М.—Л., Гос. тех. изд. нефт. и горно-топлив. лит., 1949.
- Матвеева О. В. К истории растительности четвертичного периода в Павлодарском Прииртышье. — Труды Инст. геол. наук Акад. наук СССР, 1953, вып. 141. геол. серия (№ 58).
- Моноссон М. Х. Описание пыльцы полевой, произрастающей на территории СССР (для целей пыльцевого анализа). — Труды Инст. геогр. Акад. наук СССР, 1950, вып. 46.
- Моноссон М. Х. Описание пыльцы семейства маревых. — Труды Инст. геогр. Акад. наук СССР, 1952. Материалы по геоморфологии и палеогеографии СССР, вып. 7.
- Моноссон-Смолина М. Х. К вопросу о морфологии пыльцы некоторых видов *Rhus*. — Ботан. журнал, 1949, 4.
- Медлишвили П. А. К вопросу биостратиграфии и палеоботаники тургайских флор Казахстана. (Тезисы диссертации). Тбилиси, Изд. Акад. наук Грузинской ССР, 1948.
- Медлишвили П. А. К вопросу о параллелизации континентальных третичных отложений среднего течения р. Ульто-Ян со смежными районами Казахстана. — Вести. Акад. наук Казахской ССР, 1949, № 7 (52).
- Медлишвили П. А. 2. О тургайской флоре Казахстана. — Докл. Акад. наук СССР, 1949, 66, № 3.
- Медлишвили П. А. 1. О возрасте корбулевых слоев Закавказья и Северного Приаралья. — Докл. Акад. наук СССР, 1950, 70, № 1.
- Медлишвили П. А. 2. Палеоботанические данные в связи со стратиграфией континентальных третичных отложений Казахстана. — Изв. Акад. наук СССР, серия геол., 1950, № 6.
- Медлишвили П. А. О некоторых принципиальных вопросах палеоботаники как раздела палеоботаники. — Изв. Акад. наук СССР, серия биол., 1952, № 5.
- Наумова С. Н. Споры и пыльца углей СССР. — Труды XVII сессии Междунар. геол. конгр., 1937, М., ОНТИ, 1939.
- Нейбурт М. Ф. 1. Ископаемая растительность Зайсанской котловины. — Природа, 1928, № 11.
- Нейбурт М. Ф. 2. О материалах Амурской экспедиции. — Докл. Акад. наук СССР, 1928, № 20.
- Никифорова К. В. Геология и палеогеография Северного и Центрального Казахстана. Труды Инст. геол. наук Акад. наук СССР, 1953, вып. 141, геол. серия (№ 58).
- Овчинин Н. К. Среднелазовские отложения Тургайской впадины и Северного Прииртышья. Автореферат. Л., Изд. Всес. геол.-развед. инст., 1951.
- Овчинин Н. К. Отложения среднего палеогена Тургайской впадины и Северного Приаралья. М., Гос. научно-техн. изд. лит. по геологии и охране недр, 1954.
- Овчинников И. И. К истории растительности юга Средней Азии. — Сов. ботаника, 1940, № 3.
- Орлов Ю. А. 1. Некоторые данные о третичных и послетретичных отложениях северной окраины Киргизской горной страны. — Изв. Главн. геол.-развед. упр., 1930, 49, № 10.
- Орлов Ю. А. 2. Раскопки фауны гиппариона на Иртыше. — Природа, 1930, № 1.
- Орлов Ю. А. Новые местонахождения третичных млекопитающих в Казахстане. — Природа, 1937, № 9.

- Орлов Ю. А. Местонахождение третичных млекопитающих у Аральского моря. — Природа, 1939, № 5.
- Орлов Ю. А. Третичные млекопитающие и местонахождение их остатков. — Труды Палеонтолог. инст. Акад. наук СССР, 1941, 7, вып. 3.
- Орлов Ю. А. Новые находки ископаемых млекопитающих в Сибири. — Природа, 1949, № 9.
- Павлов Н. В. Растительное сырье Казахстана (растения, их вещества и использование). М., Изд. Акад. наук СССР, 1947.
- Палеонтология СССР. Прил. к т. 12: Криштофович А. Н. Каталог растений ископаемой флоры СССР. М. — Л., Изд. Акад. наук СССР, 1941.
- Палибин И. В. Заметки о третичных растениях Киргизской степи. СПб., 1904.
- Палибин И. В. Ископаемые растения берегов Аральского моря. — Изв. Туркестан. отд. Русск. геогр. общ., 1906, 4, вып. 7.
- Палибин И. В. К изучению ископаемой флоры Амурска. — Труды Ботан. инст. Акад. наук СССР, серия 1, 1933, вып. 1.
- Палибин И. В. Этапы развития флоры прикаспийских стран со времени мелового периода. — Сов. ботаника, 1935, № 3.
- Покровская И. М. Основные этапы в развитии растительности на территории СССР в третичное время. — Ботан. журнал, 1954, 39.
- Покровская И. М., Бойцова Е. П. Материалы по стратиграфии континентальных олигоценовых и миоценовых отложений Тургайской впадины. В кн.: Материалы по палеонтологии и стратиграфии. М., Гос. научно-техн. изд. лит. по геологии и охране недр., 1954.
- Полов М. Г. Основные черты истории развития флоры Средней Азии. — Бюлл. Средне-Азиатского гос. ун-та, 1927, вып. 13.
- Полов М. Г. Основные периоды формирования и иммиграции во флору Средней Азии в век антропоген и реликтовые типы этой флоры. В кн.: Проблемы реликтов во флоре СССР. (Тезисы совещания, вып. 1). М.—Л., Изд. Акад. наук СССР, 1938.
- Пояркова А. И. Флора гидротермальных слоев Центрального Казахстана. — Труды Геол. инст. Акад. наук СССР, 1932, 2.
- Пояркова А. И. Новые материалы к третичной флоре Северного Приаралья. — Труды Инст. геол. инст., 1935, вып. 39. Палеоботаника, сб. № 2.
- Пыльцевой анализ. Под ред. А. Н. Криштофовича. М., Госгеолгиздат, 1950.
- Сладков А. Н. Определения видов *Lyceodinium* L. и *Selaginella* S. p. g. по спорам и микроспорам. Труды инст. геогр. Акад. наук СССР, 1951, вып. 50.
- Сладков А. Н. О морфологических признаках пыльцевых зерен вересковоцветных. — Докл. Акад. наук СССР, 1953, 92, № 5, Ботаника.
- Сладков А. Н. Морфологическое описание пыльцы пермистиниоидных Туркмении (для целей пыльцевого анализа). — Труды Инст. геогр. Акад. наук СССР, 1954, 61.
- Соболева Е. П. Новые данные к стратиграфии и литологии третичных континентальных толщ центральной части Тургайской впадины. — Вести. Акад. наук Казахской ССР, 1950, № 12 (69).
- Сукачев В. Н. Иртышская флоропалеонтологическая экспедиция. Научно-популярный очерк экспедиции. Л., Изд. Акад. наук СССР, 1931—1932.
- Сукачев В. Н. Исследования четвертичных отложений Нижне-Иртышского края. В кн.: Экспедиция Всесоюзной Академии наук, 1932. Л., Изд. Акад. наук СССР, 1933.
- Сукачев В. Н. *Brasenia purpurea* Мехл. в верхнетретичных отложениях Западной Сибири. — Докл. Акад. наук СССР, 1935, 1, № 2—3.
- Сьюрда А. Ч. Века в растении. Обзор растительности прошлых геологических периодов. М.—Л., ОНТИ, 1936.
- Титов И. А. Взаимодействие растительных сообществ и условий среды. М.—Л., Изд. «Сов. науки», 1952.
- Унададзе-Дгебуададзе М. Д. Зоеновая флора Южного Урала. — Труды Геол. инст. Акад. наук Грузинской ССР, серия геол., 1948, № 4/9.
- Формозова Л. Н. Стратиграфическое положение и возраст железорудных слоев Северного Приаралья. — Бюлл. МОИП, отд. геол., 1949, 24, вып. 4.
- Формозова Л. Н. Косная слоистость и происхождение четвертичного материала Кутубулазской свиты Северного Приаралья. — Бюлл. МОИП, отд. геол., 1951, 26, вып. 3.
- Хозацкий Л. И. Нахождение остатков морской черепашки в олигоценовых отложениях Приаралья. — Докл. Акад. наук СССР, новая серия, 1945, 49, № 1.
- Чигурьева А. А. Строение пыльцы у *Gnetales*. — Докл. Акад. наук СССР, 1937, 15, № 4.
- Чигурьева А. А. К байкальской третичной флоре Алу-Теса. — Докл. Акад. наук СССР, 1948, 61, № 2.
- Чигурьева А. А. К ископаемой третичной флоре и растительности Приаралья. — Бюлл. Моск. общ. испыт. природы, отд. геол., 1951, 26, вып. 5.
- Чигурьева А. А. 2. О юрцевой флоре южной Эмбы. Там же.

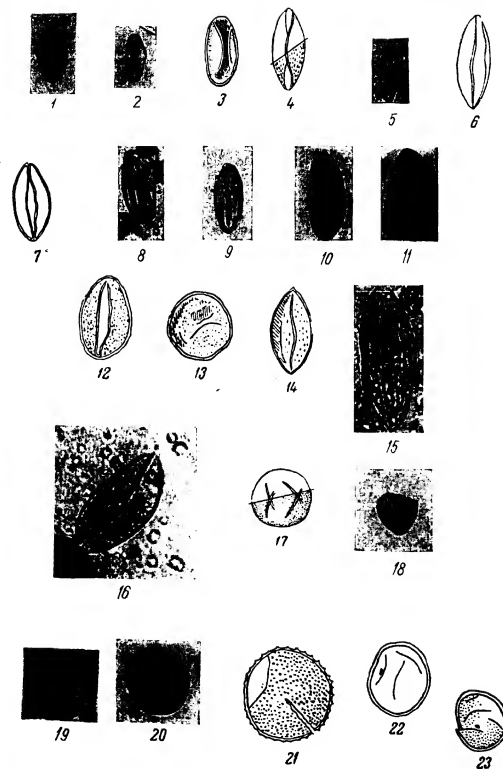
- Чиягуяева А. А. 3. О находке микроспоры вельвичии в эоценовых отложениях Западного Казахстана. — Ботан. журнал, 1951, 39, № 5.
- Штапа И. С. К вопросу изучения пыльцы кавказских сосен. — Сообщ. Акад. наук Грузинской ССР, 1954, 15, № 3.
- Яшин А. Л. Геологическое строение Северо-Западного Приаралья. В кн.: Материалы по геологии Центрального Казахстана. М.—Л., Изд. Акад. наук СССР, 1940.
- Яшин А. Л. Геология Северного Приаралья. М., Изд. МОИП, 1953.
- Ярмоленко А. В. К вопросу о разрыве между данными палеоботанической летописи и составом современной флоры. — Сов. ботаника, 1941, № 5—6.
- Defflandre G. Considérations biologiques pour les microorganismes d'origine planctonique conservées dans les silex de la craie. T. V—IX. — Bull. Biol. Trans. Belg., 1935, № 69.
- Cain G. The identification of species in fossil pollen of *Pinus* by size-frequency determinations. — Amer. J. Bot., 1940, 27.
- Chapman R. The Kucha flora in relation to the physical conditions in Central Asia during the late tertiary. — Sweden Geogr. Ann., London, 1935.
- Erdtman G. An introduction to pollen analysis. Waltham, Mass., 1943.
- Erdtman G. Pollen morphology and plant taxonomy. V. I. Angiosperms. Stockholm, Almqvist Wiksell, 1952.
- Furere E. Pollenanalytische Studien in der Schweiz. — Vierteljahrsscher Naturforsch. Ges. Zürich, 1927, 72.
- Gothan W. Die merkwürdigen pflanzengeographischen Besonderheiten in den Mitteleuropäischen Karboniflora. — Paläontographica, 91, Abt. B. Stuttgart, 1951.
- Heer O. In: A. B. H. Beiträge zur Paläontologie des asiatischen Russlands. — Mém. Acad. Sci. St-Petersb., 1858.
- Hornemann H. Die pollenanalytische Unterscheidung von *Pinus montana*, *P. silvestris* und *P. cembra*. — storr. Bot. Schr., 1929, 78.
- Kirchheimer F. Die Symplocaceen der erdgeologischen Vergangenheit. — Paläontographica, Beiträge Naturgesch. Vorzeit., 1949, 90, Abt. B., Lief. 1—3.
- Kirchheimer F. Microfossilien aus Salzlagerungen des Tertiärs. — Paläontographica, 1950, 90, Abt. B., Lief. 4—6.
- Kraussel R. Koniferen und andere Gymnospermen aus der Trias von Lunz. Niederösterreich. — Paläontographica, 1949, 89, Abt. B., Lief. 1—3.
- Kemp G. Pollenanalytische Untersuchungen des miozänen Braunkohlenlagers von Konin und der Warthe. — Paläontographica, 1949, 90, Abt. B., Lief. 1—3.
- Potonie R. I. Zur Mikrobotanik des miozänen Humoldts der Niederheinischen Bucht. — Arb. Inst. Paläobotanik u. Petr. Breusteine, 5. — Preuss. Geol. Landesanst., 1934.
- Potonie R. 2. Zur Mikrobotanik der Kohlen und ihrer Verwandten, zur Morphologie der fossilen Pollen und Sporen. — Vertriebe Preuss. Geol. Landesanst., Berlin, 1934.
- Potonie R. Revision stratigraphisch wichtiger Sporomorphem des Mitteleuropäischen Tertiärs. — Paläontographica, 1951, 91, Abt. B.
- Reissinger A. Die «Pollenanalyse» ausgedehnt auf alle Sedimentgesteine der geologischen Vergangenheit. — Paläontographica, 1950, 90, Abt. B., Lief. 4—6.
- Rudolph K. Mikrofossiliatische Untersuchung tertiärer Ablagerungen im Nördlichen Böhmen. — Beih. Bot. Zbl., 1935, 54, Abt. B.
- Selling O. H. Studies in Hawaiian pollen statistics. Part I. The pollen of the Hawaiian Phanerogams. Special publication Bishop. Mus. Honolulu, 38. Hawaii, 1947.
- Stockmans F. Les lignites inéniens de Mol. (Belgique). — Bull. Mus. Hist. Nat. Belg., 1943, 19.
- Thiergart F. Die Pollenflora der Niederlansitzer Braunkohle, besonders im Profil der Grube Marz bei Seiftenberg. — Jahrb. — Preuss. Geol. Landesanst., 1937, 58.
- Thiergart F. Die Mikropaläontologie als Pollenanalyse im Dienst der Braunkohlenforschung. Schrift aus dem Gebiete d. Brennstoff-Geologie, 1940, H. 13.
- Thiergart F. 1. Der stratigraphische Wert mesozoischer Pollen und Sporen. — Paläontographica, 1949, 89, Abt. B., Lief. 1—3.
- Thiergart F. 2. Die Schadoplytzone und der Schadoplytvorstoff in der Niederrheinischen Braunkohle. — Düsseldorf, 1949.
- Thompson P. W. Altiertiäre Elemente in der Pollenflora der rheinischen Braunkohle und einige stratigraphisch wichtige Pollenformen derselben. — Paläontographica, 1949, 90, Abt. B., Lief. 1—3.
- Thompson P. W. Grundsätze zur tertiären Pollen und Sporen — Mikrostratigraphie. — Geol. Jahrb., Hannover/Collo., 1950, 65.
- Wodehouse R. P. Pollen grains, their structure, identification and significance in science and medicine. New York, 1935.
- Wodehouse R. P. The oil shales of the Green River formation. — Bull. Torrey Bot. Club, 1932, 59.
- Wodehouse R. P. Tertiary pollen. The oil shales of the eocene Green River formation. — Bull. Torrey Bot. Club., 1933, 60.

ТАБЛИЦЫ

К таблице I

- 1—3. *Zamites* sp. (pollen.). Увел. 400.
 4, 5. *Encephalarites cycadioides* sp. nov. (pollen). Увел. 400.
 6—11. *Ginkgo bilobaeformis* sp. nov. (pollen). Увел. 400.
 12—14. *Ginkgo biloba* L. (recent.). Увел. 400.
 15, 16. *Ginkgoites* sp. (pollen). Увел. 400.
 17, 18. *Taxus cuspidataeformis* sp. nov. (pollen). Увел. 400.
 19, 20. *Taxus baccataeformis* sp. nov. (pollen). Увел. 400.
 21. *Taxites* (?) sp. Увел. 400.
 22, 23. *Torreya californiformis* sp. nov. (pollen). Увел. 400.

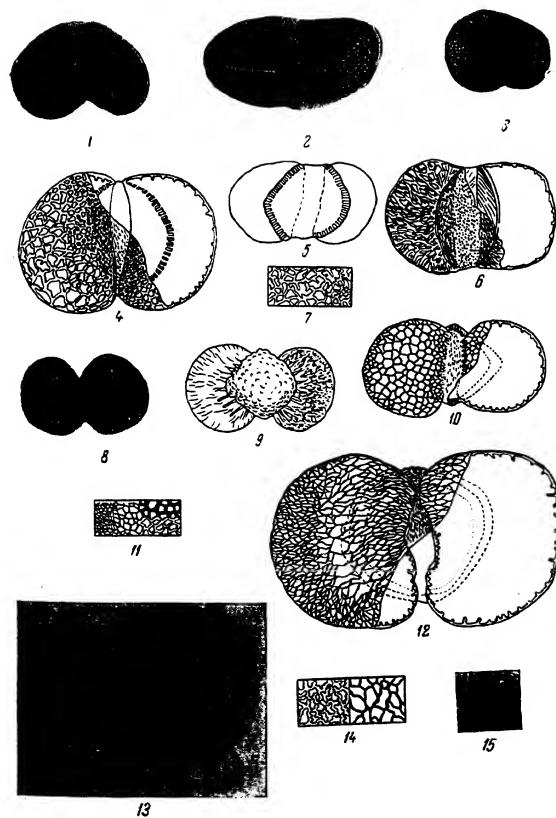
ТАБЛИЦА I



К таблице II

- 1,2 *Podocarpus sellowiformis* sp. nov. (pollen). Увел. 400.
 3—6. *Podocarpus andiniiformis* sp. nov. (pollen). Рис. 3 —
 увел. 400; рис. 4—увел. 600.
 7. То же, строение сетки на воздушных мешках. Увел. 500.
 8—10. *Podocarpus nageiaformis* sp. nov. (pollen) Рис. 8 —
 увел. 400; рис. 9 и 10—увел. 500.
 11. То же, строение сетки на воздушных мешках. Увел. 500.
 12, 13. *Podocarpites kazakhstanica* sp. nov. (pollen). Рис. 12 —
 увел. 500; рис. 13 — увел. 400.
 14. То же, строение сетки на воздушных мешках. Увел. 500.
 15. То же, строение структуры поверхности тела. Увел. 500.

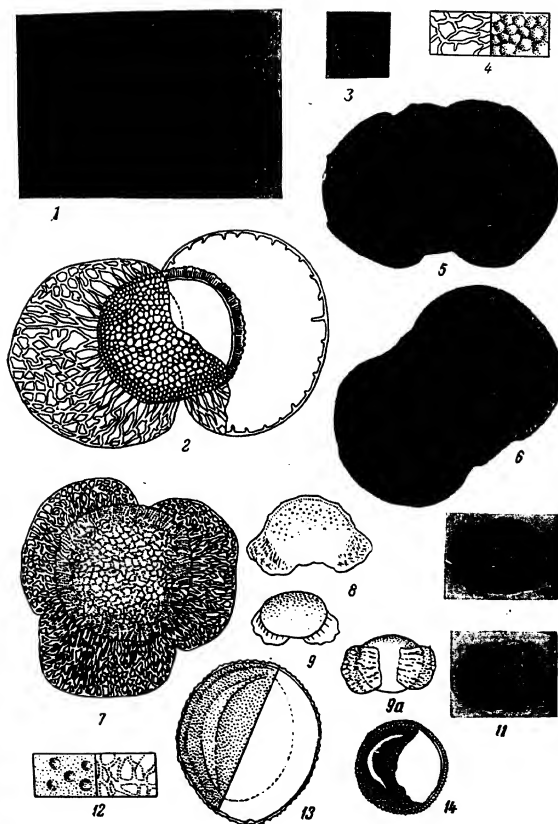
ТАБЛИЦА II



К таблице III

- 1,2. *Podocarpites gigantea* sp. nov. (pollen). Рис. 2.—Увел. 500.
 3. То же, деталь строения сетки воздушных мешков. Увел. 400.
 4. То же, строение сетки воздушных мешков (слева) и скульптуры поверхности тела (справа). Увел. 400.
 5,6. *Podocarpus andinus* Р о с е р р. (recent.) (полярная проекция). Увел. 400.
 7. *Podocarpus* aff. *dacrydioides*. A. Rich. Увел. 400.
 8—11. *Daerydium elatumiformis* sp. nov. (pollen). Увел. 400.
 12. То же, строение сетки воздушных мешков (справа) и скульптуры поверхности тела (слева). Увел. 500.
 13. *Araucaria elegans* sp. nov. (pollen). Увел. 500.
 14. *Agathis orataeformis* sp. nov. (pollen). Увел. 500.

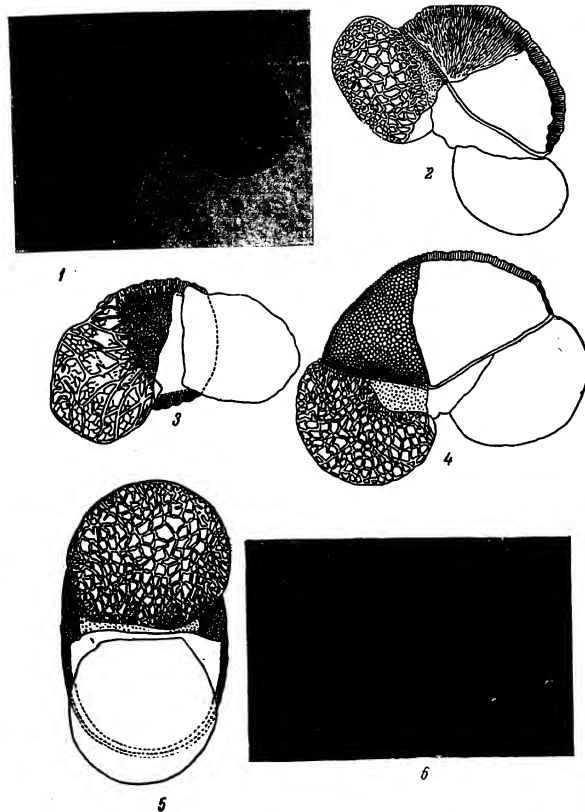
ТАБЛИЦА III



К таблице IV

- 1,2. *Abies sibiriciformis* sp. nov. (pollen). Увел. 400.
 3. *Abies protofirma* sp. nov. (pollen). Увел. 400.
 4—6. *Keteleeria davidianaeformis* sp. nov. (pollen)
 Увел. 400.

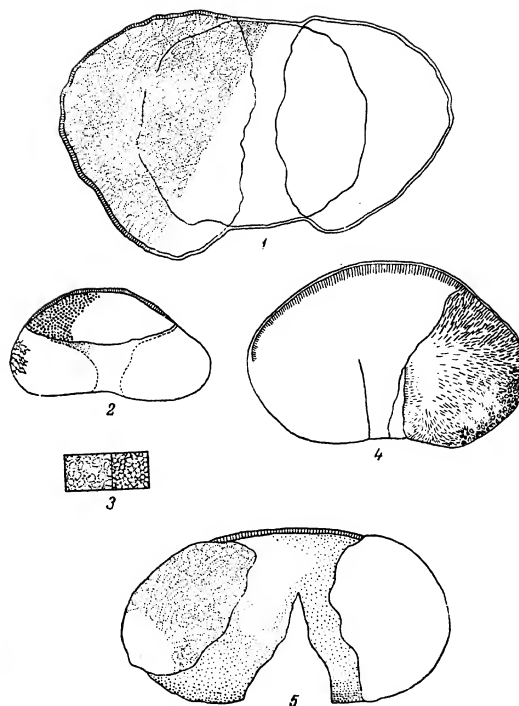
ТАБЛИЦА IV



К таблице V

1. *Keteleeria* sp. Увел. 500.
2. *Picea lasaranica* sp. nov. (pollen). Увел. 400.
3. То же, деталь строения сетки воздушных мешков (слева) и скульптуры шита (справа). Увел. 500.
4. *Picea schrenkianaeformis* sp. nov. (pollen). Увел. 400.
5. *Picea schrenkianaeformis* sp. nov. (pollen) (из континентальных олигоценовых отложений). Увел. 500.

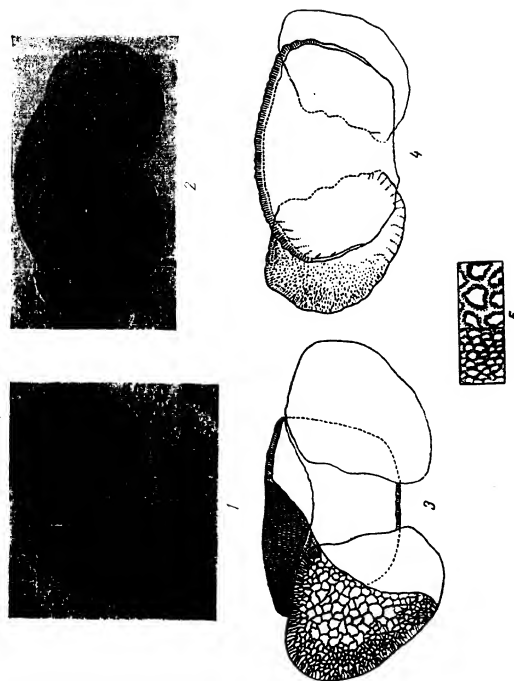
ТАБЛИЦА V



К таблице VI

- 1—4. *Picea alata* sp. nov. (pollen) (ex gr. *P. jezoensis* C. A. R.).
Увел. 500.
5. То же, деталь строения сетки воздушных мешков (справа)
и структуры поверхности тела (слева). Увел. 500.

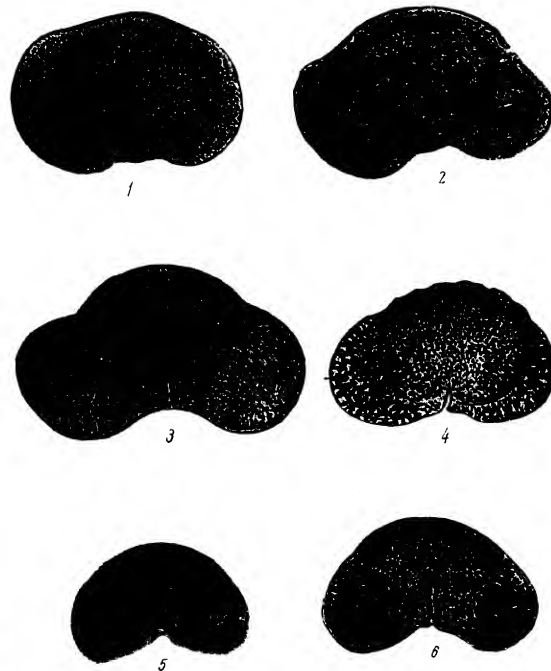
ТАБЛИЦА VI



К таблице VII

- 1—3. *Cedrus atlantica* Manetti (recent.). Увел. 400.
 4. *Cedrus deodara* Loud. (recent.). Увел. 400.
 5, 6. *Cedrus libani* Laws. (recent.). Увел. 400.

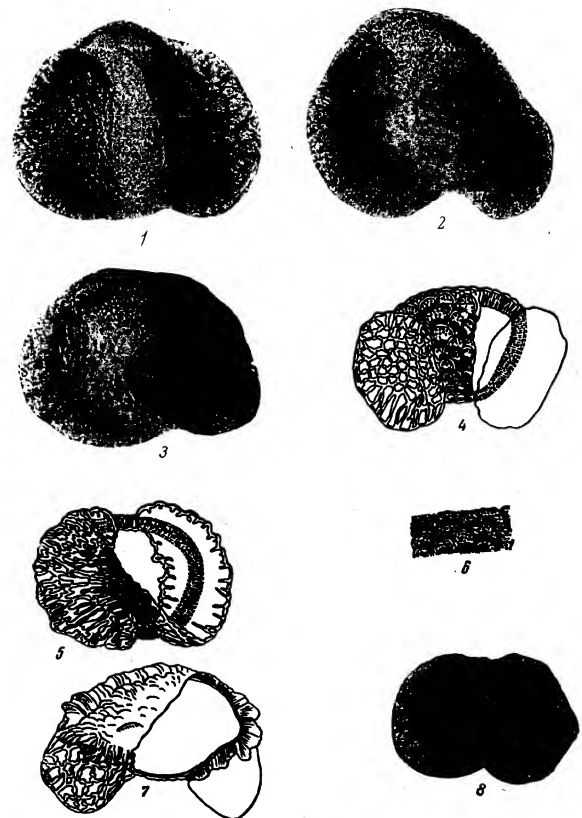
ТАБЛИЦА VII



К таблице VIII

- 1—5. *Cedrus aff. deodara* Loud. Увел. 400.
 6. То же, деталь строения поверхности тела.
 7, 8. *Cedrus lazireticulata* Зацер (pollen). Рис. 7—увел. 500;
 рис. 8—увел. 400.

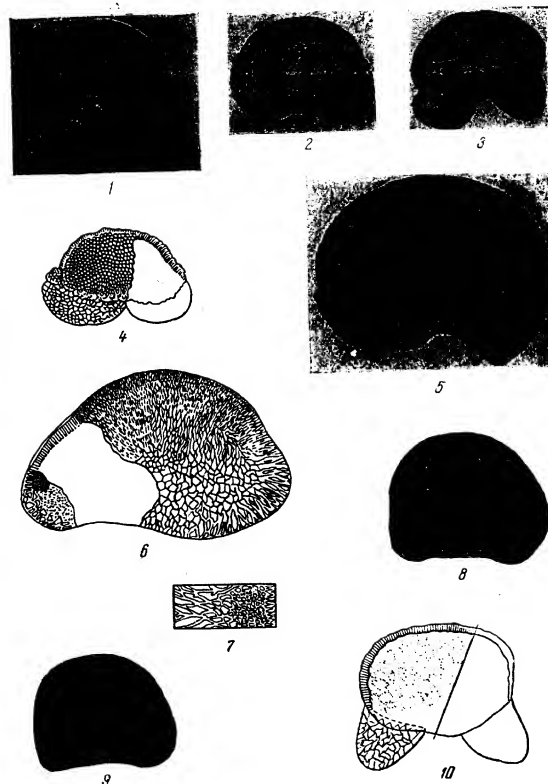
ТАБЛИЦА VIII



К таблице IX

- 1—4. *Cedrus piniformis* sp. nov. (pollen). Увел. 400.
 5, 6. *Cedrus Janschinii* sp. nov. (pollen). Увел. 400.
 7. То же, детали строения структуры воздушных мешков.
 Увел. 400.
 8—10. *Cedrus parrissacata* Зацер (pollen). Увел. 400.

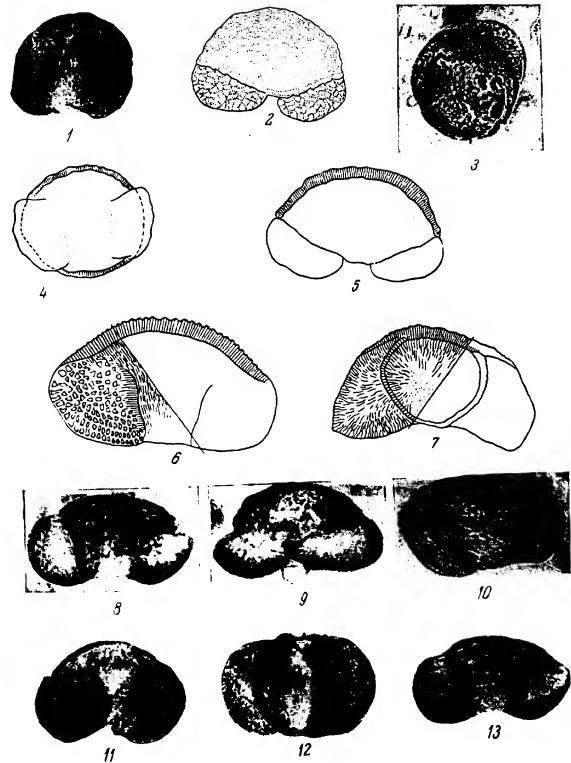
ТАБЛИЦА IX



К таблице X

- 1—5. *Cedrus pusilla* Zaueг (pollen). Увел. 400.
 6. *Cedrus* aff. *libani* Laws. Увел. 400.
 7. *Cedrus longisaccata* sp. nov. (pollen). Увел. 400.
 8—13. *Pinus cembraeformis* sp. nov. (pollen). Увел. 400.

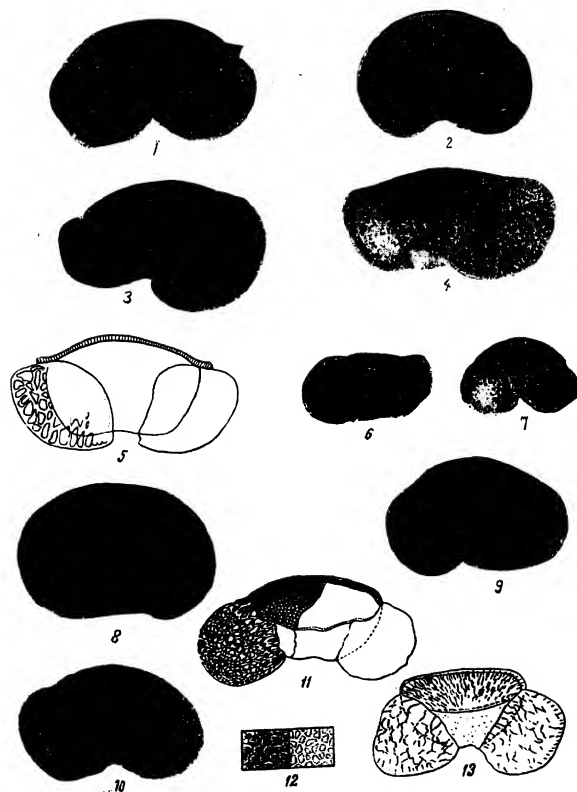
ТАБЛИЦА X



К таблице XI

- 1—5. *Pinus aff. koraiensis* Sieb. et Zucc. Увел. 400.
 6, 7. *Pinus microsibirica* sp. nov. (pollen). Увел. 400.
 8—10. *Pinus sibiriciformis* sp. nov. (pollen). Увел. 400.
 11. *Pinus* ex gr. *sibirica* R и r. (Мауг.). Увел. 500.
 12. То же, деталь строения сетки воздушных мешков (справа) и структуры тела (слева). Увел. 500.
 13. *Pinus* ex gr. *sibirica* R и r. (Мауг.) из эоценовых отложений г. Тас-Аран в Северном Приаралье. Увел. 4(х).

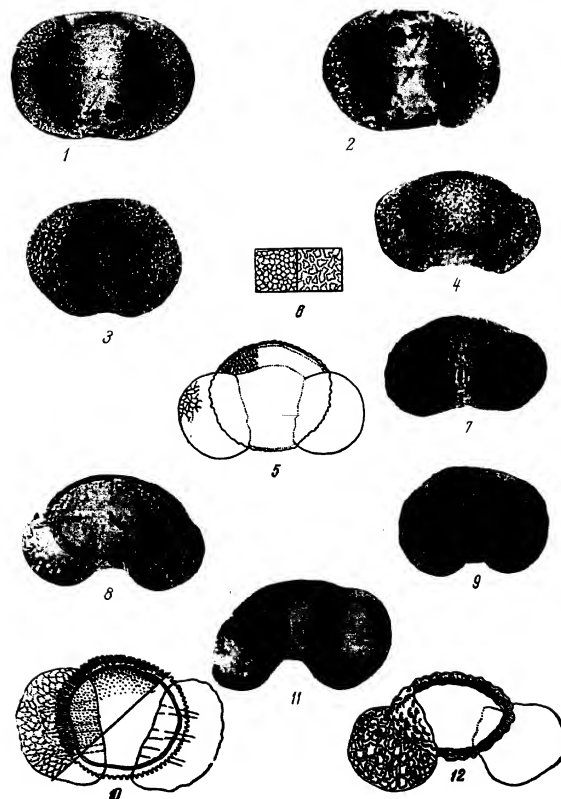
ТАБЛИЦА XI



К таблице XII

- 1, 2. *Pinus protocembra* sp. nov. (pollen). Увел. 400.
 3. *Pinus ex gr. protocembra* sp. nov. (pollen). Увел. 400.
 4, 5, 7, 8. *Pinus strobiformis* sp. nov. (pollen). Увел. 400.
 6. То же, деталь строения сетки мешков (справа) и структура поверхности тела (слева). Увел. 400.
 9—12. *Pinus peuceformis* sp. nov. (pollen). Увел. 400.

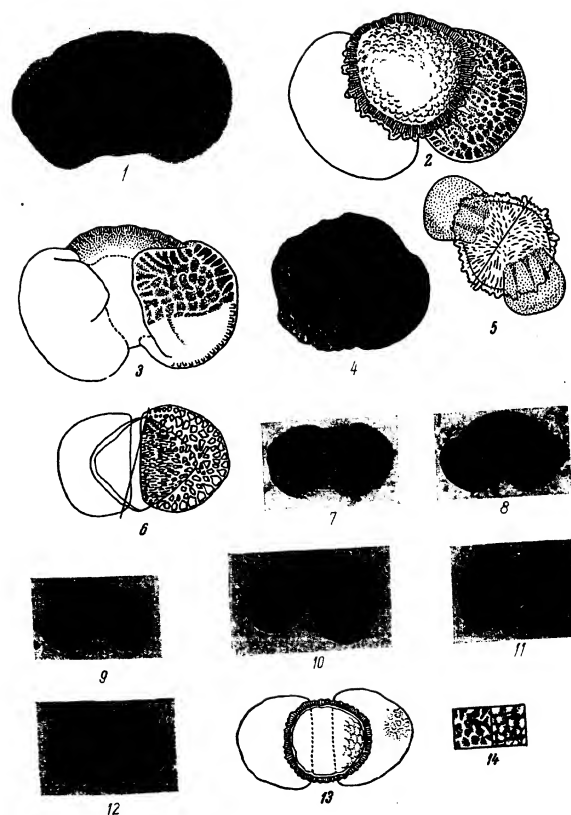
ТАБЛИЦА XII



К таблице XIII

- 1—3. *Pinus exelsaeformis* sp. nov. (pollen). Рис. 2, 3—увел. 500, рис. 1—увел. 400.
 4, 5. *Pinus ex gr. exelsaeformis* (pollen). Увел. 400.
 6. *Pinus gerardianaeformis* sp. nov. (pollen). Увел. 400.
 7—9. *Pinus longifoliaformis* sp. nov. (pollen). Увел. 400.
 10—13. *Pinus ponderosaeformis* sp. nov. (pollen). Рис. 12 — мелкий вариант.
 14. То же, деталь строения сетки воздушных мешков (слева) и структуры тела (справа). Увел. 400.

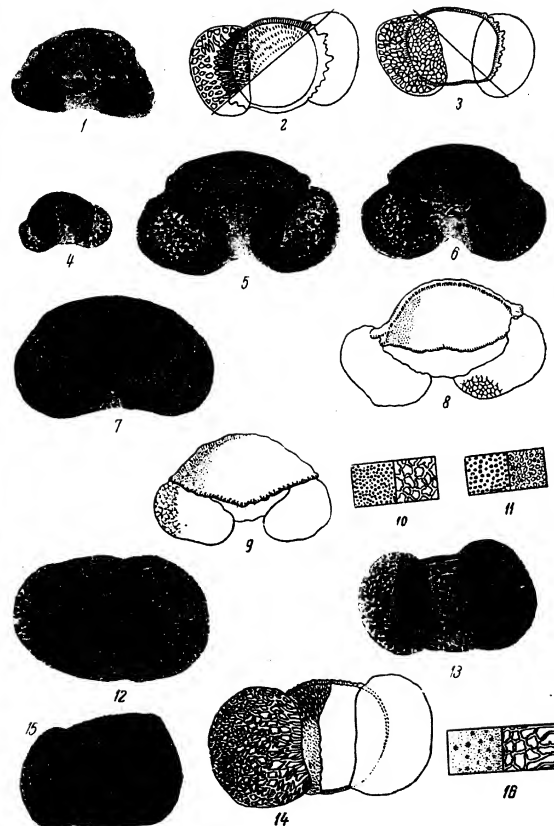
ТАБЛИЦА XIII



К таблице XIV

- 1—3. *Pinus bicornis* sp. nov. (pollen). Рис. 2,3—увел. 500; рис. 1—увел. 400.
 4. *Pinus minutus* sp. nov. (pollen). Увел. 400.
 5—9. *Pinus taedaeformis* sp. nov. (pollen). Увел. 400.
 10. То же, строение сетки воздушных мешков (справа) и структуры поверхности тела (слева). Увел. 400.
 11. То же.
 12—15. *Pinus singularis* sp. nov. (pollen). Рис. 14—увел. 500; рис. 12, 13, 15—увел. 400.
 16. То же, детали строения структуры тела (справа) и сетки воздушных мешков (слева). Увел. 500.

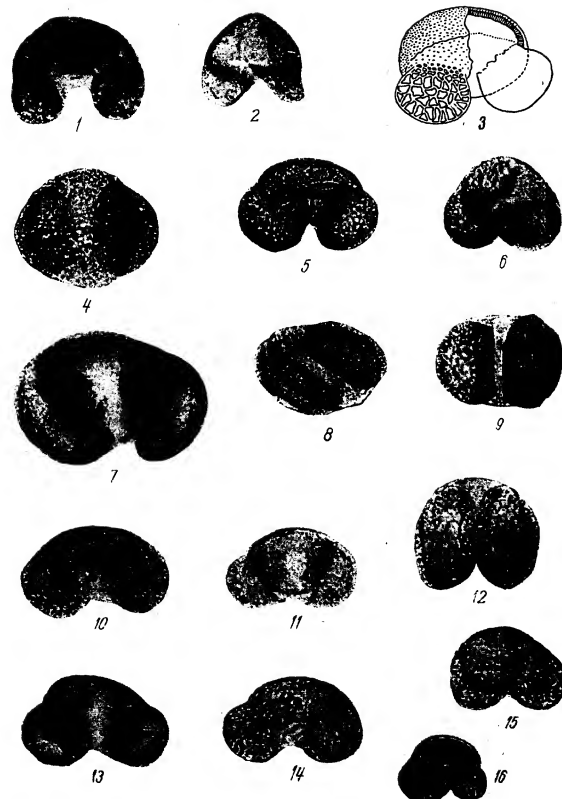
ТАБЛИЦА XIV



К таблице XV

- 1—4. *Pinus banksianaeformis* sp. nov. (pollen). Рис. 3 — увел. 800; рис. 1, 2, 4 — увел. 400.
 5. *Pinus halepensisformis* sp. nov. (pollen). Мелкий экземпляр.
 6. *Pinus protosilvestris* sp. nov. (pollen). Увел. 400.
 7—13. *Pinus* aff. *silvestris* L. (из отложений нижнего и среднего олигоцена). Увел. 400.
 14—16. *Pinus* aff. *silvestris* L. (из отложений плейстоцена и четвертичных). Увел. 400.

ТАБЛИЦА XV



К таблице XVI

1. *Tsuga crispa* sp. nov. (pollen). Увел. 400.
2. *Tsuga torulosa* sp. nov. (pollen). Увел. 400.
3. *Sciadopitys tuberculata* sp. nov. (pollen) (ex gr. *S. verticillata* Sieb. et Zucc.). Увел. 400.
- 4, 5. *Sequoia sempervirens* sp. nov. (pollen). Увел. 500.
6. *Sequoia sempervirens* Endl. (recent.). Увел. 400.
7. *Taxodium aff. distichum* (L.) Rich. Увел. 400.
- 8, 9. *Taxodites* sp. Увел. 400.
- 10—12. *Cunninghamia aff. lanceolata* Lamb. Увел. 400.
- 13—15. *Thujaites* sp. (pollen). Увел. 500.
16. *Libocedrus* sp. (pollen). Увел. 400.
- 17—19. *Cupressites* sp. (pollen). Рис. 17.—увел. 500; рис. 18, 19—увел. 400.
20. *Cupressites* sp. (pollen) (ex gr. *Cupressus pollens* Bolch.). Увел. 400.
21. *Chamaecyparites* sp. (pollen). Увел. 400.

ТАБЛИЦА XVI

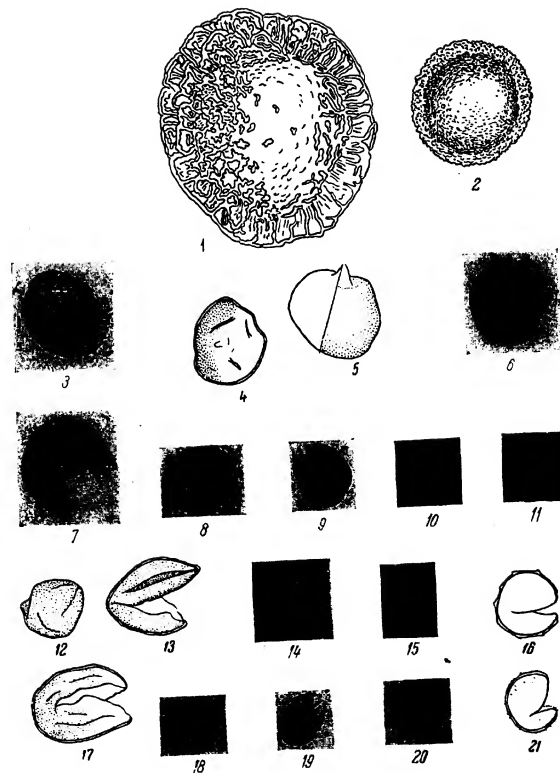
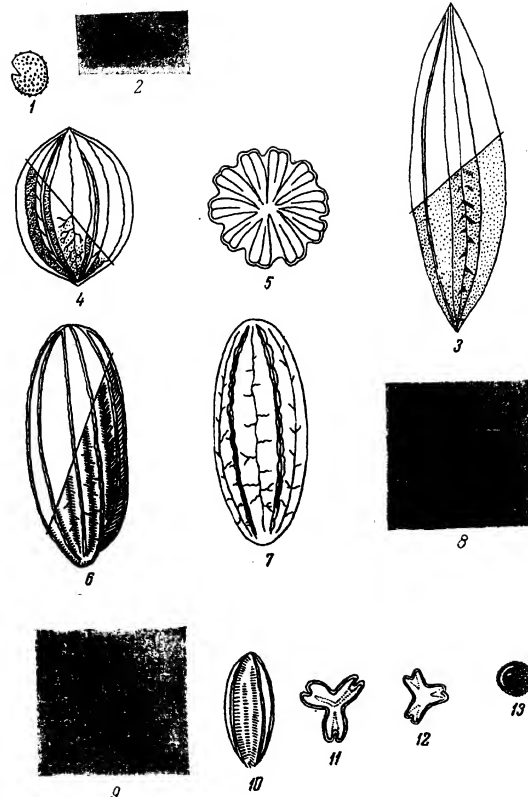


Таблица XVII

1. *Chamaecyparites* sp. Увел. 400.
2. *Welwitschites protonirabilis* sp. nov. (pollen). Увел. 400.
3. *Ephedra eocenipites* Woodhouse. Увел. 600.
4. *Ephedra* aff. *Przewalskii* Stapf. (в боковой проекции). Увел. 400.
5. То же в полярной проекции.
- 6, 7. *Ephedra* aff. *distachya* L. Увел. 400.
- 8, 9. *Ephedra* aff. *intermedia* Sch r. Увел. 400.
- 10—12. *Ephedrites trinata* sp. nov. (pollen). Рис. 10 — в боковой проекции; рис. 11 и 12 — в полярной.
13. *Gnetumites* sp. (pollen). Увел. 400.

ТАБЛИЦА XVII



СОДЕРЖАНИЕ

| | Стр. |
|--|------|
| Введение | 3 |
| I. Краткий очерк геологии и палеогеографии Павлодарского Прииртышья и Северного Приаралья и некоторые сведения о геологическом строении Тургайской впадины | 43 |
| II. К истории флоры и растительности Казахстана в третичное время | 39 |
| III. Значение пыльца голосеменных для характеристики палеоландшафта палеогена и отчасти неогена | 43 |
| IV. Распространение пылцы голосеменных в кайнозойских отложениях Павлодарского Прииртышья и Северного Приаралья | 50 |
| V. Руководящие спорово-пыльцевые спектры голосеменных для стратиграфического расчленения кайнозойских отложений Павлодарского Прииртышья и Северного Приаралья | 65 |
| VI. Флористический анализ спектров и их стратиграфическое значение | 70 |
| VII. Морфологическое описание пылцы голосеменных, выделенной из кайнозойских отложений Павлодарского Прииртышья и Северного Приаралья | 87 |
| 1. Класс Cycadales — Ситовые | 90 |
| Сем. Cycadaceae — Ситовиковые | 92 |
| 2. Класс Ginkgoales — Гинкговые | 94 |
| Сем. Ginkgoaceae — Гинкговые | 94 |
| 3. Класс Coniferales — Хвойные | 95 |
| Сем. Taxaceae — Тисовые | 95 |
| Сем. Podocarpaceae — Подояльничковые | 98 |
| Сем. Araucariaceae — Араукариевые | 111 |
| Сем. Pinaceae — Сосновые | 113 |
| Сем. Taxodiaceae — Таксодиевые | 164 |
| Сем. Cupressaceae — Кипарисовые | 169 |
| 4. Класс Gnetales — Гнетовые | 173 |
| Сем. Welwitschiaceae — Вельвичиевые | 174 |
| Сем. Ephedraceae — Хвойниковые | 175 |
| Сем. Gnetales — Гнетовые | 177 |
| Литература | 179 |
| Таблицы микрофотографий и зарисовок пылцы голосеменных | 185 |

ИСПРАВЛЕНИЯ И ОПЕЧАТКИ

| Стр. | Строчка | Напечатано | Должно быть |
|-------|-------------------------------------|--------------------------|----------------------------|
| 37 | 28 св. | Богданов | Бажаков |
| 56 | 22 св. | Podocarpus kazakhstanica | Podocarpites kazakhstanica |
| 59 | Таблица 2, графа 1, стр. 9 св. | P. gerardiformes | P. gerardianseformis |
| 88—87 | Фиг. 14, графа 3 слева, стр. 6 св. | Чограйская | Чограйская |
| | Фиг. 14, графа 1 справа, стр. 3 св. | Dacridium | Dacrydium |

Труды ГИН, вып. 6. В. Д. Заклянская

Елена Дмитриевна Заклянская
Стратиграфическое значение пылцы голосеменных кайнозойских отложений Павлодарского Прииртышья и Северного Приаралья (Труды Геологического института, выпуск 6)

Утверждено к печати Геологическим институтом Академии наук СССР

Редактор издательства Н. М. Чепикова. Технический редактор С. Г. Носков

РИСО АН СССР № 98-508. Сдано в набор 1/IX-1956 г. Подп. в печать 17/I-1957 г. Формат бум. 70х108/16. Печ. д. 11,5+2, на мел. бум. + 3 вкл. — 15,05 + 2, на мел. бум. + 3 вкл. Уч.-изд. лист. 14,4+3,4 вкл. — 17,8. Тираж 1300. Нак. № 1555. Тип. зан. 836. Т-00308.

Цена 12 р.

Издательство Академии наук СССР. Москва, В-64, Подсосенский пер., д. 211

2-я типография Издательства АН СССР. Москва, Г-90, Шубинский пер., д. 10